JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 59, 211–253 (1984)

Analyse Harmonique sur les espaces symétriques nilpotents

YVES BENOIST

ERA 1020 du C.N.R.S., UER de Mathématiques, 2, Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Communicated by M. Vergne

Received February 15, 1984

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe, H l'ensemble des points fixes d'une involution de G; nous donnons la formule de Plancherel de la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ et en déduisons que tout opérateur différentiel G-invariant sur G/H non nul admet une solution élémentaire tempérée H-invariante.

Let G be a connected simply connected nilpotent Lie group and H the set of fixed points of an involution of G; we give the Plancherel formula of the representation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ and infer from it the existence of an H-invariant tempered elementary solution for every nonzero G-invariant differential operator on G/H.

Contents

INTRODUCTION

R. Penney décrit dans [Pe] ce qu'est une formule de Plancherel "abstraite." Nous obtenons, pour un groupe de Lie nilpotent G connexe et simplement connexe muni d'une involution σ, la formule de Plancherel "concrète" de la représentation de G dans $L^2(G/H)$ où H est l'ensemble des points fixes de σ.

Pour cela, nous étudions l'ensemble des vecteurs-distributions H-invariants de chaque représentation unitaire irréductible π de G lorsque $\bar{\pi} = \pi^\sigma$. Nous montrons que c'est une droite vectorielle (prop. 2.3). Nous montrons alors une égalité entre "un coefficient généralisé" de π et la transformée de Fourier d'une mesure invariante sur une orbite de H dans $\mathfrak{h}^\perp$ associée à π (th. 3.2.2).

0022-1236/84 $3.00

Cette égalité est l'analogue de la "formule du caractère" (th. 7.4 de [Ki 1]). La formule de Plancherel s'en déduit (th. 3.4).

Un outil important pour ce travail est l'existence de polarisations réelles invariantes par σ en tout point f de $\mathfrak{h}^{\perp}$. Les démonstrations que nous donnons ne se généralisent donc pas au cas G exponentiel (remarque 2.3.2).

Nous donnons quelques applications de ces résultats d'analyse et de synthèse harmoniques:

Nous décrivons les fonctions généralisées de type positif sur G, invariantes par H; elles s'obtiennent, par un procédé élémentaire, à partir des fonctions généralisées de type positif, invariantes par H, sur l'espace vectoriel $\mathfrak{p} = \{X \in \mathscr{G} / X^{\sigma} = -X\}$ (prop. 3.3.2). Ceci généralise le théorème de [S].

La formule de Plancherel nous permet aussi d'obtenir des renseignements sur les opérateurs différentiels G-invariants sur G/H:

(1) L'algèbre de ces opérateurs est isomorphe à l'algèbre des polynômes H-invariants sur $\mathfrak{p}$ (prop. 4.2.3). Nous avions déjà montré ce résultat dans [B1] par une méthode entièrement algébrique.

(2) Ces opérateurs ont une solution élémentaire tempérée et H-invariante (prop. 4.3.2 et corol. 4.3.3). Pour montrer ce dernier résultat, nous appliquons une technique due à M. Raïs [Ra2] et basée sur un théorème de M. F. Atiyah et I. N. Bernstein [At, Ber].

Dans le dernier paragraphe, nous précisons le calcul d'un caractère de l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur G/H (prop. 4.2.2) qui nous a permis d'obtenir ces résultats: nous obtenons une formule (prop. 4.4) qui est l'analogue du th. 7.2 de [Ki1].

Cet article est la suite logique de [B3]; il a été annoncé dans [B2].

Je remercie M. Duflo qui m'a suggéré d'entreprendre ce travail.

1. Rappels

1.1. *Involution dans un groupe de Lie nilpotent*

Dans *TOUT* cet article, on désigne par G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$; pour tout élément g de G, on note $\lambda(g)$, $\rho(g)$, $\gamma(g)$ et J les difféomorphismes de G donnés, pour x dans G, par: $\lambda(g)x = gx$, $\rho(g)x = xg^{-1}$, $\gamma(g)x = gxg^{-1}$, et $J(x) = x^{-1}$; Notons exp l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G et m la multiplication de G. Rappelons que Ad (resp. ad) désignent l'action adjointe de G (resp. $\mathscr{G}$) dans $\mathscr{G}$. Identifions $\mathscr{G}$ à l'espace tangent $T_e(G)$ à G en l'élément neutre e. Pour g dans G et X dans $\mathscr{G}$, on a les formules: $\operatorname{Ad} g = D_e(\gamma(g))$, et $\operatorname{Ad}(\exp X) = e^{\operatorname{ad} X}$.

On désigne par σ une involution de G (i.e., un automorphisme de G tel que $\sigma^2 = Id$), on note encore σ l'automorphisme de $\mathscr{G}$ dérivé de σ. Pour X dans

$\mathscr{G}$ (resp. g dans G), on notera parfois X^σ (resp. g^σ) l'image de X (resp. g) par σ.

On note alors H l'ensemble des points fixes de cette involution: $H = G_\sigma = \{g \in G/g^\sigma = g\}$, on note aussi $P = \{g \in G/g^\sigma = g^{-1}\}$, $\mathfrak{h} = \{X \in \mathscr{G}/X^\sigma = X\}$, et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathscr{G}/X^\sigma = -X\}$. Soit p la projection canonique de G sur G/H et $\dot{\exp}$ l'application de $\mathfrak{p}$ dans G/H donnée par:

$$\forall X \in \mathfrak{p}, \qquad \dot{\exp}\, X = p(\exp X).$$

On a l'égalité $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathscr{G}$ et les inclusions: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$. Un tel couple (G, H) est appelé un espace symétrique nilpotent.

La proposition 2.1 de [B3] donne pour les groupes nilpotents:

PROPOSITION 1.1. *Avec les notations ci-dessus,*

(a) *l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}$ sur H;*

(b) *l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur P;*

(c) *la multiplication m est un difféomorphisme de $H \times P$ sur G;*

(d) *l'application $\dot{\exp}$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur G/H;*

(e) *soit dP une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{p}$, alors $\dot{\exp}_*(dP)$ est une mesure G-invariante sur G/H.*

(le (*e*) provient d'un calcul de la dérivée de $\dot{\exp}$ (cf. [He 1, th. IV.4.1]))

On gardera ces notations pendant *TOUT* cet article.

1.2. *Notations*

1.2.1

Soit M une variété (paracompacte), on note $\mathscr{C}(M)$ (resp. $\mathscr{E}(M)$) l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^∞) de M à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $\mathscr{K}(M)$ (resp. $\mathscr{D}(M)$) le sous-espace de $\mathscr{C}(M)$ (resp. $\mathscr{E}(M)$) formé des fonctions à support compact. On note $\mathscr{M}^\infty(M)$ l'espace des densités C^∞ sur M et $\mathscr{M}_c^\infty(M)$ le sous-espace des densités C^∞ á support compact. On munit ces ensembles de leur topologie usuelle.

Soit $\mathscr{D}'(M)$ l'espace des distributions sur M et $\xi'(M)$ l'espace des distributions à support compact. Soient ξ dans $\mathscr{D}'(M)$ et ϕ dans $\mathscr{D}(M)$, on note (ξ, ϕ) ou $(\xi(x), \phi(x))$, avec une lettre muette (notation abusive), l'image de ϕ par ξ. La distribution conjuguée de ξ est notée $\bar{\xi}$. On a donc, par définition $(\bar{\xi}, \bar{\phi}) = \overline{(\xi, \phi)}$. Soit $\mathscr{F}(M)$ l'espace des fonctions généralisées sur M (i.e., le dual de $\mathscr{M}_c^\infty(M)$); pour T dans $\mathscr{F}(M)$ et μ dans $\mathscr{M}_c^\infty(M)$, on note de même (T, μ) ou $(T(x), \mu(x))$ l'image de μ par T et $\bar{T}$ la fonction généralisée conjuguée de T. Soit f un difféomorphisme de M, on note $f_*(\xi)$ la distribution image de ξ par f: $\forall \phi \in \mathscr{D}(M)$ $(f_*(\xi), \phi) = (\xi, \phi \circ f)$; et on note

$T \circ f$ la fonction généralisée image réciproque de T par f: $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$, $(T \circ f, \mu) = (T, f_*(\mu))$. On pose $f_*(T) = T \circ f^{-1}$.

On note $\mathrm{OD}(M)$ le sous-espace vectoriel de l'espace des endomorphismes de $\mathscr{D}(M)$ formé des opérateurs différentiels linéaires à coefficients C^∞ sur M. Celui-ci s'identifie aussi, de façon canonique, à un espace d'endomorphismes de $\mathscr{F}(M)$. Pour D dans $\mathrm{OD}(M)$, on note ${}^tD$ l'endomorphisme de $\mathscr{D}'(M)$ transposé de D: $\forall \phi \in \mathscr{D}(M)$, $\forall \xi \in \mathscr{D}'(M)$ $({}^tD(\xi), \phi) = (\xi, D(\phi))$.

Si on fait le choix d'une densité C^∞ μ sur M qui ne s'annule pas, on peut identifier $\mathscr{D}(M)$ à $\mathcal{M}_c^\infty(M)$ grâce à l'application $\phi \to \phi\mu$. L'espace des distributions $\mathscr{D}'(M)$ s'identifie alors à l'espace des fonctions généralisées $\mathscr{F}(M)$. Pour D dans $OD(M)$, ${}^tD$ s'identifie à un élément de $\mathrm{OD}(M)$ (encore noté ${}^tD$) défini par $\forall \phi, \psi \in \mathscr{D}(M)$ $\int_M {}^tD(\phi)\, \psi d\mu = \int_M \phi D(\psi)\, d\mu$.

1.2.2

Soient $\mathscr{G}_\mathbb{C}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathscr{G}$ ($\mathscr{G}_\mathbb{C} = \mathscr{G} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$) et $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$ l'algèbre enveloppante de $\mathscr{G}_\mathbb{C}$. On note J l'antiautomorphisme principal de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$; c'est l'unique antiautomorphisme de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$ tel que $\forall X \in \mathscr{G}_\mathbb{C}$, $J(X) = -X$. Pour U dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$, on note parfois $\check{U} = J(U)$ et $U^* = \overline{J(U)}$ (rappelons que J désigne aussi l'inversion dans G). On note ad et Ad les actions adjointes de $\mathscr{G}_\mathbb{C}$ et G dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$.

A X dans $\mathscr{G}$, on associe la distribution ξ_X sur G de support $\{e\}$ définie par $\forall \phi \in \mathscr{D}(G)$, $(\xi_X, \phi) = (d/dt)(\phi(\exp tX))|_{t=0}$.

On peut prolonger cette application en un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$ dans l'algèbre $\mathscr{D}'_{(e)}(G)$ des distributions sur G de support $\{e\}$ muni de la convolution.

On note ξ_U l'image d'un élément U de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$.

On note ${}^G(\mathrm{OD}(G))$ (resp. $(\mathrm{OD}(G))^G$) l'algèbre des opérateurs différentiels D sur G (linéaires à coefficients C^∞) invariants à gauche (resp. à droite) (i.e., qui vérifient $\forall g \in G$, $(\lambda(g)_*) \circ D \circ (\lambda(g^{-1})_*) = D$ (resp. $(\rho(g)_*) \circ D \circ (\rho(g^{-1})_*) = D$)). A X dans $\mathscr{G}$, on associe un opérateur différentiel L_X (resp. R_X) invariant à gauche (resp. à droite) défini par, pour ϕ dans $\mathscr{D}(G)$ $L_X(\phi)(g) = (d/dt)(\phi(g \exp tX))|_{t=0}$ (resp. $R_X(\phi)(g) = (d/dt)(\phi(\exp(-tX)\, g))|_{t=0}$) on peut prolonger cette application en un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$ dans l'algèbre ${}^G(\mathrm{OD}(G))$ (resp. $(\mathrm{OD}(G))^G$). On note L_U(resp. R_U) l'image d'un élément U de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$.

Pour U dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$, on a les formules suivantes qui relient ξ_U, L_U, et R_U (ϕ désigne un élément arbitraire de $\mathscr{D}(G)$ et η un élément de $\mathscr{D}'(G)$)

(1) $R_U(\phi) = \xi_U * \phi$ et $L_U(\phi) = \phi * (J_*(\xi_U))$,

(2) $\xi_U = {}^tL_U(\delta_{(e)}) = (J_*({}^tR_U))(\delta_{(e)})$ où $\delta_{(e)}$ désigne la masse de Dirac en e; ceci signifie que $(\xi_U, \phi) = (L_U(\phi))(e) = (R_U(\phi \circ J))(e)$.

(3) $R_U = J_* \circ L_U \circ J_*$,

(4) $J_*(\xi_U) = \xi_{\check{U}}$,

(5) ${}^tR_U(\eta) = (J_*(\xi_U)) * \eta$ et ${}^tL_U(\eta) = \eta * \xi_U$; donc si on choisit, comme densité, une mesure de Haar, on a les identifications: ${}^tR_U = R_{\check{U}}$ et ${}^tL_U = L_{\check{U}}$.

En outre, si U est un produit d'éléments de $\mathscr{G}$: $U = X_1 \cdots X_n$, on a

(6) $(\xi_U, \phi) = (d^n/dt_1 \cdots dt_n)\, \phi(\exp(t_1X_1) \cdots \exp(t_nX_n)))|_{t_1 = \cdots = t_n = 0}$,

(7) $(L_U(\phi))(g) = (d^n/dt_1 \cdots dt_n)(\phi(g \exp(t_1X_1) \cdots \exp(t_nX_n)))|_{t_1 = \cdots = t_n = 0}$,

(8) $(R_U(\phi))(g) = (d^n/dt_1 \cdots dt_n)(\phi(\exp(-t_1X_1) \cdots \exp(-t_nX_n)\, g))|_{t_1 = \cdots = t_n = 0}$.

On a aussi, pour g dans G,

(9) $L_{Adg U} = (\rho(g)_*) \circ L_U \circ (\rho(g^{-1})_*)$,

(10) $\xi_{\mathrm{Adg}\, U} = \gamma(g)_*(\xi_U)$.

Remarque. Si G n'était pas nilpotent, il faudrait modifier certaines de ces formules en introduisant la fonction module de G et préciser le choix du produit de convolution.

1.2.3

Soit Π une représentation (unitaire continue) de G d'espace $\mathscr{H}_\Pi$; on note $\bar{\Pi}$ la représentation conjuguée de Π et Π^σ la représentation $\Pi \circ \sigma$. Soient $\mathscr{H}_\Pi^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation muni de sa structure naturelle de Fréchet: $\mathscr{H}_\Pi^\infty = \{v \in \mathscr{H}_\Pi /$l'application $g \to \Pi(g)\, v$ est $C^\infty\}$, et $\mathscr{H}_\Pi^{-\infty}$ l'espace des vecteurs $C^{-\infty}$($\mathscr{H}_\Pi^{-\infty}$ est l'antidual de $\mathscr{H}_\Pi^\infty$, i.e., l'espace des formes antilinéaires continues sur $\mathscr{H}_\Pi^\infty$); on note $D\Pi$ l'action de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}_\Pi^\infty$ ou $\mathscr{H}_\Pi^{-\infty}$: si $X \in \mathscr{G}$, on a $D\Pi(X)\, v = (d/dt)\, \Pi(\exp(tX))\, v|_{t=0}$ ($v \in \mathscr{H}_\Pi^\infty$).

