Un JEU de Culture Mathématique

Yves Benoist

Journée Maths en Herbe

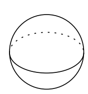
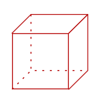
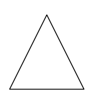
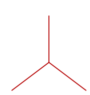
15 janvier 2025 IHES

Le “JEU” ci-dessous est une présentation rapide et ludique de quelques concepts mathématiques qui s’adresse aux étudiants de L3.

Le “JEU” consiste à trouver une réponse post-L3 aux douze questions qui ont déjà une réponse pré-L3 naïve. Une solution est donnée en rouge. Pour jouer, il faut donc cacher la partie colorée du tableau.

Trouver seul la moitié des réponses est déjà un beau challenge.

Ce “JEU” illustre le fait que, contrairement à une croyance bien établie, la réponse à une question mathématique simple n’est pas toujours unique. Plus précisément, la réponse n’est plus unique lorsqu’on fait une interprétation moins restrictive de la question. Réinterpréter la question dans d’autres cadres fournit des réponses qui s’avèrent souvent encore plus utiles que l’unique réponse classique. C’est ce qu’ont compris d’illustres mathématiciens dont le nom est indiqué en bleu.

N°	QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE	La réponse pré-L3	Une réponse post-L3	Explication rapide	Idée de
A.1	Dessiner une sphère			dans ℓ^∞	Banach
A.2	Dessiner un triangle			dans un arbre	Gromov
A.3	Dessiner une ligne droite			dans $\mathbb{H}^2$	Poincaré
A.4	Intersection de 2 cercles	0, 1 ou 2 points	toujours 4 points	dans $\mathbb{CP}^2$	Bezout

$N°$	QUESTIONS D'ANALYSE	La réponse pré-L3	Une réponse post-L3	Explication rapide	Idée de
B.1	Dériver $\lvert x\rvert$	Pas dérivable	signe(x)	dans $\mathcal{D}'$	Schwartz
B.2	Intégrer $1/\sqrt{x^3-x}$	Pas calculable	$\mathrm{arc}\mathfrak{p}(x)$	fonction $\mathfrak{p}$ elliptique	Weierstrass
B.3	$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$	∞	0	dans $\mathbb{Q}_2$	Hasse
B.4	$\sum_{n=1}^{\infty} n$	∞	$-1/12$	$\zeta(-1)$	Euler

$N°$	QUESTIONS D'ALGÈBRE	La réponse pré-L3	Une réponse post-L3	Explication rapide	Idée de
C.1	$\sqrt{2}-1$ est il entier?	Non	Oui	dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$	Dedekind
C.2	$\mathbb{Q}$ est il discret?	Non	Oui	dans $\mathbb{A}$	Chevalley
C.3	Développer $(x+y)^n$	$\sum\limits_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$	x^n+y^n	si $yx = \zeta\, xy$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$	Drinfeld
C.4	Décomposer 2025	$3^4\, 5^2$	3^6+6^4	Somme de 2 carrés	Fermat

Explications un peu plus détaillées

La réponse à chacune de ces douze questions pourrait occuper un chapitre complet d'un livre avancé de mathématiques. Contentons nous ci-dessous de quelques mots d'explication.

A GÉOMÉTRIE

A.1 Il peut sembler bizarre qu'une sphère ait la forme d'un cube. C'est ce qui se passe quand on remplace l'espace euclidien de dimension 3 par un espace vectoriel muni de la norme ℓ^∞. Les espaces vectoriels normés étudiés par Banach introduisent un point de vue géométrique dans l'étude des fonctions. Elles y sont considérées comme des points dans un espace aux propriétés proches de l'espace euclidien, sauf que les sphères ne sont plus rondes.

A.2 Il peut sembler bizarre qu'un triangle puisse avoir la forme d'un trépied. C'est ce qui se passe quand on remplace le plan euclidien par un arbre. Les arbres sont des espaces métriques qui sont les prototypes pour une classe d'espaces métriques très utiles introduite par Gromov, les espaces δ-hyperboliques. Dans ces espaces métriques, un grand triangle ressemble toujours à un trépied.

A.3 Il peut sembler bizarre qu'une ligne droite puisse être dessinée comme un arc de cercle. C'est ce qui se passe quand on remplace le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ par le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Le plan hyperbolique est le premier modèle de géométrie non euclidienne introduite par Bolyai et Lobatchevski. C'est surtout un espace métrique très important qui a été beaucoup utilisé par Poincaré.

