ALGÈBRES DE LIE. — *Sur l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique nilpotent.* Note (*) de **Yves Benoist,** présentée par Henri Cartan.

On donne une description d'une algèbre qui, dans le cas d'un corps de base réel, correspond à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique nilpotent. Ceci généralise la description de J. Dixmier du centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente.

LIE ALGEBRAS. — On the Algebra of Invariant Differential Operators on a Nilpotent Symmetric Space.

One gives a description of an algebra which is, when the reference field is $\mathbb{R}$, *the algebra of invariant differential operators on a nilpotent symmetric space. This generalizes J. Dixmier's description of the center of the enveloping algebra of a nilpotent Lie algebra.*

Introduction. — Le corps de base est dans tout ce qui suit supposé de caractéristique nulle. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, f un caractère de $\mathfrak{h}$, $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ les algèbres enveloppante et symétrique de $\mathfrak{g}$. Les actions adjointes de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ sont notées par le même symbole : ad. Notons $\mathfrak{h}^f$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{h}^f=\{H+f(H);\ H\in\mathfrak{h}\}$ et $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ la sous-algèbre de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$:

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}=\{U\in\mathscr{U}(\mathfrak{g});\ \forall H\in\mathfrak{h},\ \mathrm{ad}\,H.U=0\}.$$

Alors $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}^f$ est un idéal bilatère de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$; donc l'espace quotient $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}^f$ est une algèbre.

Supposons que $\mathfrak{h}$ admette un supplémentaire $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{h}$-invariant : $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$ et $[\mathfrak{h},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$. L'action adjointe restreinte à $\mathfrak{h}$ laisse stable $\mathscr{S}(\mathfrak{p})$. Soit alors :

$$\mathscr{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}=\{P\in\mathscr{S}(\mathfrak{p});\ \forall H\in\mathfrak{h},\ \mathrm{ad}\,H.P=0\}.$$

Notons $\beta:\mathscr{S}(\mathfrak{g})\to\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ la symétrisation ([2], 2.4.5). Alors on a :

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g})=\beta(\mathscr{S}(\mathfrak{p}))\oplus\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}^f.$$

(Utiliser [2], 2.4.15), d'où on déduit :

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}=\beta(\mathscr{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}})\oplus\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}^f.$$

Donc l'application $\tilde{\beta}:\mathscr{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}\to\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}^f$ obtenue par passage au quotient de β est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Posons, pour $H\in\mathfrak{h}$, $r(H)=\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}(\mathrm{ad}\,H)$ et supposons que $\mathfrak{h}$ soit l'ensemble des points fixes d'une involution σ de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ admet alors pour supplémentaire invariant $\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g},\ \sigma(X)=-X\}$. M. Duflo a montré [3], généralisant un résultat de A. Lichnerowicz [4] que dans ce cas, pour $f=1/2.r$, l'algèbre $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}^{r/2}$ est abélienne.

Nous nous proposons de montrer que si, en outre $\mathfrak{g}$ est nilpotente (ce qui implique $r=0$), $\tilde{\beta}$ est un isomorphisme d'algèbres. Ceci généralise un résultat de J. Dixmier (*cf.* corollaire 2 ci-dessous) dont cette Note s'inspire.

Remarque. — Ce résultat peut être faux si l'on ne suppose pas $\mathfrak{g}$ nilpotente. Exemple : $\mathfrak{g}=\mathscr{S}l(2,\mathbb{R})$ de base X, Y, H avec $[H, X]=2X$, $[H, Y]=-2Y$, $[X, Y]=H$ et $\mathfrak{h}=\mathbb{R}.H$, $\mathfrak{p}=\mathbb{R}.X+\mathbb{R}.Y$.

I. Dans ce paragraphe nous montrons quelques lemmes préliminaires, énonçons le théorème et en donnons quelques conséquences.

Lemme 1. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente,* $\dim\mathfrak{g}<\infty$, σ *une involution de* $\mathfrak{g}$. *Alors il existe une suite d'idéaux :* $\{0\}=\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{g}_n=\mathfrak{g}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tels que les* $\mathfrak{g}_i$ *soient invariants par* σ *et tels que* $\dim\mathfrak{g}_i=i$.