Pour a, b dans $\mathscr{H}_\Pi^{-\infty}$, on définit le coefficient $T^\Pi_{a,b}$ de a et b qui est une fonction généralisée sur G par:

$$\forall \mu \in \mathscr{M}_c^\infty(G), \qquad (T^\Pi_{a,b}, \mu) = \langle \Pi(\mu)\, a, b\rangle$$

ce qui a un sens car $\Pi(\mu)\, a \in \mathscr{H}_\Pi^\infty$.

On note $(\mathscr{H}_\Pi^{-\infty})^H = \{a \in \mathscr{H}_\Pi^{-\infty} / \forall h \in H\ \Pi(h)\, a = a\}$.

Un élément a dans $\mathscr{H}_\Pi^{-\infty}$ est dit cyclique si ses translatés engendrent un sous-espace dense dans $\mathscr{H}_\Pi^{-\infty}$. Un couple (Π, a) est alors appelé une représentation cyclique. Deux représentations cycliques (Π, a) et (Π', a') sont dites équivalentes si il existe une équivalence unitaire de Π et Π' qui envoie a sur a'.

On note $\mathscr{F}^+(G)$ le cône des fonctions généralisées de type positif sur G: $\mathscr{F}^+(G) = \{T \in \mathscr{F}(G) / \forall \mu \in \mathscr{M}_c^\infty(G)\ \ (T, \overline{J_*(\mu)} * \mu) \geqslant 0\}$. On rappelle que l'application $(\Pi, a) \to T^{\Pi}_{a,a}$ définit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations cycliques de G sur $\mathscr{F}^+(G)$ (cf. [Sc2]).

On note $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G muni de sa structure borélienne habituelle; on fait un choix mesurable de représentants et on identifiera abusivement chaque classe avec son représentant.

1.2.4

Soient L un sous-groupe de G, c un caractère unitaire de L et $\mu_{G,L}$ une mesure G-invariante sur G/L; celle-ci existe car G est nilpotent. Soit $L^2(G, L, c)$ le Hilbert quotient de $\{f: G \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\forall (g, l) \in G \times L\ \ f(gl) = c(l)^{-1} f(g)$ et $\int_{G/L} |f|^2\, d\mu_{G,L} < \infty\}$ par le sous-espace des fonctions presque partout nulles, et $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c)$ la représentation de G "induite de L à G du caractère c" dont l'espace est $L^2(G, L, c)$ et dont l'action est donnée par: pour g, x dans G, $(\Pi(g) f)(x) = f(g^{-1}x)$.

La description des vecteurs C^∞ des représentations induites est due à N. S. Poulsen. Donnons en ici un cas particulier.

Proposition 1.2.4. *L'espace $(L^2(G, L, c))^\infty$ des vecteurs C^∞ de la représentation induite $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c)$ est:*

$$(L^2(G, L, c))^\infty = \{f \in \mathscr{E}(G)/(\mathrm{i})\ \forall (g, l) \in G \times L\ \ f(gl) = c(1)^{-1} f(g)$$

$$(\mathrm{ii})\ \forall U \in \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}}) \int_{G/L} |R_U(f)|^2\, d\mu_{G,L} < \infty\}.$$

L'action de l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})$ est donnée par

$$\forall U \in \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}}), \forall f \in (L^2(G, L, c))^\infty, \qquad D\Pi(U) f = R_U(f).$$

Cette formule permet de ramener le calcul de l'action de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})$ à des calculs de dérivées de fonctions réelles de variable réelle: R_U est la dérivation invariante à droite associée à U (cf. 1.2.2). Remarquons que si f vérifie (i) alors $R_U(f)$ le vérifie aussi et l'intégrale en (ii) a un sens.

Démonstration. (cf. [Po, th. 5.1] ou [Ca, th. 3.1]).

Exemple de représentation cyclique. Soient Π la représentation induite de H à G du caractère trivial de H: $\Pi = \mathrm{Ind}_H^G(1)$ et δ l'élément de $\mathscr{H}_{\Pi}^{-\infty}$ défini par $\forall v \in \mathscr{H}_{\Pi}^{\infty}\ \ \delta(v) = \overline{v(e)}$ (ce qui a un sens grâce à la proposition précédente); on vérifie que δ est un vecteur cyclique et que $\delta \in (\mathscr{H}_{\Pi}^{-\infty})^H$.

1.3. *Désintégration de $L^2(G/H)$*

Nous présentons ici les résultats de [B3] dans le cadre où ils nous seront utiles. Nous gardons les notations précédentes: G est nilpotent.

PROPOSITION 1.3.1 ([B3, th.3.1 et 4.1.2]). *Soit (Π, a) une représentation cyclique de G telle que $a \in (\mathscr{H}_\Pi^{-\infty})^H$ (par exemple, $\Pi = \mathrm{Ind}_H^G(1)$ et $a = \delta$, cf.* 1.2.4); *alors*

(a) *Π est sans multiplicité (i.e., le commutant de cette représentation est commutatif)*

(b) *il existe une mesure positive bornée m sur $\hat{G}$ et une famille mesurable $(a_\pi)_{\pi\in\hat{G}}$ de vecteurs $C^{-\infty}(a_\pi \in \mathscr{H}_\pi^{-\infty})$ telles que (Π, a) est équivalente à $(\int_{\hat{G}}^{\oplus} \pi\, dm(\pi), \int_{\hat{G}}^{\oplus} a_\pi\, dm(\pi))$ et on a $\bar{\pi} = \pi^\sigma$ m-presque partout et $a_\pi \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H$ m-presque partout.*

Soit v dans $\mathscr{H}_\Pi^\infty$, on peut écrire de façon "unique": $v = \int_{\hat{G}}^{\oplus} v_\pi\, dm(\pi)$, on a $v_\pi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$ m-presque sûrement; la première partie de (b) affirme qu'alors
l'application $\pi \to \langle a_\pi, v_\pi\rangle$ est dans $L^1(\hat{G}, m)$ et que $\langle a, v\rangle = \int_{\hat{G}} \langle a_\pi, v_\pi\rangle\, dm(\pi)$ (cf. [Pe, Corol. C1]).

Notons $(\hat{G})_\sigma = \{\pi \in \hat{G} / \pi^\sigma = \bar{\pi}\}$. Notons θ la bijection construite par A. Kirillov qui à chaque orbite de la représentation coadjointe de G dans le dual $\mathscr{G}^*$ de $\mathscr{G}$ associe un élément de $\hat{G}$: θ: $G\backslash\mathscr{G}^* \to \hat{G}$ (cf. [Be]). Remarquons que l'action coadjointe restreinte à H laisse stable l'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{h}$ et notons $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ l'espace des orbites.

PROPOSITION 1.3.2 ([B3, §4.3]) *Avec les notations ci-dessus,*

(a) *l'application ζ: $H\backslash\mathfrak{h}^\perp \to (\hat{G})_\sigma$ donnée par $\omega \to \zeta_\omega = \theta(G\omega)$ est une bijection.*

(b) *Soit (Π, a) comme dans la proposition* 1.3.1, *il existe une mesure positive bornée ν sur $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ et une famille mesurable $(a_\omega)_{\omega\in H\backslash\mathfrak{h}^\perp}$ de vecteurs $C^{-\infty}$ H-invariants $(a_\omega \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H)$ telles que (Π, a) est équivalente à $(\int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}^{\oplus} \zeta_\omega\, d\nu(\omega), \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}^{\oplus} a_\omega\, d\nu(\omega))$.*

PROPOSITION 1.3.3 ([B3, corol. 4.4.2]). *Avec les notations précédentes,*

(a) *pour tout π dans $\hat{G}$, on a* $\dim((\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H) \leqslant 1$

(b) *si on a égalité, alors π est dans $(\hat{G})_\sigma$.*

La réciproque du (b) est l'objet de la partie 2.

2. Vecteurs $C^{-\infty}$ H-invariants

Dans ce chapitre, nous cherchons à construire, quand c'est possible (cf. prop. 1.3.3.), un élément de $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H$, pour π dans $\hat{G}$; pour cela nous avons besoin d'une réalisation commode de π.

2.1. *Bases supplémentaires*

2.1.1

Définition. Soient $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\mathscr{L}$ une sous-algèbre de $\mathscr{G}$, on appelle base supplémentaire de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{G}$, une famille $(X_1,..., X_d)$ de vecteurs de $\mathscr{G}$ formant une base d'un sous-espace supplémentaire de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{G}$ telle que, pour $i = 0,..., d-1$, le sous-espace $\mathscr{G}_i = \mathbb{R}X_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}X_d \oplus \mathscr{L}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{G}$.

Une telle famille existe toujours (cf. [Ra1, §5.3.a]) ou la démonstration de notre lemme 2.3.1b))

Lemme 2.1. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe, L un sous-groupe connexe de G, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{L}$ les algèbres de Lie associées;*

(a) *si $(X_1,..., X_d)$ est une base supplémentaire de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{G}$, alors l'application*

$$\Phi\colon \mathbb{R}^d \times \mathscr{L} \to G$$

$$(t_1,..., t_d, X) \to \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_d X_d) \exp(X)$$

est un difféomorphisme et l'application $(\exp^{-1}) \circ \Phi$ *de* $\mathbb{R}^d \times \mathscr{L}$ *dans* $\mathscr{G}$ *est une bijection polynômiale à inverse polynômiale.*

(b) *Soient dt et dL des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathscr{L}$, alors $\Phi_*(dt \otimes dL)$ est une mesure de Haar sur G (à droite et à gauche),*

(c) *en particulier, l'application*

$$\dot{\Phi}\colon \mathbb{R}^d \to G/L$$

$$(t_1,..., t_d) \to \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_d X_d)\, L$$

est un difféomorphisme et $\dot{\Phi}_*(dt)$ est une mesure G-invariante sur G/L.

Démonstration. Ces résultats sont bien connus ([Ra1, §5.3.d] et formule de Campbell–Hausdorf). Ils se démontrent par récurrence sur $\operatorname{codim}(\mathscr{L})$: on se ramène au cas $\operatorname{codim}(\mathscr{L}) = 1$: $\mathscr{L}$ est alors un idéal de $\mathscr{G}$.

2.1.2

Rappelons que l'on peut montrer l'existence de polarisations réelles en tout point f de $\mathscr{G}^*$ par le procédé suivant dû à M. Vergne [Be, Chap. IV]: Soient

$(\mathscr{G}_i)_{0<i<n}$ un drapeau d'idéaux de $\mathscr{G}$ (i.e., $\dim(\mathscr{G}_i)=i$ et $\mathscr{G}_i \subset \mathscr{G}_{i+1}$), B_f la forme bilinéaire alternée associée à f (c'est la forme définie sur $\mathscr{G} \times \mathscr{G}$ par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$), B_i la restriction de B_f à $\mathscr{G}_i \times \mathscr{G}_i$ et $N(B_i)$ le noyau de B_i, alors l'espace $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{n} N(B_i)$ est une polarisation réelle en f (i.e., un sous-espace totalement isotrope maximal pour B_f *et* une sous-algèbre de $\mathscr{G}$).

Appelons "polarisation de M. V." (de M. Vergne) en f, une polarisation réelle construite par ce procédé.

LEMME 2.1.2. *Notons $C_i(\mathscr{G})$ la suite centrale ascendante de $\mathscr{G}$ (i.e., $C_0(\mathscr{G}) = \{0\}$ et $C_{i+1}(\mathscr{G})/C_i(\mathscr{G})$ est le centre de $\mathscr{G}/C_i(\mathscr{G})$). Si $\mathscr{G}$ (nilpotente) n'est pas abélienne, alors toute polarisation $\mathfrak{b}$ de M. V. vérifie la propriété suivante: $\mathfrak{b} \cap C_2(\mathscr{G}) \neq C_1(\mathscr{G})$ (rappelons que le centre $C_1(\mathscr{G})$ est inclus dans toutes les polarisations).*

Démonstration. Soit $(\mathscr{G}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ le drapeau d'idéaux qui sert à la construction de $\mathfrak{b}$ et i_0 tel que $\mathscr{G}_{i_0} \not\subset C_1(\mathscr{G})$ et $\mathscr{G}_{i_0-1} \subset C_1(\mathscr{G})$; alors $\mathscr{G}_{i_0}$ est un idéal abélien de $\mathscr{G}$ et $B_{i_0} = 0$ donc $\mathscr{G}_{i_0} = N(B_{i_0})$ et l'inclusion $[\mathscr{G}, \mathscr{G}_{i_0}] \subset \mathscr{G}_{i_0-1} \subset C_1(\mathscr{G})$ prouve que $\mathscr{G}_{i_0} \subset C_2(\mathscr{G})$. Donc $\mathfrak{b} \cap C_2(\mathscr{G}) \not\subset C_1(\mathscr{G})$.

2.1.3

Soient f dans $\mathscr{G}^*$, $\Omega = Gf$, $\mathfrak{b}$ une polarisation en f, B le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$, χ_f le caractère de B tel que $d\chi_f = if|_{\mathfrak{b}}$ et $\pi_\Omega = \mathrm{Ind}_B^G(\chi_f)$; π_Ω est une représentation unitaire irréductible associée à f. L'espace de la représentation est $L^2(G, B, \chi_f)$. Par construction on a $\pi_\Omega = \theta(\Omega)$.

Soit $(X_1, ..., X_d)$ une base supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathscr{G}$, dt une mesure de Haar sur $\mathbb{R}^d$ et $d\mu_{G,B} = \dot{\Phi}_*(dt)$ sa mesure image sur G/B qui est G-invariante (lemme 2.1.c)), alors l'application

$$W: L^2(G, B, \chi_f) \to L^2(\mathbb{R}^d)$$

$$\phi \to \psi = W(\phi): \psi(t_1, ..., t_d) = \phi(\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_d X_d))$$

est bien définie et est unitaire. L'application inverse est donnée par $W^{-1}(\psi) = \phi$ avec $\phi(\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_d X_d)\, b) = \chi_f(b)^{-1}\ \psi(t_1, ..., t_d)$ $(b \in B)$

Notons π_f la représentation de G dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ définie par, pour g dans G, $\pi_f(g) = W \circ \pi_\Omega(g) \circ W^{-1}$.

Notons $\mathrm{OD}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^d)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux de $\mathbb{R}^d$. On a ([Co, th.3.1]; voir aussi [Ki1, th.7.1]):

PROPOSITION 2.1.3. *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus (G est nilpotent).*

(a) *On a l'égalité*: $(D\pi_f)(\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})) = \mathrm{OD}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^d)$.

(b) *L'espace des vecteurs C^∞ de la représentation π_f est l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées muni de sa topologie usuelle.*

2.2. *Polarisations invariantes par une involution*

LEMME 2.2.1. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ et σ une involution de $\mathscr{G}$. Soit f dans $\mathscr{G}^*$ telle que $f \circ \sigma = \pm f$, alors*

(a) *il existe des polarisation (de M.V.) en f stables par σ,*

(b) *pour une telle polarisations $\mathfrak{b}$, on peut trouver une base supplémentaire $(X_1,..., X_d)$ de $\mathfrak{b}$ dans $\mathscr{G}$ telle que, pour tout $i = 1,..., d$, $\sigma(X_i) = \pm X_i$.*

Démonstration. (a) On construit tout d'abord, par récurrence sur $n = \dim \mathscr{G}$, un drapeau $(\mathscr{G}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ d'idéaux de $\mathscr{G}$ stables par σ:

Un tel drapeau existe quand $n = 1$.