A.4 Il peut sembler bizarre que deux cercles distincts se coupent toujours en 4 points. C'est ce qui se passe quand on cherche les points d'intersections dans le plan projectif complexe $\mathbb{CP}^2$, c'est-à-dire des points à coordonnées complexes, en incluant les points à l'infini et en tenant compte de la multiplicité. Plus généralement, Bezout a montré qu'une courbe de degré p et une courbe de degré q se coupent toujours en exactement pq points.

B ANALYSE

B.1 Il peut sembler bizarre que la fonction $x \mapsto |x|$ soit dérivable alors que son graphe fait un angle droit. C'est ce qui se passe quand on dérive dans l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions. Ce point de vue de "dérivation faible" qui a été joliment formalisée par Schwartz permet de résoudre plus facilement de nombreuses équations aux dérivées partielles.

B.2 Il peut sembler bizarre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}$ admette une primitive explicite $\mathrm{arc}\mathfrak{p}(x)$. Il est déjà remarquable que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ admette une primitive explicite $\arcsin(x)$. C'est Weierstrass qui a compris que cette primitive $\mathrm{arc}\mathfrak{p}(x)$ est la fonction réciproque d'une fonction $\mathfrak{p}(x)$ qui est encore plus spectaculaire que la fonction $\sin(x)$ car, comme fonction de la variable complexe x, elle admet deux périodes au lieu d'une.

B.3 Il peut sembler bizarre que la limite de la suite 2^n puisse être nulle. C'est ce qui se passe si on cherche cette limite dans le corps localement compact $\mathbb{Q}_2$. Pour tout nombre premier p, les corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$ qui ont été introduits par Hasse jouent un rôle central en théorie des nombres mais aussi en théorie des groupes. Ces corps sont des complétions de $\mathbb{Q}$ pour une valeur absolue telle que $|p| < 1$. Il n'est donc pas étonnant que dans $\mathbb{Q}_p$ la suite p^n converge vers 0.

B.4 Il peut sembler bizarre que la somme de cette suite positive et divergente soit un nombre rationnel négatif. Le point de vue consiste à renormaliser cette somme en considérant la série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ pour $s > 1$, en écrivant une élégante formule pour cette fonction de s, formule qui a du sens pour tout réel s, et en évaluant cette formule pour $s = -1$. C'est ce qu'a fait Euler. Cette fameuse fonction ζ étudiée par Riemann encapsule des propriétés fines de la suite des nombres premiers.

C ARITHMÉTIQUE

C.1 Il peut sembler bizarre que le nombre réel positif $\sqrt{2} - 1$ qui est plus petit que 1 soit un nombre entier. C'est ce qui se passe si on considère ce nombre comme un élément du corps de nombres $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. C'est Dedekind qui a compris que dans tout corps de nombres il y a un anneau, appelé l'anneau des entiers, qui a des propriétés analogues à $\mathbb{Z}$. Dans cet anneau tout élément s'écrit de façon unique comme produit de nombres "idéaux" premiers. La pertinence du concept d'idéal d'un anneau a émergé de cette étude.

C.2 Il peut sembler bizarre que le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels puisse être discret. C'est ce qui se passe si on le considère comme un sous-corps de l'anneau des adèles $\mathbb{A}$. Cet anneau $\mathbb{A}$ introduit par Chevalley est un anneau localement compact produit "restreint" des corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$ incluant $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. Le quotient $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ est alors un groupe compact et connexe appelé le solénoïde. Le language des adèles permet de traiter tout corps de nombres avec la même facilité que $\mathbb{Q}$. C'est une de ses grandes forces.

C.3 Il peut sembler bizarre que la puissance $(x + y)^n$ puisse être égale à $x^n + y^n$. C'est ce qui se passe si les variables x et y vérifient la relation de commutation twistée $yx = e^{2i\pi/n}xy$. En effet dans ce cas les termes croisés se simplifient. Cette relation de commutation twistée apparait dans les groupes quantiques introduits par Drinfeld.

C.4 Il peut sembler bizarre que l'entier 2025 puisse s'écire sous la forme d'une somme $m^6 + n^4$ avec m et n entiers. C'est en effet un phénomène très rare. Par contre il est beaucoup plus fréquent qu'un entier s'écrive comme une somme de 2 carrés. C'est le cas pour 2025 et dans ce cas la décomposition est unique. C'est Fermat qui le premier a décrit les nombres entiers qui peuvent se décomposer comme une somme de 2 carrés.

yv.benoist@cnrs.fr