Démonstration. — Par récurrence sur dim $\mathfrak{g}=n$. Le résultat est vrai pour $n=1$. Supposons $n>1$. Remarquons que si M est un sous-espace vectoriel stable par σ on a $M=M\cap\mathfrak{h}\oplus M\cap\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ sont les espaces propres de σ associés aux valeurs propres $+1$ et -1. En particulier, si C est le centre de $\mathfrak{g}$, $\sigma(C)=C$ donc il existe une droite vectorielle k de C stable par σ. Soit $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/k$ la projection canonique. σ induit une involution σ' de $\mathfrak{g}'$. Par hypothèse de récurrence, on a une suite $\{0\}=\mathfrak{g}'_0\subset\mathfrak{g}'_1\ldots\subset\mathfrak{g}'_{n-1}=\mathfrak{g}'$ d'idéaux de $\mathfrak{g}'$ invariants par σ' tels que dim $\mathfrak{g}'_i=i$. Soient alors $\mathfrak{g}_1=k$, $\mathfrak{g}_i=\pi^{-1}(\mathfrak{g}'_{i-1})2\leqq i\leqq n$. Les $\mathfrak{g}_i$ conviennent.

Lemme 2. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $3\leqq\dim\mathfrak{g}<\infty$, σ une involution de $\mathfrak{g}$; alors il existe $\mathfrak{l}$, un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 stable par σ, tel que le centre de $\mathfrak{l}$ soit au moins de dimension 2.*

Démonstration. — Choisissons (lemme 1) une suite $\{0\}=\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{g}_n=\mathfrak{g}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ σ-invariants tels que dim $\mathfrak{g}_i=i$. Soit alors $Z(\mathfrak{g}_2)$ le centralisateur de $\mathfrak{g}_2$ dans $\mathfrak{g}$. C'est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension au plus 1. En effet, si X_1, X_2 est une base de $\mathfrak{g}_2$ telle que $X_1\in\mathfrak{g}_1$, on a pour :

$$X\in\mathfrak{g},\quad [X,X_1]=0\qquad\text{et}\qquad [X,X_2]=\lambda(X).X_1$$

où λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ et $Z(\mathfrak{g}_2)=\mathrm{Ker}(\lambda)$. En outre $Z(\mathfrak{g}_2)$ est stable par σ car $\mathfrak{g}_2$ l'est.

1^er cas : codim $Z(\mathfrak{g}_2)=1$. Alors $\mathfrak{l}=Z(\mathfrak{g}_2)$ convient.

2^e cas : codim $Z(\mathfrak{g}_2)=0$. Alors $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}_{n-1}$ convient.

Remarque. — Pour un tel idéal $\mathfrak{l}$ on a soit $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{h}$ soit $\mathfrak{l}\subset\mathfrak{p}$ (car $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}$ et codim $\mathfrak{l}=1$).

Lemme 3. — *Soient* A, B, C, D *des algèbres et a, b, c, d des applications linéaires faisant commuter le diagramme : $d\circ c=a\circ b$:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ {\scriptstyle b}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d} \\ C & \xrightarrow{c} & D \end{array}$$

et telles que c, d, a soient des morphismes d'algèbres, alors pour x, x' dans C *on a*

$$b(x.x')-b(x).b(x')\in\mathrm{Ker}(a).$$

En particulier, si a est injectif, b est un morphisme d'algèbres.

La démonstration du lemme 3 est sans difficulté.

Voici le résultat principal de cette Note. Il est démontré au paragraphe 2.

Théorème. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie, σ une involution de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ les ensembles des points fixes de σ et de $-\sigma$, alors la bijection :*

$$\beta:\quad \mathscr{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}\to\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{h}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}$$

obtenue par passage au quotient de la symétrisation est un isomorphisme d'algèbres.

Corollaire 1. — *Sous les hypothèses du théorème, l'algèbre $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}$ est abélienne (cf. [4]) et factorielle.*

Démonstration. — L'algèbre $\mathscr{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}$ est abélienne et factorielle : La factorialité se montre comme dans ([1], Corollaire du théorème 1).

Corollaire 2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie, alors la symétrisation $\beta:\mathscr{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\to\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ est un isomorphisme d'algèbres entre l'ensemble des éléments* *invariants de l'algèbre symétrique de* $\mathfrak{g}$ *et le centre de son algèbre enveloppante* (*cf.* [1], théorème).

La démonstration est basée sur l'application du théorème à l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ munie de l'involution $\sigma : \sigma(X, Y) = (Y, X)$ pour $(X, Y) \in \mathfrak{g}$.

II. Dans ce paragraphe, nous donnons la démonstration du théorème.

Nous procédons par récurrence sur $n = \dim \mathfrak{g}$. Si $n \leqq 2$, le résultat est vrai car $\mathfrak{g}$ est abélienne et $\beta : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres.