Supposons $n > 1$. Soit k une droite vectorielle du centre de $\mathscr{G}$ stable par σ; une telle droite existe car le centre de $\mathscr{G}$ est stable par σ. Soit $\pi: \mathscr{G} \to \mathscr{G}' = \mathscr{G}/k$ la projection canonique. L'involution σ induit une involution σ' de $\mathscr{G}'$. Par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau $(\mathscr{G}'_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ d'idéaux de $\mathscr{G}'$ stables par σ'. Posons alors $\mathscr{G}_0 = \{0\}$ et $\mathscr{G}_i = \pi^{-1}(\mathscr{G}'_{i-1})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Les idéaux $\mathscr{G}_i$ conviennent.

Soit $\mathfrak{b}$ la polarisation de M. V. en f construite à partir d'un tel drapeau. Montrons que $\mathfrak{b}$ est stable par σ. Soient B_f la forme bilinéaire associée à f et B_i la restriction de B_f à $\mathscr{G}_i \times \mathscr{G}_i$. Le noyau $N(B_i)$ de B_i est stable par σ, car $N(B_i)$ est l'intersection de $\mathscr{G}_i$ et de son orthogonal pour B_f qui sont stables par σ. Donc $\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^{n} N(B_i)$ est stable par σ.

(b) Montrons que si $\mathscr{L}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{G}$ stable par σ, on peut trouver une base supplémentaire $(X_1,..., X_d)$ de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{G}$ telle que, pour tout i, $\sigma(X_i) = \pm X_i$.

Par récurrence sur $n = \dim \mathscr{G}$; le résultat est clair si $n = 1$.

Supposons $n > 1$. Notons $C^k(\mathscr{G})$ la suite centrale descendante de $\mathscr{G}$: $C^0(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$ et $C^k(\mathscr{G}) = [\mathscr{G}, C^{k-1}(\mathscr{G})]$.

Supposons que l'on ait $\mathscr{L} + [\mathscr{G}, \mathscr{G}] = \mathscr{G}$, on prouve alors par récurrence sur k que $\mathscr{L} + C^k(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$, en effet, cette égalité implique que $\mathscr{L} + [\mathscr{L} + C^k(\mathscr{G}), \mathscr{L} + C^k(\mathscr{G})] = \mathscr{G}$, d'où $\mathscr{L} + C^{k+1}(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$. On en déduit $\mathscr{L} = \mathscr{G}$. Dans ce cas, le résultat est trivial.

Supposons maintenant que $\mathscr{L} + [\mathscr{G}, \mathscr{G}] \neq \mathscr{G}$; l'idéal $\mathscr{L} + [\mathscr{G}, \mathscr{G}]$ est stable par σ, on peut donc trouver un hyperplan $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ stable par σ et le contenant et un élément X_1 de $\mathscr{G} - \mathscr{G}'$ tel que $\sigma(X_1) = \pm X_1$; $\mathscr{G}'$ est un idéal de $\mathscr{G}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au couple $(\mathscr{G}', \mathscr{L})$:

il existe une base $(X_2,..., X_d)$ supplémentaire à $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{G}'$ telle que $\sigma(X_i) = \pm X_i$ $(2 \leqslant i \leqslant d)$. La famille $(X_1,..., X_d)$ convient.

Remarque 2.2.2. Si on ne suppose pas G nilpotent, le (a) du lemme 2.2.1 peut être mis en défaut. Example: Soit $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie complètement résoluble de dimension 4, de base T, X, Y, Z avec $[T, X] = -X$, $[T, Y] = Y$, $[X, Y] = Z$ et Z dans le centre de $\mathscr{G}$. Soit σ l'involution de $\mathscr{G}$ définie par $\sigma(T) = -T$, $\sigma(X) = Y$, $\sigma(Y) = X$ et $\sigma(Z) = -Z$; on a $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(X + Y)$ et $\mathfrak{p} = \mathbb{R}T \oplus \mathbb{R}(X - Y) \oplus \mathbb{R}Z$. Soit $f = Z^*$ (f est dans $\mathfrak{h}^\perp$). Dans cette situation, f n'a pas de polarisation, même complexe, stable par σ.

En effet, comme $\mathscr{G}(f) = \mathbb{R}T \oplus \mathbb{R}Z$, une telle polarisation $\mathfrak{b}$ serait de dimension (complexe) 3; elle devrait vérifier $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}_\mathbb{C}$. On ne peut pas avoir l'égalité $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_\mathbb{C}$ car $\mathfrak{p}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathscr{G}$, donc $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{h}$ et, par conséquent, $\mathfrak{b}$ est inclus dans l'orthogonal de $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ pour B_f qui est $(\mathfrak{h}^{B_f})_\mathbb{C} = \mathbb{C}T \oplus \mathbb{C}(X + Y) \oplus \mathbb{C}Z$. Or cet espace n'est pas une sous-algèbre de $\mathscr{G}_\mathbb{C}$. On aboutit à une contradiction.

2.3. *Construction d'un élément de* $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H$

PROPOSITION 2.3. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe muni d'une involution σ. H, P, $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{p}$ sont comme en* 1.1. *Soient Ω dans $G\backslash\mathscr{G}^*$ une orbite de la représentation coadjointe et π_Ω une représentation unitaire irréductible qui lui est associée. Alors*

(a) $(\mathscr{H}_{\pi_\Omega}^{-\infty})^H$ *est de dimension* 1 *ou* 0 *selon que Ω rencontre ou ne rencontre pas $\mathfrak{h}^\perp$.*

(b) *Si $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \varnothing$, soient f dans $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp$ et $\omega = Hf$; soient $\mathfrak{b}$ une polarisation en f invariante par σ, B le groupe connexe associé, χ_f le caractère de B tel que $d\chi_f = if|_\mathfrak{b}$ et $\pi_\omega = \mathrm{Ind}_B^G(\chi_f)$. Soit $\mu_{H,H\cap B}$ une mesure H-invariante sur $H/H \cap B$. Alors l'application*

$$a_\omega : \mathscr{H}_{\pi_\omega}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi \longrightarrow \int_{H/H\cap B} \bar{\phi}(\dot{h})\, d\mu_{H,H\cap B}(\dot{h})$$

est bien définie, est continue, et l'élément a_ω de $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty}$ qu'elle définit est dans $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$.

Démonstration. Le (a) est une conséquence du (b) et des propositions 1.3.2 et 1.3.3.

(b) Soit $(X_1,..., X_d)$ une base supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathscr{G}$ qui vérifie $\sigma(X_i) = \pm X_i$ pour $i = 1,..., d$ (lemme 2.2.1). Soient $(X_{j_1},..., X_{j_k})$ la sous-famille des vecteurs X_i qui vérifient $\sigma(X_i) = X_i$, π_f la représentation de G dans

$L^2(\mathbb{R}^d)$ construite à partir de la base $(X_1, \ldots, X_d)$ et W l'opérateur d'entrelacement de π_ω et π_f comme en 2.1.3.

Montrons que $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_k})$ est une base supplémentaire de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}$. Il suffit pour cela de remarquer que $\mathbb{R}X_{j_l} \oplus \mathbb{R}X_{j_{l+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}X_{j_k} \oplus \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ est une sous-algèbre car elle égale $\mathfrak{h} \cap (\mathbb{R}X_{j_l} \oplus \mathbb{R}X_{j_l+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}X_d \oplus \mathfrak{b})$

Soit alors E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$: $E = \{(t_1, \ldots, t_d)/$ si $t_i \neq 0$ alors il existe l tel que $i = j_l\}$. Soit Φ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^d \times \mathfrak{b}$ sur G donné par $\Phi(t_1, \ldots, t_d, X) = \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_d X_d) \exp(X)$. Par restriction, Φ induit un difféomorphisme de $E \times (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b})$ sur H et l'image d'une mesure de Lebesgue sur $E \times (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b})$ est une mesure de Haar sur H (lemme 2.1(a) et (b)). Le difféomorphisme $\dot{\Phi}$ de $\mathbb{R}^d$ sur G/B obtenu par passage au quotient de Φ induit un difféomorphisme de E sur $H/H \cap B$ (considéré comme sous-ensemble de G/B) et on peut choisir une mesure de Lebesgue dE sur E telle que $(\dot{\Phi}|_E)_*(dE) = \mu_{H, H \cap B}$.

La proposition 2.1.3 prouve que dE définit un élément a_f de $\mathscr{H}_{\pi_f}^{-\infty}$ grâce à la formule: $\forall \psi \in \mathscr{H}_{\pi_f}^{\infty} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $a_f(\psi) = \int_E \overline{\psi(e)}\, dE(e)$.

Remarquons que, pour ϕ dans $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{\infty}$, on a: $\forall g \in G$, $\forall b \in H \cap B$ $\phi(gb) = \phi(g)$ car $\chi_f(b) = 1$ $(f \in \mathfrak{h}^\perp)$. Donc, par restriction et passage au quotient, ϕ définit une application $\dot{\phi}$ de classe C^∞ sur $H/H \cap B$. Calculons:

$$\begin{aligned} a_f(W(\phi)) &= \int_E \bar{\phi}(\exp(s_1 X_{j_1}) \cdots \exp(s_k X_{j_k}))\, dE(s_1, \ldots, s_k) \\ &= \int_E (\bar{\dot{\phi}} \circ (\dot{\Phi}|_E))(s_1, \ldots, s_k)\, dE(s_1, \ldots, s_k) \\ &= \int_{H/H \cap B} \bar{\dot{\phi}}(\dot{h})\, d\mu_{H, H \cap B}(\dot{h}) \\ &= \int_{H/H \cap B} \bar{\phi}(\dot{h})\, d\mu_{H, H \cap B}(\dot{h}). \end{aligned}$$

Ceci prouve que cette dernière intégrale à un sens et définit un élément a_ω de $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty}$: $a_\omega = (W^{-1})_{-\infty}(a_f)$.

Calculons, pour ϕ dans $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{\infty}$ et h dans H:

$$\begin{aligned} \langle a_\omega, \pi_\omega(h)\, \phi \rangle &= \int_{H/H \cap B} \bar{\phi}(h^{-1}\dot{k})\, d\mu_{H, H \cap B}(\dot{k}) \\ &= \int_{H/H \cap B} \bar{\phi}(\dot{k})\, d\mu_{H, H \cap B}(\dot{k}) = \langle a_\omega, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Donc, pour tout h dans H, on a $\pi_\omega(h)\, a_\omega = a_\omega$; ce qui signifie que a_ω est dans $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$.

Remarque. L'orbite $\Omega = Gf$, munie de la 2-forme obtenue par transport de B_f, est une variété symplectique. La sous-variété $\omega = Hf$ de Ω est une sous-variété lagrangienne. La construction que l'on vient de faire doit être rapproché de la quantification d'une sous-variété lagrangienne (cf. [We, § 10]).

3. Formule de Plancherel

3.1. *Mesures invariantes sur des orbites*

3.1.1

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et ρ une représentation unipotente de G dans V; soit $\mathcal{O}$ une orbite de G dans V. Comme G est nilpotent, cette orbite est fermée [Be, p. 6 et 7] et admet une mesure G-invariante $\beta_{\mathcal{O}}$; celle-ci est unique à un scalaire positif près; elle définit une mesure positive (encore notée $\beta_{\mathcal{O}}$) sur V.

On dit qu'une mesure positive μ sur V est à croissance lente, s'il existe un entier positif m tel que, si $\| \ \|$ est une norme sur V, on a $\int_V (1 + \|x\|^2)^{-m} \, d\mu(x) < \infty$. Il est équivalent de dire que μ définit une distribution tempérée [Sc1, th. VII, p. 242].

Proposition 3.1.1. *La mesure $\beta_{\mathcal{O}}$ est à croissance lente dans V.*

Démonstration (cf. [Ra1, §5.4]).

Notations. Soit V un espace vectoriel de dimension finie, on note F la transformation de Fourier de l'ensemble des distributions tempérées sur V sur l'ensemble des fonctions généralisées tempérées sur V^* de sorte que, si μ est une mesure bornée sur V, on ait $F(\mu)(f) = (\mu(x), e^{if(x)})(f \in V^*)$. On note $\bar{F}$ l'application conjuguée de F.

3.1.2

Nous aurons besoin en 3.2.2 d'une description plus précise d'une orbite et de sa mesure invariante dans un cas bien particulier.

Soient σ une involution de G, H, P, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ comme en 1.1. Soient f dans $\mathfrak{h}^{\perp}$, $\mathfrak{b}$ une polarisation réelle en f stable par σ, B_f la forme bilinéaire associée à f et $\mathscr{G}(f)$ l'annulateur de f dans $\mathscr{G}$ qui est aussi le noyau de B_f. Notons $\mathfrak{h}(f) = \mathscr{G}(f) \cap \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}(f) = \mathscr{G}(f) \cap \mathfrak{p}$. Pour un sous-espace vectoriel M de $\mathscr{G}$, on note M^f son orthogonal pour B_f.

Lemme 3.1.2. (a) *On a* $\mathfrak{h}^f = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}(f)$ *et* $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b})^f = \mathfrak{b} + \mathfrak{h}$.

(b) $(B \cap H)f = f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$.

(c) *L'application* $\psi: B \cap H/H(f) \to f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$ *qui se déduit de* (b) *est un difféomorphisme et, si* $\mu_{B \cap H, H(f)}$ *est une mesure invariante sur* $B \cap H/H(f)$, *son image* $\psi_*(\mu_{B \cap H, H(f)})$ *est une mesure de Lebesgue sur* $f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$.

Démonstration. (a) Comme $f \in \mathfrak{h}^{\perp}$ et que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$, les espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ sont isotropes pour B_f. Soit $X = X_1 + X_2$ dans $\mathscr{G}$ avec X_1 dans $\mathfrak{h}$ et X_2 dans $\mathfrak{p}$; on a les équivalences:

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{h}^f &\Leftrightarrow \forall X_1' \in \mathfrak{h}, && f([X_1 + X_2, X_1']) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X_1' \in \mathfrak{h}, && f([X_2, X_1']) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X_1' \in \mathfrak{h}, \forall X_2' \in \mathfrak{p}, && f([X_2, X_1' + X_2']) = 0 \\ &\Leftrightarrow X_2 \in \mathfrak{p}(f). \end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{h}^f = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}(f)$. On montrerait de même: $\mathfrak{p}^f = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}(f)$. On a $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b})^f = \mathfrak{h}^f + \mathfrak{b}^f = (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}(f)) + \mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{b}$ car $\mathfrak{b}$ est totalement isotrope maximal pour B_f et donc $\mathfrak{p}(f) \subset \mathscr{G}(f) \subset \mathfrak{b}$.

(b) Soit X dans $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ et v dans $\mathfrak{b} + \mathfrak{h}$, alors $(\exp(X) f - f)(v) = \sum_{k=1}^{n} (1/k!)\, f((-\operatorname{ad} X)^k v) = 0$ car $(\operatorname{ad} X)^k v \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + \mathfrak{h}$ et $f([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + \mathfrak{h}) = \{0\}$. Donc $\exp(X) f \in f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$. L'égalité $B \cap H = \exp(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h})$ (prop. 1.1) permet de conclure: $(B \cap H) f \subset f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$.

