Exercice

1. Supposons que l'on sait simuler des variables de loi $\mathcal{U}[0,1]$. Donner un moyen de simuler un point uniforme dans
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
Combien votre algorithme utilise-t-il de variables uniformes en moyenne ? L'implémenter.
2. Plus généralement, soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ des v.a. iid de loi μ sur $\mathbb{R}^d$, et soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mu(B) > 0$. On pose
$$T = \inf\{n \geq 1 \ \mid Y_n \in B\}.$$
Quelle est la loi de T ? Montrer que Y_T suit la loi $\mu(\cdot \mid B)$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y_T \in A) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}$) et est indépendante de T.
3. Soit ν une probabilité sur $\mathbb{R}$ ayant une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit X de loi ν et $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ indépendantes. Montrer que $(X, U \cdot g(X))$ suit la loi uniforme sur
$$E_g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y \leq g(x)\}.$$
4. Quelle est la mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}^2$) de E_g ?
5. Réciproquement, si (X,Y) est uniforme dans E_g, montrer que X a pour loi ν.
6. Soit X de loi ν et densité g, et Y de loi μ et densité f, toutes deux réelles. On suppose que $\exists \lambda > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \lambda g(x)$. Comment simuler la variable Y à partir d'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ iid de loi ν et d'une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ iid de loi $\mathcal{U}[0,1]$ indépdendantes ?
7. On cherche à utiliser cette méthode pour simuler la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, quelle est la densité de $|Z|$? On la note f.
8. On choisit $g(x) = e^{-x}1_{x\geq 0}$. Trouver un $\lambda > 0$, si possible minimal, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \lambda g(x)$.
9. Comment simuler une variable $\mathcal{E}(1)$ à partir d'une variable $\mathcal{U}[0,1]$?
10. Déduire de ce qui précède un algorithme pour simuler la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ à partir uniquement de v.a. iid $\mathcal{U}[0,1]$. L'implémenter.