Exercice 1

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ iid de loi Beta(a, b), où $a \geq 0$ et $b \geq 0$ sont deux paramètres à estimer. En utilisant

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{a}{a+b}, \qquad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)},$$

proposer des estimateurs de a, b basés sur la méthode des moments. Sont-ils consistants ?

Exercice 2

Soient $(U_1, \ldots, U_n)$ iid de loi $\mathcal{U}([0, \theta])$, où $\theta > 0$ est un paramètre à estimer.

1. Proposer un estimateur Z_1 basé sur la méthode des moments. Montrer qu'il est sans biais, fortement consistant, asymptotiquement normal.
2. Trouver l'estimateur Z_2 du maximum de vraisemblance. Montrer qu'il est fortement consistant, et trouver une suite a_n qui tend vers $+\infty$ telle que $a_n(Z_2 - \theta)$ converge en loi (on explicitera la loi limite).
3. Lequel des deux estimateurs préférera-t-on ?

Exercice 3

Soient $(Z_1, \ldots, Z_n)$ iid de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$ sont inconnus.

1. Retrouver l'estimateur du maximum de vraisemblance pour m et σ^2. Sont-ils consistants ? Sans biais ?
2. On suppose $m = 0$. Calculer $\mathbb{E}[|Z_1|]$ et en déduire un autre estimateur de σ.

Exercice 4

On considère le modèle statistique $(\mathrm{Poiss}(\theta))_{\theta>0}$.

1. Calculer l'information de Fisher

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(X)\right)^2\right],$$

   où les f_θ sont les densités des lois Poiss(θ) par rapport à une même mesure, et X suit la loi Poiss(θ).
2. Calculer $I_n(\theta)$ l'information de Fisher associée à un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
3. On considère l'estimateur $\bar{X}_n$ de θ. Calculer son risque quadratique $r(\theta) = \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \theta)^2]$ et le comparer à la borne de Cramér-Rao $\frac{1}{I_n(\theta)}$.

Exercice 5

On considère le modèle statistique $(\mathcal{U}([0,\theta]))_{\theta>0}$. Reprendre l'exercice 4 dans ce cas ; on prendra, comme estimateur de θ, $2\bar{X}_n$.

Exercice 6

On considère le modèle statistique $\big(\mathcal{N}(\theta,\theta^2)\big)_{\theta>0}$.

1. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.
2. Calculer l'information de Fisher associée à un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$.

Exercice 7

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta,1)$. Donner la loi de $\bar{X}_n-\theta$. En déduire un intervalle de confiance de niveau exactement α pour θ.

Exercice 8

Soit $(B_1,\dots,B_n)$ un n-échantillon de loi $\mathrm{Ber}(p)$.

1. En utilisant Bienaymé-Tchebitchev, donner un invervalle de confiance de niveau α pour p.
2. Idem en utilisant l'inégalité de Hoeffding :
   Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires réelles telles que X_i est à valeurs dans $[a_i,b_i]$, alors pour tout $t\geq 0$,
   $$\mathbb{P}(|\bar{X}_n-\mathbb{E}[\bar{X}_n]|\geq t)\leq 2\exp\left(-\frac{2n^2t^2}{\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)^2}\right).$$
3. Avec le TCL pour $\bar{B}_n$, donner un intervalle de confiance de niveau asymptotique α.
4. Par la méthode delta, trouver un intervalle de confiance de niveau asymptotique α pour $g(\theta)=2\arcsin(\sqrt{\theta})$. En déduire un intervalle de confiance pour θ.