Calculons la dimension de l'orbite $(B \cap H) f$; rappelons pour cela que, si M est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{G}$, on a l'égalité $\dim M + \dim M^f = \dim \mathscr{G} + \dim(M \cap \mathscr{G}(f))$. Pour $M = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$, on a $\dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}) + \dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{h}) = \dim \mathscr{G} + \dim \mathfrak{h}(f))$. On en déduit que $\dim((B \cap H) f) = \dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}) - \dim(\mathfrak{h}(f)) = \dim \mathscr{G} - \dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{h}) = \dim((\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp})$. Donc $(B \cap H) f$ est ouverte dans $f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$.

Les orbites de $B \cap H$ dans $f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$ sont ouvertes, elles sont donc fermées. Comme $f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$ est connexe, on a $(B \cap H) f = f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$.

(c) L'orbite $(B \cap H) f$ est fermée donc ψ est un difféomorphisme (th. 3.2 et prop. 4.3 du chap. II de [He1]). Il suffit maintenant de montrer qu'une mesure de Lebesgue λ sur $f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$ est invariante sous l'action de $B \cap H$: pour tout g dans $B \cap H$, $\operatorname{Ad}^*(g)$ définit par restriction une application affine de $f + (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$ dont l'application linéaire tangente est la restriction de $\operatorname{Ad}^*(g)$ à $(\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}$, or $\operatorname{Ad}^*(g)$ est un endomorphisme unipotent et donc $\det|_{(\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^{\perp}}(\operatorname{Ad}^*(g)) = 1$. D'où $(\operatorname{Ad}^*(g))_*(\lambda) = \lambda$, λ est invariante sous l'action de $B \cap H$.

3.2. *Calcul d'un coefficient*

3.2.1

Soit σ une involution de G; H, P, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}$, p et $\dot{\exp}$ sont comme en 1.1. Soient ω dans $H \backslash \mathfrak{h}^{\perp}$ et ζ_{ω} dans $(\hat{G})_{\sigma}$ la classe de représentations qui lui est associée (cf. prop. 1.3.2); soient f dans ω, $\mathfrak{b}$ une polarisation en f invariante par σ (cf. lemme 2.2.1), B le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et χ_f le caractère de B tel que $d\chi_f = if|_{\mathfrak{b}}$.

Choisissons une mesure $\mu_{G,B}$ G-invariante sur G/B; ceci nous permet de considérer la représentation $\pi_\omega = \mathrm{Ind}_B^G(\chi_f)$ et surtout d'identifier $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^\infty$ à un sous-espace de $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty}$; la repprésentation π_ω est dans la classe ζ_ω.

Choisissons une mesure $\mu_{H,H\cap B}$ H-invariante sur $H/H\cap B$; ceci nous permet de construire un élément non nul a_ω de $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$ grâce à la proposition 1.3.3.

Remarquons que, si a est dans $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$ et si m est dans $\mathscr{M}_c^\infty(G)$ et vérifie $p_*(m) = 0$, on a $\pi_\omega(m)\, a = 0$; on peut donc définir, pour μ dans $\mathscr{M}_c^\infty(G/H)$, $\tilde{\pi}_\omega(\mu)\, a$ comme étant la valeur commune des $\pi_\omega(m)\, a$ lorsque $p_*(m) = \mu$.

Choisissons une mesure $\mu_{G,H}$ G-invariante sur G/H; ceci nous permet de définir, pour tout ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$, $\tilde{\pi}_\omega(\phi)\, a$ comme égal à $\tilde{\pi}_\omega(\phi\mu_{G,H})\, a$.

Les trois choix précédents de mesure permettent, grâce à une propriété de transitivité [Be, Chap. V, §1.2], d'en déduire une mesure $\mu_{G,H\cap B}$ G-invariante sur $G/H\cap B$ puis une mesure $\mu_{B,H\cap B}$ B-invariante sur $B/H\cap B$. Les formules qui relient ces mesures sont: pour tout ϕ dans $\mathscr{D}(G/H\cap B)$

$$\int_{G/H\cap B} \phi(g)\, d\mu_{G,H\cap B}(g) = \int_{G/H} \left(\int_{H/H\cap B} \phi(gh)\, d\mu_{H,H\cap B}(h) \right) d\mu_{G,H}(g)$$

et

$$\int_{G/H\cap B} \phi(g)\, d\mu_{G,H\cap B}(g) = \int_{G/B} \left(\int_{B/H\cap B} \phi(gb)\, d\mu_{B,H\cap B}(b) \right) d\mu_{G,B}(g).$$

On a alors

Lemme 3.2.1. *Soit ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$, alors $\tilde{\pi}_\omega(\phi)\, a_\omega$ est l'élément de $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^\infty = (L^2(G, B, \chi_f))^\infty$ donné par, pour g dans G,*

$$(\tilde{\pi}_\omega(\phi)\, a_\omega)(g) = \int_{B/H\cap B} \phi(gb)\, \chi_f(b)\, d\mu_{B,H\cap B}(b).$$

Remarquons que, pour b dans B et h dans $H\cap B$, on a $\chi_f(bh) = \chi_f(b)$; ceci donne un sens à l'intégrale.

Démonstration. Soit v dans $(L^2(G, B, \chi_f))^\infty$, on a les égalités

$$\begin{aligned}\langle \pi_\omega(\phi)\, a_\omega, v\rangle &= \int_{G/H} \phi(g) \langle \pi_\omega(g)\, a_\omega, v\rangle\, d\mu_{G,H}(g)\\ &= \int_{G/H} \phi(g)\, \langle a_\omega, \pi_\omega(g^{-1})\, v\rangle\, d\mu_{G,H}(g)\end{aligned}$$

$$= \int_{G/H} \left(\int_{H/H \cap B} \bar{v}(gh)\, \phi(gh)\, d\mu_{H,H\cap B}(h) \right) d\mu_{G,H}(h)$$

car $\phi(g) = \phi(gh)$

$$= \int_{G/H \cap B} \bar{v}(g)\, \phi(g)\, d\mu_{G,H\cap B}(g)$$

$$= \int_{G/B} \left(\int_{B/H \cap B} \bar{v}(gb)\, \phi(gb)\, d\mu_{B,H\cap B}(b) \right) d\mu_{G,B}(g)$$

$$= \int_{G/B} \left(\int_{B/H \cap B} \phi(gb)\, \chi_f(b)\, d\mu_{B,H\cap B}(b) \right) \bar{v}(g)\, d\mu_{G,B}(g)$$

car $v(gb) = \chi_f^{-1}(b)\, v(g)$.

On en déduit, pour presque tout g, $(\pi_\omega(\phi)\, a_\omega)(g) = \int_{B/H\cap B} \phi(gb)\, \chi_f(b)\, d\mu_{B,H\cap B}(b)$. Ces deux fonctions sont C^∞, elles sont donc égales partout.

3.2.2

Soit $T_\omega = T^{\pi_\omega}_{a_\omega, a_\omega}$ le coefficient du couple (a_ω, a_ω); on a $\forall h \in H$, $T_\omega \circ \rho(h) = T_\omega$ donc il existe une fonction généralisée S_ω sur G/H telle que $S_\omega \circ p = T^{\pi_\omega}_{a_\omega, a_\omega}$ et on a, pour ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$, $(S_\omega, \phi\mu_{G,H}) = \langle \tilde{\pi}_\omega(\phi)\, a_\omega, a_\omega \rangle$.

Soit λ une mesure de Lebesgue sur un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on appelle mesure duale de λ, la mesure de Lebesgue λ^* sur V^*, le dual de V, telle que, si ϕ dans $\mathscr{S}(V)$ et $\hat{\phi}$ dans $\mathscr{S}(V^*)$ sont liées par l'égalité $\forall l \in V^*$, $\hat{\phi}(l) = \int_V e^{-il(x)}\, \phi(x)\, d\lambda(x)$, alors on a la formule inverse $\forall x \in V$, $\phi(x) = \int_{V^*} e^{il(x)}\, \hat{\phi}(l)\, d\lambda^*(l)$. Par exemple, si $V = V^* = \mathbb{R}$, la mesure duale de $k\,dx$ est $(2\pi k)^{-1} dx$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$.

Remarquons que les trois choix de mesure de 3.2.1 permettent de construire de façon canonique une mesure β_ω H-invariante sur $\omega = Hf$: la mesure $\mu_{B,H\cap B}$ sur $B/H \cap B$ est adaptée à une mesure de Lebesgue λ_1 sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h} \approx (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. De même la mesure $\mu_{G,H}$ est adaptée à une mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathscr{G}/\mathfrak{h}$. Et comme $(\mathscr{G}/\mathfrak{h})/((\mathfrak{b} + \mathfrak{h})/\mathfrak{h}) \approx \mathscr{G}/(\mathfrak{b} + \mathfrak{h})$, on en déduit une mesure de Lebesgue λ_3 sur $\mathscr{G}/(\mathfrak{b} + \mathfrak{h})$. La mesure λ_4 sur $(\mathscr{G}/(\mathfrak{b} + \mathfrak{h}))^* \approx (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^\perp$ duale de λ_3 donne, grâce au lemme 3.1.2, une mesure $\mu_{H\cap B, H(f)}$ $H \cap B$-invariante sur $H \cap B/H(f)$; en utilisant la propriété de transitivité des mesures invariantes avec les mesures $\mu_{H,H\cap B}$ et $\mu_{H\cap B, H(f)}$, on construit une mesure $\mu_{H,H(f)}$ H-invariante sur $H/H(f)$. Celle-ci fournit la mesure β_ω $H-$ invariante sur ω que l'on cherche.

THÉORÈME 3.2.2. *Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe muni d'une involution σ. Gardons les notations précédentes et notons dP la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{p}$ telle que*

$\dot{\exp}_*(dP) = \mu_{G,H}$ (*cf. prop.* 1.1.e)). *Soient* ω *dans* $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$, ζ_ω *la classe de représentations qui lui est associée* (*prop.* 1.3.2), π *une représentation de* G *dans cette classe. Rappelons que* $\dim((\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H) = 1$ (*prop.* 2.3.).

(a) *Alors à tout élément* a *de* $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H$, *on peut associer une mesure positive* β H*-invariante sur* $\mathfrak{h}^\perp$ *par le procédé suivant: soit* S *la fonction généralisée sur* G/H *définie par l'égalité* $S \circ p = T^\pi_{a,a}$ (*cf. ci-dessus*), *alors la fonction généralisée sur* $\mathfrak{p}$ $S \circ \dot{\exp}$ *est la transformée de Fourier d'une mesure positive* β H*-invariante sur* $\mathfrak{h}^\perp$ *de support* ω (*cette dernière est tempérée d'après* 3.1.1): $S \circ \dot{\exp} = F(\beta)$. *C'est cette mesure qu'on associe à* a.

(b) *Si on fait les choix de mesure du début de ce paragraphe et si on prend* $\pi = \pi_\omega = \mathrm{Ind}_B^G(\chi_f)$ *et* $a = a_\omega$, *alors la mesure que l'on associe à* a_ω *est la mesure* β_ω *construite ci-dessus. Ce qui signifie que, pour tout* ϕ *dans* $\mathscr{D}(\mathfrak{p})$, *on a l'égalité*:

$$\langle \tilde{\pi}_\omega(\phi \circ \dot{\exp}^{-1})\, a_\omega, a_\omega \rangle = \int_{\mathfrak{h}^\perp} \left(\int_{\mathfrak{p}} e^{il(X)}\, \phi(X)\, dP(X) \right) d\beta_\omega(l).$$

Remarque. Si, dans (a), on remplace a par λa, où λ est un nombre complexe, alors la mesure β associée est remplacée par $|\lambda|^2 \beta$. Donc si on connait la mesure associée à a, a n'est déterminé qu'à un scalaire de module 1 près.

Démonstration. Le (a) se déduit de (b). Montrons (b). Soit $I = (S_\omega, (\phi \circ \dot{\exp}^{-1})\, \mu_{G,H}) = \langle \tilde{\pi}_\omega(\phi \circ \dot{\exp}^{-1})\, a_\omega, a_\omega \rangle$. On a $I = \int_{H/H\cap B} (\int_{B/H\cap B} (\phi \circ \dot{\exp}^{-1})\, (hb)\, \chi_f(b)\, d\mu_{B,H\cap B}(b))\, d\mu_{H,H\cap B}(h)$ par définition de a_ω et d'après le lemme 3.2.1. Appliquons la proposition 1.1 au groupe B: l'application $\dot{\exp}$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}$ sur $B/B \cap H$ et il existe une mesure de Lebesgue dB sur $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}$ telle $\dot{\exp}_*(dB) = \mu_{B,H\cap B}$. Soit $J(h) = \int_{B/H\cap B} (\phi \circ \dot{\exp}^{-1})(hb)\, \chi_f(b)\, d\mu_{B,H\cap B}(b)$. On a

$$J(h) = \int_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}} (\phi \circ \dot{\exp}^{-1})(h\, \dot{\exp}\, X)\, \chi_f(\exp X)\, dB(X)$$

$$= \int_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}} \phi(Adh\, X)\, e^{if(X)}\, dB(X)$$

car $\dot{\exp}(\mathrm{Adh}\, X) = h\, \dot{\exp}\, X$.