Supposons que $n \geqq 3$ et soit C le centre de $\mathfrak{g}$; pour appliquer l'hypothèse de récurrence, nous distinguons quatre cas.

1^er^ *cas* : $C \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$. — Soient alors k une droite vectorielle de $C \cap \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/k$, $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ la projection canonique et $\theta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$, $\eta : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{S}(\mathfrak{g}')$ les morphismes que l'on en déduit. Si β (resp. β') est la symétrisation de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) on a $\theta \circ \beta = \beta' \circ \eta$. Soit σ' l'involution de $\mathfrak{g}'$ déduite de σ, on a $\mathfrak{h}' = \pi(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{p}' = \pi(\mathfrak{p})$. On a l'égalité : $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\eta \circ \mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}(\pi(X)) \circ \eta$ où ad désigne ici les actions adjointes dans les algèbres symétriques. Comme $\eta / \mathcal{S}(\mathfrak{p})$ est bijectif sur $\mathcal{S}(\mathfrak{p}')$, η est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{p}')^{\mathfrak{h}'}$. De meme on a l'égalité : $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\theta \circ \mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}(\pi(X)) \circ \theta$ où ad désigne ici les actions adjointes dans les algèbres enveloppantes; donc $\theta(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{h}'}$. Mais on a aussi $\theta(\mathcal{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}').\mathfrak{h}'$, car $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$, et par passage au quotient on définit un morphisme d'algèbre θ; on obtient donc le diagramme commutatif (D) :

$$(\mathrm{D}) : \quad \begin{tikzcd} \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}).\mathfrak{h} \arrow[r, "\dot\theta"] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{h}'}/\mathcal{U}(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{h}'} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}').\mathfrak{h}' \\ \mathcal{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}} \arrow[u, "\dot\beta"] \arrow[r, "\eta"] & \mathcal{S}(\mathfrak{p}')^{\mathfrak{h}'} \arrow[u, "\dot\beta'"'] \end{tikzcd}$$

On sait que η, $\dot\beta$, $\dot\beta'$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels et que η, $\dot\beta'$, $\dot\theta$ sont des morphismes d'algèbres (hypothèse de récurrence). On en déduit que $\dot\theta$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels puis que $\dot\beta$ est un isomorphisme d'algèbres.

2^e^ *cas* : $C \subset \mathfrak{p}$ et $\dim C \geqq 2$. — Soient k une droite vectorielle de C et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/k$. Les constructions faites dans le premier cas sont encore valables, mais comme $\eta / \mathcal{S}(\mathfrak{p})$ n'est pas injectif, on ne peut pas affirmer que η soit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}$ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{p}')^{\mathfrak{h}'}$; on a seulement : $\eta(\mathcal{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{p}')^{\mathfrak{h}'}$. On a donc encore le diagramme (D) commutatif où l'on sait que β et β' sont des isomorphismes d'espaces vectoriels et que η, $\dot\beta'$, $\dot\theta$ sont des morphismes d'algèbres.

Soient, maintenant, f et g deux éléments fixés de $\mathcal{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}$ et $a = \dot\beta^{-1}(\dot\beta(fg) - \dot\beta(f)\dot\beta(g))$; on a $\dot\beta(a) \in \operatorname{Ker}\dot\theta$ (lemme 3), donc $a \in \operatorname{Ker}\eta$ car $\dot\beta$ et $\dot\beta'$ sont bijectifs. Or :

$$\operatorname{Ker}\eta = \mathcal{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}} \cap \mathcal{S}(\mathfrak{p}).k = \mathcal{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}}.k \quad \text{car } k \subset C.$$

Comme $\dim C \geqq 2$, on peut choisir k de sorte que les éléments de k ne divisent pas a; en effet, $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ étant factoriel, à un facteur scalaire près, a n'a qu'un nombre fini de diviseurs. On obtient alors $a = 0$ donc $\dot\beta(fg) = \dot\beta(f)\dot\beta(g)$. Ce qui prouve que $\dot\beta$ est un isomorphisme d'algèbres.

3^e^ *cas* : $C \subset \mathfrak{p}$ *et* $\dim C = 1$. — Soit alors $\mathfrak{l}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ comme dans le lemme 2. Deux sous-cas sont possibles.

(*a*) *Si* $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{p}$. — Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{l}$, σ' la restriction de σ à $\mathfrak{l}$, on a $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. Notons η l'injection de $\mathcal{S}(\rho)^{b}$ dans $\mathcal{S}(\rho')^{b}$. La démonstration de ce cas résulte encore de l'étude du diagramme (D).