Soient $\mathscr{E}$ un supplémentaire de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{p}$: $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}) \oplus \mathscr{E}$ et dS la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{E}$ telle que $dP = dB \otimes dS$. Le dual $\mathscr{E}^*$ de $\mathscr{E}$ s'identifie à $(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p} + \mathfrak{h})^\perp = (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})^\perp$. Soit dS^* la mesure duale de la mesure dS. On vérifie aisément que dS^* est la mesure que nous avons appelée λ_4. Pour tout ψ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{p})$, l'application définie sur $\mathscr{E}$ par $Y \to$

$\int_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}} \psi(X+Y)\,dB(X)$ est dans $\mathscr{S}(\mathscr{E})$; sa transformée de Fourier est alors dans $\mathscr{S}(\mathscr{E}^*)$ et la formule d'inversion donne:

$$\int_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}} \psi(X)\,dB(X) = \int_{\mathscr{E}^*} dS^*(l) \left(\int_{\mathscr{E}} dS(Y)\, e^{il(Y)} \left(\int_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}} \psi(X+Y)\,dB(X)\right)\right)$$

$$= \int_{\mathscr{E}^*} dS^*(l) \left(\int_{\mathscr{E}} dS(Y) \left(\int_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}} e^{il(X+Y)}\, \psi(X+Y)\,dB(X)\right)\right)$$

car l est dans $\mathscr{E}^* = (\mathfrak{b}+\mathfrak{h})^\perp$ et X dans $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{p}\subset\mathfrak{b}+\mathfrak{h}$; d'où

$$\int_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}} \psi(X)\,dB(X) = \int_{(\mathfrak{b}+\mathfrak{h})^\perp} dS^*(l) \left(\int_{\mathfrak{p}} e^{il(Z)}\, \psi(Z)\,dP(Z)\right).$$

Donc

$$J(h) = \int_{(\mathfrak{b}+\mathfrak{h})^\perp} dS^*(l) \left(\int_{\mathfrak{p}} \phi(\mathrm{Adh}\, Z)\, e^{i(l+f)(Z)}\,dP(Z)\right)$$

$$= \int_{(\mathfrak{b}+\mathfrak{h})^\perp} dS^*(l) \left(\int_{\mathfrak{p}} \phi(Z')\, e^{i(l+f)(\mathrm{Adh}^{-1}Z')}\,dP(Z')\right)$$

car comme Adh est un endomorphisme unimodulaire de $\mathfrak{p}$, on a $\det_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Adh}) = 1$. Utilisons maintenant le lemme 3.1.2 qui relie dS^* et $\mu_{H\cap B, H(f)}$; on a

$$J(h) = \int_{H\cap B/H(f)} d\mu_{H\cap B, H(f)}(b) \left(\int_{\mathfrak{p}} \phi(Z')\, e^{i((\mathrm{Ad}^* b)f)(\mathrm{Adh}^{-1}Z')}\,dP(Z')\right)$$

Et par suite:

$$I = \int_{H/H\cap B} d\mu_{H,H\cap B}(h) \left(\int_{H\cap B/H(f)} d\mu_{H\cap B, H(f)} \left(\int_{\mathfrak{p}} \phi(X)\, e^{i((\mathrm{Ad}^*(hb))f)X}\,dP(X)\right)\right)$$

$$= \int_{H/H(f)} d\mu_{H,H(f)}(h) \left(\int_{\mathfrak{p}} \phi(X)\, e^{i((\mathrm{Ad}^* h)f)X}\,dP(X)\right)$$

grâce à la propriété de transitivité des mesures invariantes. Un dernier changement de variable donne $I = \int_\omega d\beta_\omega(l)(\int_{\mathfrak{p}} \phi(X)\, e^{il(X)}\,dP(X))$; ce qui peut s'écrire:

$$\langle \tilde{\pi}_\omega(\phi\circ \exp^{-1})\, a_\omega, a_\omega\rangle = \int_{\mathfrak{h}^\perp} \left(\int_{\mathfrak{p}} \phi(X)\, e^{il(X)}\,dP(X)\right) d\beta_\omega(l).$$

3.3. *Fonctions généralisées H-biinvariantes de type positif*

Le but de ce paragraphe est de décrire les fonctions généralisées de type positif H-biinvariantes sur G. Ceci généralise le théorème de [S].

3.3.1 *Désintégration de mesures invariantes*

On a le résultat bien connu:

Soient G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts, X un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts sur lequel G agit continûment et μ une mesure G-invariante sur X. On suppose que les orbites de G dans X sont localement fermées. Alors

(a) *la structure borélienne quotient sur $G\backslash X$ est standard*;

(b) *il existe une mesure positive ν sur $G\backslash X$ et une famille $(\lambda_\omega)_{\omega\in G\backslash X}$ de mesures positives sur X telles que*

(i) *λ_ω est portée par ω,*

(ii) *pour toute fonction ϕ mesurable positive, l'application $\omega \to \int_\omega \phi|_\omega \, d\lambda_\omega$ est mesurable sur $G\backslash X$ (nous dirons que la famille λ_ω est mesurable)*

(iii) *et on a l'égalité $\int_X \phi(x)\, d\mu(x) = \int_{G\backslash X}(\int_\omega \phi|_\omega \, d\lambda_\omega)\, d\nu(\omega)$;*

(c) *soit ϕ une fonction intégrable sur X, alors, pour ν-presque tout ω, l'application $\phi|_\omega$ est λ_ω-intégrable et l'application $\omega \to \int_\omega \phi|_\omega \, d\lambda_\omega$ est intégrable et on a encore l'égalité ci-dessus*;

(d) *si ν' et $(\lambda'_\omega)_{\omega\in G\backslash X}$ sont d'autres choix de mesures vérifiant* (i), (ii), *et* (iii), *alors il existe une fonction F mesurable et strictement positive telle que $\nu' = F\nu$ et, pour ν-presque tout ω, $\lambda_\omega = F|_\omega \lambda'_\omega$.*

Démonstration. (a) cf. [Ef], (b), (c), et (d) cf. [Bo, Chap. 6, §3, prop. 2, th. 2, et th. 4].

On dit que $(\lambda_\omega)_{\omega\in G\backslash X}$ est la désintégration de μ relative à ν; la classe de la mesure ν est l'image de la classe de la mesure μ par la projection de X sur $G\backslash X$.

Remarques. (1) On montre aisément, grâce à (d), que les λ_ω sont, pour ν-presque tout ω, G-invariantes.

(2) Réciproquement, si on se donne la mesure μ G-invariante sur X et une famille mesurable $(\lambda_\omega)_{\omega\in G\backslash X}$ de mesures G-invariantes non nulles sur les orbites ω, alors il existe une unique mesure ν sur $G\backslash X$ telle que $(\lambda_\omega)_{\omega\in G\backslash X}$ soit la désintégration de μ relative à ν.

3.3.2

G est de nouveau un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe et σ une involution de G; H, P, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}$, p, et exp sont comme en 1.1.

Rappelons que $\mathscr{F}^+(G)$ désigne le cône des fonctions généralisées sur G de type positif et notons:

$$\begin{aligned}
{}^H(\mathscr{F}^+(G)) &= \{T \in \mathscr{F}^+(G)/\forall h \in H \;\; T \circ \lambda(h) = T\}, \\
(\mathscr{F}^+(G))^H &= \{T \in \mathscr{F}^+(G)/\forall h \in H \;\; T \circ \rho(h) = T\}, \\
{}^H(\mathscr{F}^+(G))^H &= (\mathscr{F}^+(G))^H \cap {}^H(\mathscr{F}^+(G)),
\end{aligned}$$

et

$$\mathscr{F}^+(G/H) = \{S \in \mathscr{F}(G/H)/S \circ p \in \mathscr{F}^+(G)\}.$$

On vérifie grâce à 1.2.3 que ${}^H(\mathscr{F}^+(G)) = (\mathscr{F}^+(G))^H = {}^H(\mathscr{F}^+(G))^H$, que l'application $S \to S \circ p$ est une bijection de $\mathscr{F}^+(G/H)$ sur $(\mathscr{F}^+(G))^H$ et que, pour tout S dans $\mathscr{F}^+(G/H)$ et h dans H, on a $S \circ \lambda(h) = S$ (λ désigne ici l'action à gauche de G sur G/H).

Notons $\mathscr{F}^+(\mathfrak{p})$ le cône des fonctions généralisées de type positif sur le groupe additif $\mathfrak{p}$, rappelons que $\mathrm{Ad}(H)$ laisse stable $\mathfrak{p}$ et notons

$${}^H(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p})) = \{R \in \mathscr{F}^+(\mathfrak{p})/\forall h \in H \;\; R \circ \mathrm{Ad}(h) = R\}.$$

PROPOSITION 3.3.2. *L'application de $\mathscr{F}(G/H)$ dans $\mathscr{F}(\mathfrak{p})$ qui à S associe $S \circ \dot{\exp}$ induit une bijection de $\mathscr{F}^+(G/H)$ sur ${}^H(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p}))$.*

Démonstration. (a) *Soit S dans $\mathscr{F}(G/H)$ telle que $S \circ \dot{\exp}$ est dans* ${}^H(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p}))$, montrons que S est dans $\mathscr{F}^+(G/H)$.

Le théorème de Bochner-Schwartz affirme que $S \circ \dot{\exp}$, qui est de type positif, est tempérée et est la transformée de Fourier d'une mesure positive μ tempérée sur $\mathfrak{h}^\perp$ [Sc1, Chap. 6, th. 18, p. 276]. Comme $S \circ \dot{\exp}$ est invariante sous l'action de H, μ l'est aussi. Il existe donc une mesure positive ν sur $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ et une famille mesurable de mesures positives H-invariantes sur $\mathfrak{h}^\perp$ $(\beta_\omega)_{\omega \in H\backslash\mathfrak{h}^\perp}$ telles que β_ω est portée par ω et que, pour tout ϕ dans $L^1(\mathfrak{h}^\perp, \mu)$, on a

$$\int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(f)\, d\mu(f) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} \left(\int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(f)\, d\beta_\omega(f) \right) d\nu(\omega) \qquad \text{(prop. 8.3.1).}$$

Soit, pour tout ω dans $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$, S_ω la fonction généralisée sur G/H telle que $S_\omega \circ \dot{\exp} = F(\beta_\omega)$. Le théorème 3.2.2 prouve que, si S_ω est non nulle, il existe une représentation cyclique (π_ω, a_ω) de G ayant pour coefficient $T^{\pi_\omega}_{a_\omega, a_\omega} = S_\omega \circ p$. En particulier, S_ω est dans $\mathscr{F}^+(G/H)$ (i.e., $\forall \gamma \in \mathscr{M}_c^\infty(G)$, $(S_\omega \circ p, \gamma * \gamma^*) \geqslant 0$).

Calculons, pour α dans $\mathscr{M}_c^\infty(\mathfrak{p})$,

$$(S \circ \dot{\exp}, \alpha) = \int_{\mathfrak{h}^\perp} (F(\alpha))(f)\, d\mu(f)$$

$$= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} \left(\int_{\mathfrak{h}^\perp} (F(\alpha))(f)\, d\beta_\omega(f) \right) d\nu(\omega)$$

$$= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} (S_\omega \circ \dot{\exp}, \alpha)\, d\nu(\omega).$$

Donc, pour α' dans $\mathscr{M}_c^\infty(G/H)$, on a $(S, \alpha') = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} (S_\omega, \alpha')\, d\nu(\omega)$ et si on prend $\alpha' = p_*(\gamma * \gamma^*)$ avec γ dans $\mathscr{M}_c^\infty(G)$, on obtient l'inégalité $(S \circ p, \gamma * \gamma^*) \geqslant 0$. Ceci prouve que $S \circ p$ est dans $\mathscr{F}^+(G)$ et donc que S est dans $\mathscr{F}^+(G/H)$.

(b) Réciproquement, soit S dans $\mathscr{F}^+(G/H)$, montrons que $S \circ \dot{\exp}$ est dans ${}^H(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p}))$.

Soit $T = S \circ p$, T est par définition dans $\mathscr{F}^+(G)$; il existe donc une représentation cyclique (Π, a) de G telle que $T = T^{\Pi}_{a,a}$ (cf. 1.2.3); on a $a \in (\mathscr{H}_\Pi^{-\infty})^H$ car $\forall h \in H$, $T \circ \rho(h) = T$.

Choisissons une désintégration de cette représentation:

$$\Pi = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}^{\oplus} \pi_\omega\, d\nu(\omega), \qquad a = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}^{\oplus} a_\omega\, d\nu(\omega)$$

où ν est une mesure positive sur $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$, π_ω une représentation unitaire irréductible dans $(\hat{G})_\sigma$ associée à ω et a_ω un élément de $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{\infty})^H$(cf. 1.3). Soit S_ω dans $\mathscr{F}^+(G/H)$ l'élément défini par $T^{\pi_\omega}_{a_\omega, a_\omega} = S_\omega \circ p$ et soit β_ω la mesure positive H-invariante sur $\mathfrak{h}^\perp$, portée par ω, telle que $S_\omega \circ \dot{\exp} = F(\beta_\omega)$ (th. 3.2.2). En particulier $S_\omega \circ \dot{\exp}$ est de type positif sur $\mathfrak{h}^\perp$ et H-invariante.

Soit β dans $\mathscr{M}_c^\infty(G)$; l'application $\omega \to (S_\omega \circ p, \beta) = \langle \pi_\omega(\beta)\, a_\omega, a_\omega \rangle$ est dans $L^1(H\backslash\mathfrak{h}^\perp, \nu)$ et on a (cf. 1.3):

$$(S \circ p, \beta) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} (S_\omega \circ p, \beta)\, d\nu(\omega).$$

Soit α dans $\mathscr{M}_c^\infty(\mathfrak{p})$, on en déduit que l'application $\omega \to (S_\omega, \dot{\exp}_*(\alpha))$ est dans $L^1(H\backslash\mathfrak{h}^\perp, \nu)$ et que $(S, \dot{\exp}_*(\alpha)) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} (S_\omega, \dot{\exp}_*(\alpha))\, d\nu(\omega)$. C'est à dire $(S \circ \dot{\exp}, \alpha) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} (S_\omega \circ \dot{\exp}, \alpha)\, d\nu(\omega)$. Comme $S_\omega \circ \dot{\exp}$ est de type positif et H-invariante, cette égalité prouve que $S \circ \dot{\exp}$ est dans ${}^H(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p}))$.

Ceci termine la démonstration de la proposition; précisons cependant les liens qui existent entre $S \circ \dot{\exp}$, ν et β_ω (avec les notations de (b)).

Si on prend α de la forme $\alpha_1 * \alpha_1$ (α_1 dans $\mathscr{M}_c^\infty(\mathfrak{p})$; la convolution est la convolution dans le groupe additif $\mathfrak{p}$), les remarques précédentes prouvent que l'application $(\omega \to (S_\omega \circ \dot{\exp}, \alpha_1 * \alpha_1^*) = (\beta_\omega, |F(\alpha_1)|^2))$ est dans $L^1(H\backslash\mathfrak{h}^\perp, \nu)$; on en déduit que la famille β_ω est ν-mesurable. Donc, par intégration des mesures β_ω le long de ν, on construit une mesure positive μ sur $\mathfrak{h}^\perp$ telle que, pour toute fonction mesurable positive ϕ sur $\mathfrak{h}^\perp$, on a $\int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(f)\, d\mu(f) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}(\int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(f)\, d\beta_\omega(f))\, d\nu(\omega)$. Cette mesure est H-invariante et on a l'égalité pour tout α_1 dans $\mathscr{M}_c^\infty(\mathfrak{p})$

$$(S \circ \dot{\exp}, \alpha_1 * \alpha_1^*) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} \left(\int_{\mathfrak{h}^\perp} |F(\alpha_1)|^2(f)\, d\beta_\omega(f) \right) d\nu(\omega),$$

donc

$$(F^{-1}(S \circ \dot{\exp}), |F(\alpha_1)|^2) = \int_{\mathfrak{h}^\perp} |F(\alpha_1)|^2(f)\, d\mu(f),$$

formule qui a un sens car, d'après le théorème de Bochner–Schwartz, comme $S \circ \dot{\exp}$ est de type positif sur $\mathfrak{h}^\perp$, $S \circ \dot{\exp}$ est une fonction généralisée tempérée, image de Fourier d'une mesure positive tempérée $\mu' = F^{-1}(S \circ \dot{\exp})$ sur $\mathfrak{h}^\perp$ [Sc1, Chap. 6, th. 18, p. 276]. Si on sait que $\mu = \mu'$, on en déduit que μ est tempérée et a pour image de Fourier

$$F(\mu) = S \circ \dot{\exp}.$$

C'est cette formule, qui relie $S \circ \dot{\exp}$, ν et β_ω, que nous cherchons. Nous l'interprèterons dans la remarque qui suit. Auparavant, montrons l'égalité $\mu = \mu'$; c'est une conséquence immédiate du lemme:

LEMME. *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur $\mathbb{R}^n$ telles que*

(i) *μ_1 est positive,*

(ii) *μ_2 est tempérée,*

(iii) $\forall \alpha \in \mathscr{M}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(\mu_1, |F(\alpha)|^2) = (\mu_2, |F(\alpha)|^2)$.

Alors $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration. Soit θ un élément de $\mathscr{M}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

(i) $(F(\theta))(0) = 1$,

(ii) $\forall x \in R^n \quad (F(\theta))(x) > 0$

(une telle fonction existe; il suffit de le voir sur $\mathbb{R}$: soit β une mesure de $\mathscr{M}_c^\infty(\mathbb{R})$ non nulle; quitte à multiplier β par la fonction $x \to (e^{iax} + 1)$ où a n'est pas la différence de deux zéros de la fonction analytique $F(\beta)$, on peut supposer que la fonction $F(\beta)$ ne s'annule pas; on prend alors $\theta = \beta * \beta^*$).

Soient $\mu_1' = |F(\theta)|^2 \mu_1$ et $\mu_2' = |F(\theta)|^2 \mu_2$, il est clair que la mesure μ_1' est positive, que la mesure μ_2' est bornée et que ces deux mesures vérifient (iii). On a $\mu_1'(1) = (\mu_1, |F(\theta)|^2) = (\mu_2, |F(\theta)|^2) = \mu_2'(1)$.

Les mesures μ_1' et μ_2' sont donc bornées et définissent deux éléments de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ qui coïncident sur un ensemble dense, elles sont donc égales comme éléments de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent elles sont égales. Donc $\mu_1 = \mu_2$.

Remarque. On a en fait prouvé un peu plus que ce qui est énoncé dans la proposition 3.3.2.

Notons $\mathrm{RC}(G, H)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations cycliques (Π, a) telles que a est dans $(\mathscr{H}_\Pi^{-\infty})^H$ et ${}^H(\mathscr{M}^+(\mathfrak{h}^\perp))$ l'ensemble des mesures positives tempérées sur $\mathfrak{h}^\perp$ invariantes sous l'action de H.

Les quatre ensembles $\mathscr{F}^+(G/H)$, ${}^H(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p}))$, $RC(G, H)$ et ${}^H(\mathscr{M}^+(\mathfrak{h}^\perp))$ *sont reliées par des bijection canoniques qui sont décrites dans le diagramme commutatif suivant*:

(Dans ce diagramme, la flèche du bas est la seule qui puisse prêter à confusion; on peut la lire ainsi:

Soit (Π, a) un élément de $RC(G, H)$ que l'on désintègre en $(\Pi, a) \sim \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}^{\oplus} (\pi_\omega, a_\omega)\, d\nu(\omega)$, alors la mesure μ de ${}^H(\mathscr{M}^+(\mathfrak{h}^\perp))$ qu'on lui associe est obtenue par intégration des mesures $\beta_\omega = F^{-1}(S_\omega \circ \dot{\exp})$ le long de ν où S_ω est la fonction généralisée sur G/H telle que $S_\omega \circ p = T^{\pi_\omega}_{a_\omega, a_\omega}$).

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathscr{F}^+(G/H) \arrow[r, leftrightarrow, "S \to R = S \circ \dot{\exp}", "\text{(prop. 3.3.2)}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{r} S \text{ tel que } S \circ p = T^{\Pi}_{a,a} \\ \uparrow \text{ (th. de Schwartz cf. 1.2.3)} \\ (\Pi, a) \end{array}"'] & {}^H(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p})) \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l} R = F(\mu) \\ \uparrow \text{ (th. de Bochner–Schwartz)} \\ \mu \end{array}"] \\
RC(G, H) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dashed, "\begin{array}{r} \text{(désintégration de la} \\ \text{représentation cyclique:} \\ \text{prop. 1.3.1)} \end{array}"'] \arrow[dr, phantom, "+ \quad +"] & {}^H(\mathscr{M}^+(\mathfrak{h}^\perp)) \arrow[d, dashed, "\begin{array}{l} \text{(désintégration} \\ \text{de la mesure cf. 3.3.1)} \end{array}"] \\
\begin{array}{l} \text{mesure dm sur } (\hat{G})_\sigma = H\backslash\mathfrak{h}^\perp \\ \text{(liée au choix de)} \\ \text{classes d'équivalences de} \\ \text{représentations cycliques} \\ (\pi_\omega, a_\omega) \end{array} \arrow[r, dashed, leftrightarrow, shift left=2, "m = \nu"] \arrow[r, dashed, leftrightarrow, shift right=2, "S_\omega \circ \dot{\exp} = F(\beta_\omega)", "\begin{array}{c} \text{où } T^{\pi_\omega}_{a_\omega, a_\omega} = S_\omega \circ p \\ \text{(formule du} \\ \text{coefficient 3.2.2)} \end{array}"'] & \begin{array}{l} \text{mesure } \nu \text{ sur } H\backslash\mathfrak{h}^\perp \\ \text{(liée au choix de)} \\ \text{mesures } \beta_\omega \ H\text{-invariantes} \\ \text{sur } \omega \end{array}
\end{tikzcd}$$

3.4. *Formule de Plancherel pour* $L^2(G/H)$

THÉORÈME 3.4. *Soit* G *un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe muni d'une involution* σ. H, P, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ *sont comme en* 1.1.

Soient $\mu_{G,H}$ *une mesure G-invariante sur* G/H, dP *la mesure de Lebesgue sur* $\mathfrak{p}$ *adaptée à* $\mu_{G,H}$ *et* μ *la mesure duale de* dP *sur* $\mathfrak{h}^{\perp}=\mathfrak{p}^*$. *Soit* $(\pi_\omega)_{\omega\in H\backslash\mathfrak{h}^{\perp}}$ *un champ mesurable de représentations unitaires dans* $(\hat{G})_\sigma$ *telles que* π_ω *est associée à* ω (cf. 1.3.2).

On peut choisir de façon mesurable a_ω *dans* $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$ *presque partout non nuls (pour la classe de mesure image de celle de* μ). *Soient* S_ω *les fonctions généralisées sur* G/H *telles que* $S_\omega\circ p=T^{\pi_\omega}_{a_\omega,a_\omega}$ *et* β_ω *les mesures positives H-invariantes sur* $\mathfrak{h}^{\perp}$, *portée par* ω, *telles que* $S_\omega\circ\dot{\exp}=F(\beta_\omega)$ (*th.* 3.2.2). *La famille* $(\beta_\omega)_{\omega\in H/\mathfrak{h}^{\perp}}$ *de mesures ainsi construites est mesurable et il existe une unique mesure* ν *positive sur* $H\backslash\mathfrak{h}^{\perp}$ *telle que* $(\beta_\omega)_{\omega\in H\backslash\mathfrak{h}^{\perp}}$ *soit la désintégration de* μ *par rapport à* ν (*remarque* 2 *de* 3.3.1). *On a alors, pour tout* ϕ *dans* $\mathscr{D}(G/H)$,

$$\phi(H)=\int_{H\backslash\mathfrak{h}^{\perp}}(S_\omega,\phi\mu_{G,H})\,d\nu(\omega)\qquad\textit{(formule de Plancherel)}$$

cette intégrale étant absolument convergente.

DÉMONSTRATION. L'étude précédente (3.3) appliquée à la représentation cyclique $(\mathrm{Ind}_H^G(1),\delta)$ (cf. 1.2.4) donne exactement l'énoncé de ce théorème: en effet, dans ce cas, les éléments qui interviennent dans le diagramme commutatif sont

(i) S tel que $S\mu_{G,H}=\delta_{(H)}$ (masse de Dirac en H),

(ii) R tel que $RdP=\delta_{(0)}$ (masse de Dirac en O),

(iii) μ mesure duale de dP (que nous avons aussi notée μ dans l'énoncé),

(iv) $(\Pi,a)=(\mathrm{Ind}_H^G(1),\delta)$.

3.5. *L'espace symétrique* $G\times G/\Delta$

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, μ_G une mesure de Haar sur G, G_1 le groupe $G\times G$ et σ_1 l'involution de G_1 donnée par, pour x,y dans G $\sigma_1((x,y))=(y,x)$. On note $H_1,P_1,\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{p}_1$ et p_1 les objets relatifs à σ_1 introduits en 1.1. Soit $\lambda\times\rho$ la représentation de G_1 d'espace $L^2(G)$ donnée par $((\lambda\times\rho)(x,y)f)(g)=f(x^{-1}gy)$.

3.5.1

On a les identifications canoniques

$\mathscr{G}\approx\mathfrak{h}_1$,	grâce à,	$X\to(X,X)$,	
$G\approx H_1$,	grâce à,	$x\to(x,x)$,	
$\mathscr{G}^*\approx\mathfrak{h}_1^{\perp}$,	grâce à,	$f\to(f,-f)$	(identification de $(G\simeq H_1)$-modules),

$\hat{G} \approx (G_1)_{\sigma_1}$, grâce à, $\xi \to \xi \otimes \bar{\xi}$ (ceci coïncide avec $G\backslash\mathscr{G}^* \approx H_1\backslash\mathfrak{h}_1^\perp$),

$\mathscr{G} \approx \mathfrak{p}_1$, grâce à, $X \to \frac{1}{2}(X, -X)$,

$G \approx G_1/H_1 (\approx P_1)$, grâce à, $x \to (x, e)\, H_1$.

Cette dernière identification préserve l'action de G_1 (l'action de G_1 sur G est donnée par, pour x, y, g dans G, $(x, y)\, g = xgy^{-1}$), elle permet d'identifier les représentations cycliques $(\lambda \times \rho, \delta)$ et $(\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1}(1), \delta_1)$ (δ_1 est défini en 1.2.4 et δ est l'application antilinéaire de l'espace $(L^2(G))^\infty$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $\langle \delta, \phi \rangle = \bar{\phi}(e)$: δ est dans $(L^2(G)^{-\infty})^{H_1}$).

On peut appliquer la formule de Plancherel 3.4 à cette situation: soient μ la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{G}^*$ duale de la mesure de Lebesgue dX sur $\mathscr{G}$ adaptée à μ_G, ν une mesure sur $G\backslash\mathscr{G}^*$ dans la classe de mesure image de celle de μ et $(\beta_\Omega)_{\Omega \in G\backslash\mathscr{G}^*}$ une désintégration de μ par rapport à ν (cf. 3.3.1). Soit π_Ω un champ mesurable de représentations de G telles que π_Ω est dans la classe de représentations associée à Ω.

Alors la représentation $\pi_\Omega \otimes \overline{\pi_\Omega}$ du groupe G_1 vérifie $\dim(\mathscr{H}^{-\infty}_{\pi_\Omega \otimes \bar{\pi}_\Omega})^{H_1} = 1$ et on peut choisir a_Ω dans $(\mathscr{H}^{-\infty}_{\pi_\Omega \otimes \bar{\pi}_\Omega})^{H_1}$ de sorte que l'on ait l'équivalence des représentations cycliques $(\lambda \times \rho, \delta)$ et $(\int^\oplus_{G\backslash\mathscr{G}^*} \pi_\Omega \otimes \overline{\pi_\Omega}\, d\nu(\Omega), \int^\oplus_{G\backslash\mathscr{G}^*} a_\Omega\, d\nu(\Omega))$. Soit S_Ω la fonction généralisée sur $G \approx G_1/H_1$ telle que $S_\Omega \circ p$ est le coefficient de la représentation cyclique $(\pi_\Omega \otimes \overline{\pi_\Omega}, a_\Omega)$. Les théorèmes 3.2.2 et 3.4 donnent les égalités:

(1) $F(\beta_\Omega) = S_\Omega \circ \exp$ (égalité de fonctions généralisées sur $\mathscr{G}$),

(2) $\phi(e) = \int_{G\backslash\mathscr{G}^*} (S_\Omega, \phi\mu_G)\, d\nu(\Omega), \forall \phi \in \mathscr{D}(G)$.

3.5.2

Dans cette situation, on peut faire un choix canonique de a_Ω et de β_Ω:

L'espace de la représentation $\pi_\Omega \otimes \overline{\pi_\Omega}$, $\mathscr{H}_{\pi_\Omega} \otimes \overline{\mathscr{H}_{\pi_\Omega}}$, s'identifie à l'espace $\mathscr{L}^2(\mathscr{H}_{\pi_\Omega})$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Montrons que $(\mathscr{L}^2(\mathscr{H}_{\pi_\Omega}))^\infty$ est formé d'opérateurs à trace. Rappelons, pour cela, que l'on peut choisir π_Ω de sorte que $\mathscr{H}_{\pi_\Omega} = L^2(\mathbb{R}^d)$ et $D\pi_\Omega(\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})) = \mathrm{OD}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que, si A est dans $(\mathscr{L}^2(L^2(\mathbb{R}^d)))^\infty$ et D et D' dans $\mathrm{OD}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur $D \circ A \circ D'$ est dans $\mathscr{L}^2(L^2(\mathbb{R}^d))$; choisissons alors un élément $D = D' = \Delta^n$ de $\mathrm{OD}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^d)$ inversible et dont l'inverse est à trace (par exemple, $\Delta = \sum_{i=1}^d (\partial^2/\partial x_i^2) + 1$, n suffisamment grand), on a alors $A = D^{-1} \circ B \circ D^{-1}$ où B est dans $\mathscr{L}^2(L^2(\mathbb{R}^d))$. Donc l'opérateur A est à trace.

Le théorème du graphe fermé prouve alors que l'application $A \to \mathrm{tr}(A^*)$ est une application continue de $(\mathscr{L}^2(L^2(\mathbb{R}^d)))^\infty$ dans $\mathbb{C}$, elle définit un élément de $(\mathscr{H}^{-\infty}_{\pi_\Omega \otimes \bar{\pi}_\Omega})^{H_1}$ encore noté a_Ω: en effet, pour tout g dans G, on a l'égalité $\mathrm{tr}(\pi_\Omega(g)\, A^* \pi_\Omega(g^{-1})) = \mathrm{tr}(A^*)$.

Calculons S_Ω: pour μ et ν dans $\mathscr{M}_c^\infty(G)$ et B dans $(\mathscr{L}^2(\mathscr{H}_{\pi_\Omega}))^\infty$, on a

$$\begin{aligned}\langle(\pi_\Omega \otimes \overline{\pi_\Omega})(\mu \otimes \nu)\, a_\Omega, B\rangle &= \overline{\operatorname{tr}((\pi_\Omega \otimes \overline{\pi_\Omega})(\mu^* \otimes \nu^*)\, B)}\\ &= \overline{\operatorname{tr}(\pi_\Omega(\mu^*)\, B\pi_\Omega(\nu))}\\ &= \operatorname{tr}(\pi_\Omega(\mu * \nu^*)\, B^*).\end{aligned}$$

Donc

$$(\pi_\Omega \otimes \overline{\pi_\Omega})(\mu \otimes \nu)\, a_\Omega = \pi_\Omega(\mu * \nu^*) = \pi_\Omega((p_1)_*(\mu \otimes \nu)).$$

On en déduit $(T^{\pi_\Omega \otimes \pi_\Omega}_{a_\Omega, a_\Omega}, \mu \otimes \nu) = \langle \pi_\Omega((p_1)_*(\mu \otimes \nu)), a_\Omega\rangle$ ce qui se réécrit $(S_\Omega, (p_1)_*(\mu \otimes \nu)) = \operatorname{tr}(\pi_\Omega((p_1)_*(\mu \otimes \nu)))$. On en déduit que $\forall \alpha \in \mathscr{M}_c^\infty(G)$, $(S_\Omega, \alpha) = \operatorname{tr}(\pi_\Omega(\alpha))$.