(*b*) *Si* $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{h}$. — Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{l}$, σ' la restriction de σ à $\mathfrak{l}$, on a $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}$. Notons C′ le centre de $\mathfrak{l}$ et montrons que l'on a les résultats suivants :

(i) $C' \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$;

(ii) $\mathscr{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \subset \mathscr{S}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}}$,

(iii) $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \subset \mathscr{U}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}}$ et $\mathscr{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}} \subset \mathscr{S}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})^{\mathfrak{h}}$.

En effet, supposons par l'absurde que $C' \cap \mathfrak{h} = \{0\}$, on en déduit $C' \subset \mathfrak{p}$ car $C' = \mathfrak{l} \cap Z(\mathfrak{l})$ est un idéal σ-invariant. Soit alors $X \in C' \setminus C$, ce qui est possible car $\dim C' \geqq 2$ et $\dim C = 1$; soit $Y \in \mathfrak{p}$ tel que $Y \notin \mathfrak{l}$ ce qui est possible car $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{l}$; alors d'une part $[X, Y] \in C'$ car C′ est un idéal, en particulier $[X, Y] \in \mathfrak{p}$, d'autre part $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ car $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$, on en déduit $[X, Y] = 0$ car $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$. Mais X commute déjà avec tous les éléments de $\mathfrak{l}$; s'il commute avec Y on a $X \in C$. Contradiction. Donc $C' \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$. Ceci prouve (i).

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $X_1, \ldots, X_{n-1}$ soit une base de $\mathfrak{l}$. Tout élément de $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$ s'écrit $f(X_1, \ldots, X_n)$ où f est un polynôme à n variables et si $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ on a pour $X \in \mathfrak{h}$, $\operatorname{ad} X . f(X_1, \ldots, X_n) = 0$, soit :

$$\sum_{i=1}^{n} [X, X_i] . f'_i(X_1, \ldots, X_n) = 0.$$

Prenons par exemple $X = X_0 \in C' \cap \mathfrak{h}$ tel que $X_0 \neq 0$; ceci est possible d'après (i). On a alors $[X_0, X_1] = \ldots = [X_0, X_{n-1}] = 0$ mais $[X_0, X_n] \neq 0$ sinon on aurait $X_0 \in C$ d'où $X_0 \in \mathfrak{p}$ ce qui est incompatible avec $X_0 \in \mathfrak{h}$ et $X_0 \neq 0$. Donc $f'_n(X_1, \ldots, X_n) = 0$ et f ne dépend que des $n-1$ premières variables. Ceci prouve (ii).

(iii) est une conséquence immédiate de (ii) :

$$\mathscr{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{h}} = \mathscr{S}(\mathfrak{p}) \cap \mathscr{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathscr{S}(\mathfrak{p}) \cap \mathscr{S}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}} = \mathscr{S}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})^{\mathfrak{h}}$$

et

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \beta(\mathscr{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}) = \beta(\mathscr{S}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}}) = \mathscr{U}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}}.$$

Notons η la bijection canonique de $\mathscr{S}(\mathfrak{p})$ sur $\mathscr{S}(\mathfrak{p}')^{\mathfrak{h}'}$ et θ la bijection canonique de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ sur $\mathscr{U}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}'}$ [grace à (iii)]. On a :

$$\theta(\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g}) . \mathfrak{h}) = \mathscr{U}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}} \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g}) . \mathfrak{h} = \mathscr{U}(\mathfrak{l})^{\mathfrak{h}} \cap \mathscr{U}(\mathfrak{l}) . \mathfrak{h};$$

donc θ passe au quotient en un morphisme d'algèbres bijectif $\dot{\theta}$ tel que le diagramme (D) soit commutatif. Dans ce diagramme $\dot{\beta}$, $\dot{\beta}'$ désignent encore les bijections obtenues à partir des symétrisations. On sait que $\dot{\theta}$, η, $\dot{\beta}'$ sont des isomorphismes d'algèbres. Donc $\dot{\beta}$ est un isomorphisme d'algèbres. Ceci achève la démonstration du théorème.

(*) Reçue le 13 juillet 1982, acceptée le 20 septembre 1982.

[1] J. Dixmier, *Archiv der Mathematik*, X, 1959, p. 321-326.
[2] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
[3] M. Duflo, *Comptes rendus*, 289, série A, 1979, p. 135.
[4] A. Lichnerowicz, *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 3548.

20, *rue César Franck*, 91120 *Palaiseau*.