La mesure β_Ω, donnée par la formule (1), qui correspond à cet élément a_Ω est la mesure de Kostant de l'orbite Ω; la formule (1) est alors la formule du caractère des représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie nilpotent (th. 7.4 de [Ki1]) et la formule (2) est la formule de Plancherel des groupes de Lie nilpotents [Ki2].

3.5.3

Montrons que dans cette situation notre proposition 3.3.2 est équivalente au théorème de [S] qui s'énonce ainsi:

Soient ${}^G(\mathscr{F}^+(\mathscr{G})) = \{R \in \mathscr{F}^+(\mathscr{G})/\forall g \in G,\ R \circ \operatorname{Adg} = R\}$, *et* $(\mathscr{F}^+(G))^{\text{inv}} = \{S \in \mathscr{F}^+(G)/\forall g \in G,\ S \circ \gamma(g) = S\}$, *alors l'application* $S \to S \circ \exp$ *est une bijection de* $(\mathscr{F}^+(G))^{\text{inv}}$ *sur* ${}^G(\mathscr{F}^+(\mathscr{G}))$.

En effet, il est clair que, avec les identifications de 3.5.1, les applications $\exp: \mathscr{G} \to G$ et $\exp: \mathfrak{p}_1 \to G_1/H_1$ coïncident et que ${}^G(\mathscr{F}^+(\mathscr{G})) \approx {}^{H_1}(\mathscr{F}^+(\mathfrak{p}_1))$. Il reste à voir que $(\mathscr{F}^+(G))^{\text{inv}} \approx \mathscr{F}^+(G_1/H_1)$. Pour cela, soit T dans ${}^{H_1}(\mathscr{F}(G_1))^{H_1}$ et μ et ν dans $\mathscr{M}_c^\infty(G)$; posons $T = S \circ p_1$: S est un élément de $(\mathscr{F}(G))^{\text{inv}}$ et on a

$$\begin{aligned}&(T, (\mu \otimes \nu) *_{G_1} (\mu \otimes \nu)^*)\\ &\quad = (T, (\mu *_G \mu^*) \otimes (\nu *_G \nu^*))\\ &\quad = (S, (p_1)_*((\mu * \mu^*) \otimes (\nu * \nu^*)))\\ &\quad = (S, \mu * \mu^* * \nu * \nu^*)\\ &\quad = (S, (\nu^* * \mu) * (\nu^* * \mu)^*) \quad \text{car } S \text{ est dans } (\mathscr{F}(G))^{\text{inv}}.\end{aligned}$$

On en déduit l'équivalence

$$T \in {}^{H_1}(\mathscr{F}^+(G_1))^{H_1} \Leftrightarrow S \in (\mathscr{F}^+(G))^{\text{inv}}.$$

Ceci prouve que $(\mathscr{F}^+(G))^{\text{inv}}$ s'identifie à $\mathscr{F}^+(G_1/H_1)$.

4. Opérateurs Différentiels Invariants

Nous présentons quelques applications des théorèmes 3.2.2 et 3.4.

4.1. *L'Algèbre des opérateurs différentiels invariants*

4.1.1

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié. On peut appliquer la construction du 1.2.2 au groupe abélien E: Soient $S(E_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique de $E_{\mathbb{C}}$, $\mathscr{D}'_{(0)}(E)$ l'algèbre des distributions sur E de support inclus dans $\{0\}$ et $\mathrm{OD}_c(E)$ l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants sur E. Soit J le difféomorphisme de E donné par $J(X) = -X$, on note encore J l'antiautomorphisme principal de $S(E_{\mathbb{C}})$ (qui est un automorphisme car $S(E_{\mathbb{C}})$ est abélienne!); pour V dans $S(E_{\mathbb{C}})$, on note parfois $\check{V} = J(V)$ et $V^* = \overline{J(V)}$.

A V dans $S(E_{\mathbb{C}})$, on associe η_V dans $\mathscr{D}'_{(0)}(E)$, l_V dans $\mathrm{OD}_c(E)$ et r_V dans $\mathrm{OD}_c(E)$. On définit ainsi des isomorphismes entre ces algèbres. Voici les formules qui relient V, η_V, l_V, r_V: (ϕ désigne un élément arbitraire de $\mathscr{D}(E)$ et ξ un élément de $\mathscr{D}'(E)$)

(1) $l_V(\phi) = (J_*(\eta_V)) * \phi$.

(2) $\eta_V = {}^t l_V(\delta_{(0)})$ où $\delta_{(0)}$ désigne la masse de Dirac en 0; ceci signifie que $(\eta_V, \phi) = (l_V(\phi))(0)$.

(3) $r_V = l_{\check{V}}$.

(4) $J_*(\eta_V) = \eta_{\check{V}}$.

(5) ${}^t l_V(\xi) = \eta_V * \xi$ donc on a l'identification ${}^t l_V = l_{\check{V}}$.

En outre, si V est un produit d'éléments de E: $V = X_1 \cdots X_n$, on a

(6) $(\eta_V, \phi) = d^n/dt_1 \cdots dt_n \,(\phi(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n))|_{t_1 = \cdots = t_n = 0}$.

(7) $(l_V(\phi))(X) = d^n/dt_1 \cdots dt_n (\phi(X + t_1X_1 + \cdots + t_nX_n))|_{t_1 = \cdots = t_n = 0}$.

(8) $(r_V(\phi))(X) = d^n/dt_1 \cdots dt_n \,(\phi(X - t_1X_1 - \cdots - t_nX_n))|_{t_1 = \cdots = t_n = 0}$.

L'élément V de $S(E_{\mathbb{C}})$ s'identifie à une fonction polynôme sur $E^*_{\mathbb{C}}$. Celle-ci permet de calculer la transformée de Fourier de η_V:

(9) $(F(\eta_V))(f)(=(\eta_V(x), e^{if(x)})) = V(if) \quad \forall f \in E^*_{\mathbb{C}}$.

4.1.2 *La symétrisation*

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$. Il existe une unique application linéaire β de $S(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})$ sur $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})$ telle que, pour tout X dans $\mathscr{G}$ et n dans $\mathbb{N}$, on ait $\beta(X^n) = (\beta(X))^n$. Cette application est appelée la symétrisation [Di, §2.4.5].

Notons par un même symbole ad (resp. Ad) l'action adjointe de $\mathscr{G}$ (resp. G) dans $S(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})$ et $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})$.

4.1.3. *L'algèbre* $A = \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}}/(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})\,\mathscr{L})$

Soit L un sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathscr{L}$. Notons p la projection de G sur G/L.

Soient

$$\begin{aligned}(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}}))^{\mathscr{L}} &= \{U \in \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})/\forall X \in \mathscr{L} \quad \operatorname{ad} X\, U = 0\}\\ &= \{U \in \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})/\forall l \in L \qquad \operatorname{Ad} l\, U = U\}\end{aligned}$$

et

$${}^{G}(\mathrm{OD}(G))^{L} = \{D \in {}^{G}(\mathrm{OD}(G))/\forall l \in L, D \circ (\rho(l)_*) = (\rho(l)_*) \circ D\}.$$

Il est clair que U est dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}}$ si et seulement si l'opérateur différentiel L_U est dans ${}^{G}(\mathrm{OD}(G))^{L}$ (cf. 1.2.2 formule (9)); soit $\dot{L}_U$ l'élément de l'espace ${}^{G}(\mathrm{OD}(G/L))$ des opérateurs différentiels linéaires G-invariants sur G/L donné par, pour ϕ dans $\mathscr{D}(G/L)$, $(\dot{L}_U(\phi)) \circ p = L_U(\phi \circ p)$; cette formule reste vraie pour ϕ dans $\mathscr{F}(G/L)$. Par dualité, on obtient, pour μ dans $\mathscr{E}(G)$ $p_*({}^{t}L_U(\mu)) = ({}^{t}\dot{L}_U)(p_*(\mu))$.

LEMME 4.1.3. (a) *Le morphisme* $U \to \dot{L}_U$ *de l'algèbre* $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}}$ *dans l'algèbre* ${}^{G}(\mathrm{OD}(G/L))$ *a pour noyau* $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})\,\mathscr{L}$.

(b) *Si* $\mathscr{L}$ *admet un supplémentaire* $\mathfrak{q}$ $\mathscr{L}$*-invariant* (*i.e.*, $\mathscr{G} = \mathscr{L} \oplus \mathfrak{q}$ *et* $[\mathscr{L}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$), *alors*

(i) *ce morphisme est surjectif*;

(ii) *soit*

$$S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}} = \{V \in S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})/\forall X \in \mathscr{L} \operatorname{ad} X\, V = 0\}$$

on a

$$\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}} = \beta(S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}}) \oplus (\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})\,\mathscr{L}).$$

Démonstration (cf. [He2, §2 énoncés 2.5, 2.6, et 2.7]).

Notations. On note A l'algèbre $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}}/(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})\,\mathscr{L})$ et, pour a dans A, $\gamma(a)$ l'élément de ${}^{G}(\mathrm{OD}(G/L))$ qui lui est associé.

Si $\mathscr{L}$ admet un supplémentaire $\mathfrak{q}$ $\mathscr{L}$-invariant, on note $\dot{\beta}$ l'application de $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}}$ sur A obtenue par passage au quotient de la symétrisation; c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'application γ est un isomorphisme d'algèbres de A sur ${}^{G}(\mathrm{OD}(G/L))$.

Remarque. L'espace $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{\mathscr{L}}$ s'identifie à l'ensemble des fonctions polynômes sur $\mathfrak{q}^* = \mathscr{L}^{\perp}$ constantes sur les orbites de L dans $\mathscr{L}^{\perp}$. Pour V

dans $S(\mathfrak{q}_{\mathrm{C}})$ et ω dans $L\backslash\mathscr{L}^{\perp}$, on note alors $V(\omega)$ la valeur commune des $V(f)$ pour f dans ω.

4.1.4

Gardons les notations de 4.1.3 et choisissons un supplémentaire $\mathfrak{q}$ de $\mathscr{L}$ (non nécessairement $\mathscr{L}$-invariant). Soit $\dot{\exp}$ l'application de $\mathfrak{q}$ dans G/L égale à $p \circ \exp$.

Pour U dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathrm{C}})$, on a définit en 1.2.2 l'élément ξ_U de $\mathscr{D}'_{(e)}(G)$; définissons maintenant $\dot{\xi}_U$ dans $\mathscr{D}'_{(L)}(G/L)$ par $\dot{\xi}_U = p_*(\xi_U)$ (L désigne le point de G/L égal à $p(e)$). On vérifie, comme en 4.1.3, que le noyau de l'application $U \to \dot{\xi}_U$ est $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathrm{C}})\mathscr{L}$ et que cette application est surjective.

Si U est dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathrm{C}})^{\mathscr{L}}$, on a l'égalité $\dot{\xi}_U = ({}^t\dot{L}_U)(\delta_{(L)})$ en effet, la formule (2) de 1.2.2 et la définition de $\dot{L}_U$ donnent, pour ϕ dans $\mathscr{D}(G/L)$, $(\dot{\xi}_U, \phi) = (\xi_U, \phi \circ p) = (L_U(\phi \circ p))(e) = (\dot{L}_U(\phi))(L)$.

Lemme 4.1.4. *Soient V dans $S(\mathfrak{q}_{\mathrm{C}})$, η_V dans $\mathscr{D}'_{(0)}(\mathfrak{q}_{\mathrm{C}})$ la distribution qu'on lui associe* (4.1.1 *avec* $E = \mathfrak{q}$), *$U = \beta(V)$ dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathrm{C}})$ et $\dot{\xi}_U$ dans $\mathscr{D}'_{(L)}(G/L)$ la distribution définie ci-dessus. Alors on a*

$$\dot{\xi}_U = \dot{\exp}_*(\eta_V).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier cette égalité pour $V = X^n$ ($X \in \mathfrak{q}$); on a alors $U = X^n$ et, pour ϕ dans $\mathscr{D}(G/L)$, on a

$$\begin{aligned}
(\dot{\exp}_*(\eta_V), \phi) &= (\eta_V, \phi \circ p \circ \exp) \\
&= \frac{d^n}{dt_1 \cdots dt_n} (\phi \circ p(\exp((t_1 + \cdots + t_n) X)))|_{t_1 = \cdots = t_n = 0} \\
&= (\xi_U, \phi \circ p) \qquad \text{(formules (6) de 4.1.1 et de 1.2.2)} \\
&= (\dot{\xi}_U, \phi).
\end{aligned}$$

Donc

$$\dot{\xi}_U = \dot{\exp}_*(\eta_V).$$

Remarques. Pour $\mathscr{L} = 0$ et $\mathfrak{q} = \mathscr{G}$, ce résultat est bien connu.

Ce lemme exprime la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
S(\mathfrak{q}_{\mathrm{C}}) & \xrightarrow{\beta} & \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathrm{C}})/\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathrm{C}})\mathscr{L} \\
\downarrow \eta & & \downarrow \dot{\xi} \\
\mathscr{D}'_{(0)}(\mathfrak{q}) & \xrightarrow{\dot{\exp}} & \mathscr{D}'_{(L)}(G/L)
\end{array}$$

4.2. *Action de A sur* $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$

Supposons de nouveau que G est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe muni d'une involution σ; H, P, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}$, p et exp sont comme en 1.1, l'algèbre A est l'algèbre $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}/(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})\,\mathfrak{h})$

4.2.1. *Les caractères* $\dot{\lambda}_\omega$ *de l'algèbre A*

Soient ω une orbite de H dans $\mathfrak{h}^\perp$, ζ_ω la classe de représentation qui lui est associée (1.3.2) et π_ω une représentation dans cette classe. On sait que $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})$ agit dans $\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty}$ et que $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$ est de dimension 1 (2.3). Soit donc a_ω non nul dans $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$, calculons, pour U dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$: $\forall h \in H$,

$$\begin{aligned}
\pi_\omega(h)(D\pi_\omega(U)\,a_\omega) &= \pi_\omega(\delta_{(h)})(\pi_\omega(\xi_U)\,a_\omega) \qquad (\delta_{(h)} \text{ est la masse de Dirac en } h)\\
&= \pi_\omega(\delta_{(h)} * \xi_U)\,a_\omega\\
&= \pi_\omega(\xi_{\mathrm{Ad}\,hU} * \delta_{(h)})\,a_\omega \qquad (1.2.2 \text{ formule } (10))\\
&= D\pi_\omega(\mathrm{Ad}\,hU)(\pi_\omega(h)\,a_\omega)\\
&= D\pi_\omega(U)\,a_\omega \qquad (\text{car } U \in \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}} \text{ et } a_\omega \in (\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H).
\end{aligned}$$

Donc, si U est dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$, $D\pi_\omega(U)\,a_\omega$ est dans $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$ et il existe un nombre complexe $\lambda_\omega(U)$ unique tel que $D\pi_\omega(U)\,a_\omega = \lambda_\omega(U)\,a_\omega$. Ce nombre ne dépend ni du choix de π_ω dans ζ_ω ni du choix de a_ω dans $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$.

Il est clair que, pour U et U' dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ et α dans $\mathbb{C}$, on a les égalités $\lambda_\omega(\alpha U + U') = \alpha\lambda_\omega(U) + \lambda_\omega(U')$ et $\lambda_\omega(UU') = \lambda_\omega(U)\,\lambda_\omega(U')$. Donc λ_ω est un caractère de l'algèbre $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$.

En outre, si U est dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})\mathfrak{h}$, on a $D\pi_\omega(U)\,a_\omega = 0$ et $\lambda_\omega(U) = 0$. Le caractère λ_ω passe au quotient en un caractère $\dot{\lambda}_\omega$ de l'algèbre A.

Remarquons que, pour U dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$, on a ${}^t\dot{L}_U = L_U$ quel que soit le choix de la mesure $\mu_{G,H}$ G-invariante sur G/H qui permet d'identifier $\mathscr{D}(G/H)$ à un sous-ensemble de $\mathscr{D}'(G/H)$ (cf. 4.1.3 pour la définition de $\dot{L}_U$ et cf. 1.2.2 formule (5)).

Notons, pour g dans G, $\lambda(g)$ la translation à gauche par g dans G/H.

LEMME 4.2.1. *Soit* S_ω *la fonction généralisée sur* G/H *telle que* $S_\omega \circ p = T^{\pi_\omega}_{a_\omega, a_\omega}$ (cf. 3.2.2), *alors*:

(a) $\forall h \in H, S_\omega \circ \lambda(h) = S_\omega$.

(b) $\forall U \in \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}, \dot{L}_U(S_\omega) = \lambda_\omega(U)\,S_\omega$.

DÉMONSTRATION Soit μ dans $\mathscr{M}_c^\infty(G/H)$ et ν dans $\mathscr{M}_c^\infty(G)$ tels que $\mu = p_*(\nu)$ de sorte que $(S_\omega, \mu) = \langle \pi_\omega(\nu)\,a_\omega, a_\omega \rangle$

(a) Calculons

$$
\begin{aligned}
(S_\omega \circ \lambda(h), \mu) &= (S_\omega, \lambda(h)_*(\mu)) \\
&= \langle \pi_\omega(\lambda(h)_*(\nu))\, a_\omega, a_\omega \rangle \qquad (\text{car } \lambda(h)_*(\mu) = p_*(\lambda(h)_*(\nu))) \\
&= \langle \pi_\omega(\nu)\, a_\omega, \pi_\omega(h^{-1})\, a_\omega \rangle \\
&= \langle \pi_\omega(\nu)\, a_\omega, a_\omega \rangle \qquad (\text{car } a_\omega \in (\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H) \\
&= (S_\omega, \mu).
\end{aligned}
$$

Donc $S_\omega \circ \lambda(h) = S_\omega$.

(b) Calculons

$$
\begin{aligned}
(\dot{L}_U(S_\omega), \mu) &= (S_\omega, ({}^t\dot{L}_U)(\mu)) \\
&= \langle \pi_\omega({}^tL_U(\nu))\, a_\omega, a_\omega \rangle \qquad (\text{car } p_*({}^tL_U(\nu)) = {}^t\dot{L}_U(p_*(\nu))) \\
&= \langle \pi_\omega(\nu * \xi_U)\, a_\omega, a_\omega \rangle \qquad (\text{cf. 1.2.2 formule (5)}) \\
&= \langle \pi_\omega(\nu)\, \pi_\omega(\xi_U)\, a_\omega, a_\omega \rangle \\
&= \langle \pi_\omega(\nu)(D\pi_\omega(U)\, a_\omega), a_\omega \rangle \\
&= \lambda_\omega(U) \langle \pi_\omega(\nu)\, a_\omega, a_\omega \rangle \qquad (\text{par définition de } \lambda_\omega(U)) \\
&= \lambda_\omega(U)(S_\omega, \mu).
\end{aligned}
$$

Donc $\dot{L}_U(S_\omega) = \lambda_\omega(U)\, S_\omega$.

Remarques. (1) Ce lemme décrit les fonctions généralisées H-invariantes S_ω comme des vecteurs propres communs aux opérateurs différentiels G-invariants sur G/H. Le calcul des valeurs propres $\lambda_\omega(U)$ est l'objet du prochain paragraphe.

(2) Soit $\dot{\sigma}$ le difféomorphisme de G/H obtenu par passage au quotient de σ; on vérifie aisément que $S_\omega \circ \dot{\sigma}$ et $S_{-\omega}$ sont colinéaires.

4.2.2. *Calcul de* λ_ω

On peut, grâce à la formule de Plancherel, calculer λ_ω presque partout.

PROPOSITION 4.2.2. *Pour presque tout f dans $\mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{p}^*$ (pour la mesure de Lebesgue), si ω désigne l'orbite Hf, on a, pour tout V dans $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^\mathfrak{h}$, $\lambda_\omega(\beta(V)) = V(i\omega)$(=valeur commune des $V(if)$, pour f dans ω; rq.* 4.1.3).

Démonstration. Choisissons $\mu_{G,H}$, dP, μ, ν et $(a_\omega, \beta_\omega, S_\omega)_{\omega \in H\backslash\mathfrak{h}^\perp}$ comme dans la formule de Plancherel 3.4. Identifions S_ω à une distribution sur G/H grâce à $\mu_{G,H}$.

Soient alors ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$ et $\psi = \phi \circ \dot{\exp}$ dans $\mathscr{D}(\mathfrak{p})$; soient V dans $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ et $U = \beta(V)$ dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$. Remarquons que l'on a l'égalité $(\dot{L}_U(\phi))(H) = (l_V(\psi))(0)$ en effet, avec les notations de 4.1.4:

$$\begin{aligned}(\dot{L}_U(\phi))(H) &= (\dot{\xi}_U, \phi) && \text{(cf. 4.1.4)}\\ &= (\dot{\exp}_*(\eta_V), \phi) && \text{(lemme 4.1.4)}\\ &= (\eta_V, \psi) = (l_V(\psi))(0) && \text{(4.1.1 formule (2)).}\end{aligned}$$

Calculons les deux membres de cette égalité. D'une part

$$(\dot{L}_U(\phi))(H) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} (S_\omega, \dot{L}_U(\phi))\, d\nu(\omega)$$

(formule de Plancherel 3.4)

$$= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} (\dot{L}_{\check{U}}(S_\omega), \phi)\, d\nu(\omega)$$

(car ${}^t\dot{L}_U = \dot{L}_{\check{U}}$ cf. 4.2.1)

$$= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} \lambda_\omega(\check{U})(S_\omega, \phi)\, d\nu(\omega)$$

(lemme 4.2.1)

$$= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} \lambda_\omega(\check{U}) \left(\int_{\mathfrak{h}^\perp} F(\psi dP)(f)\, d\beta_\omega(f)\right) d\nu(\omega)$$

(formule du coefficient 3.2.2).

D'autre part

$$\begin{aligned}(l_V(\psi))(0) &= (\eta_V, \psi)\\ &= \int_{\mathfrak{h}^\perp} \bar{F}(\eta_V)(f)(F(\psi dP))(f)\, d\mu(f) && \text{(form. Plancherel classique)}\\ &= \int_{\mathfrak{h}^\perp} V(-if)(F(\psi dP))(f)\, d\mu(f) && \text{(4.1.1 formule (9)).}\end{aligned}$$

Pour pouvoir terminer le calcul de $(\dot{L}_U(\phi))(H)$ en appliquant la formule de la désintégration de μ et obtenir alors

$$(\dot{L}_U(\phi))(H) = \int_{\mathfrak{h}^\perp} \lambda_{Hf}(\check{U})\, F(\psi dP)(f)\, d\mu(f),$$

il faudrait savoir que l'application $f \to |\lambda_{Hf}(\check{U})|\, |F(\psi dP)|(f)$ est dans

$L^1(\mathfrak{h}^\perp, \mu)$; le seul renseignement que nous fournit la formule de Plancherel 3.4 est que l'application $\omega \to |\lambda_\omega(\check{U})|\ |(\beta_\omega, F(\psi dP))|\ (=|(S_\omega, \dot{L}_U(\phi))|)$ est dans $L^1(H\backslash\mathfrak{h}^\perp, \nu)$.

Si ψdP est de la forme $\alpha * \alpha^*$ ($\alpha \in \mathscr{M}_c^\infty(\mathfrak{p})$), on sait donc que l'application $\omega \to |\lambda_\omega(\check{U})|(\beta_\omega, |F(\alpha)|^2)$ est dans $L^1(H\backslash\mathfrak{h}^\perp, \nu)$, on en déduit que l'application positive $f \to |\lambda_{Hf}(\check{U})|\ |F(\alpha)|^2(f)$ est dans $L^1(\mathfrak{h}^\perp, \mu)$; dans ce cas, on peut appliquer la formule de désintégration de μ:

Soient ν_1 et ν_2 les mesures réelles (localement finies) sur $\mathfrak{h}^\perp$ donnée par $d\nu_1(f) = \lambda_{Hf}(\check{U})\, d\mu(f)$ et $d\nu_2(f) = V(-if)\, d\mu(f)$; pour tout α dans $\mathscr{M}_c^\infty(\mathfrak{p})$, $|F(\alpha)|^2$ est dans $L^1(|\nu_1|) \cap L^1(|\nu_2|)$ et on a $(\nu_1, |F(\alpha)|^2) = (\nu_2, |F(\alpha)|^2)$. On peut alors reprendre les idées de la démonstration du lemme de 3.3.2 pour montrer que ν_1 et ν_2 coïncident: soit θ comme dans ce lemme, posons $\nu_i' = |F(\theta)|^2\, \nu_i$ $(i = 1, 2)$, ν_1' et ν_2' sont des mesures réelles bornées sur $\mathfrak{h}^\perp$ qui coïncident comme éléments de $\mathscr{S}'(\mathfrak{h}^\perp)$, elles sont donc égales, donc $\nu_1 = \nu_2$ et $\lambda_{Hf}(\check{U}) = V(-if) = \check{V}(if)$ μ-presque partout.

On a donc montré que, pour tout V dans $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^\mathfrak{h}$, on a, pour μ-presque tout f dans $\mathfrak{h}^\perp$, $\lambda_{Hf}(\beta(V)) = V(if)$. Ce n'est pas tout à fait ce que l'on voulait: Soit $V_1,..., V_n,...$ une base de $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^\mathfrak{h}$ (qui est un espace vectoriel de dimension dénombrable car c'est un sous-espace de $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})$). Considérons $N_1,..., N_n,...$ des ensembles négligeables de $\mathfrak{h}^\perp$ tels que, pour f en dehors de N_n on a $\lambda_{Hf}(\beta(V_n)) = V_n(if)$. Soit $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$, N est négligeable et, pour f en dehors de N, on a, pour tout V dans $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^\mathfrak{h}$,

$$\lambda_{Hf}(\beta(V)) = V(if).$$

Remarque. Nous montrerons directement, par une fastidieuse méthode de récurrence, que l'égalité de la proposition 4.2.2 a lieu pour tout f dans $\mathfrak{h}^\perp$ (cf. 4.4).

4.2.3. *Une description de l'algèbre* $A \approx {}^G(\mathrm{OD}(G/H))$

Retrouvons un résultat que nous avions montré dans [B1] par une méthode entièrement algébrique.

PROPOSITION 4.2.3. *Soient $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie nilpotente* (*sur* $\mathbb{R}$), *σ une involution de $\mathscr{G}$, $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{p}$ les ensembles des points fixes de σ et $-\sigma$, alors la bijection $\dot{\beta}$: $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^\mathfrak{h} \to \mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})^\mathfrak{h}/(\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})^\mathfrak{h} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})\mathfrak{h})$ obtenue par passage au quotient de la symétrisation* (4.1.1 *et* 4.1.3) *est un isomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. Soit G le groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe associé à $\mathscr{G}$, σ l'involution de G qui se déduit de celle de $\mathscr{G}$ et H l'ensemble des points fixes de σ.

A ω dans $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$, on a associé un caractère $\dot{\lambda}_\omega$ de l'algèbre $A = \mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})^\mathfrak{h}/(\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})^\mathfrak{h} \cap \mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C})\mathfrak{h})$ (cf. 4.2.1). On a montré qu'il existe un ensemble négligeable N de $\mathfrak{h}^{\perp}$ tel que, pour f en dehors de N, on a l'égalité, pour tout a dans A: $\lambda_{Hf}(a) = (\dot{\beta}^{-1}(a))(if)$ (prop. 4.2.2). Si on applique cela à des éléments a, a', et aa' de A, on obtient:

$$\forall f \in \mathfrak{h}^{\perp} \backslash N, \qquad ((\dot{\beta}^{-1}(a))(\dot{\beta}^{-1}(a'))(if) = (\dot{\beta}^{-1}(aa'))(if);$$

les deux membres de cette égalité sont des fonctions polynômes de f, on a donc l'égalité des polynômes: $\dot{\beta}^{-1}(a)\,\dot{\beta}^{-1}(a') = \dot{\beta}^{-1}(aa')$. L'application $\dot{\beta}$ est donc un isomorphisme d'algèbres.

Remarque. On trouve en particulier que l'algèbre A est commutative. Ce résultat est, dans un cadre plus général, dû à A. Lichnerowicz (cf. [Li] et [Du]).

4.3. *Solutions élémentaires des opérateurs différentiels invariants*

La mise en œuvre d'une technique basée, d'une part sur les résultats de M. F. Atiyah et de I. N. Berstein [At, Ber]), d'autre par sur la formule de Plancherel des groupes de Lie nilpotents due à A. A. Kirillov [Ki1, Ki2], pour montrer la résolubilité des opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie nilpotent est due à M. Raïs [Ra2].

Une fois la formule de Plancherel démontrée pour les espaces symétriques nilpotents, il semble plausible d'obtenir par cette technique des résultats sur les opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique nilpotent. C'est ce que nous faisons.

4.3.1

Rappelons les résultats de M. F. Atiyah et I. N. Berstein. Ceux-ci sont exposés sous la forme qui nous intéresse dans [Ra1, §1.1 et 1.2]:

Soit F une fonction polynôme non nulle à valeurs positives sur un espace vectoriel de dimension finie E. A tout nombre complexe s de partie réelle positive, on peut associer la fonction généralisée tempérée F^s sur E (c'est une fonction localement intégrable). La fonction $s \to F^s$ qui est définie et holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(s) > 0\}$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$. Les fonctions généralisées F^s ainsi obtenues sont tempérées ainsi que les coefficients du développement de Laurent de la fonction $s \to F^s$ au voisinage de chacun de ses pôles; pour $s = 0$, F^0 est la fonction constante égale à 1.

4.3.2. *Appliquons ces résultats à notre situation*

Définition. Une fonction généralisée S sur G/H (resp. une distribution ξ) est dite tempérée si la fonction généralisée $S \circ \exp$ (resp. la distribution

$\dot{\exp}_*^{-1}(\xi))$ est tempérée sur $\mathfrak{p}$. Elle est dite H-invariante si, pour tout h dans H, elle vérifie $S \circ \lambda(h) = S$ (resp. $\lambda(h)_* \xi = \xi$).

THÉORÈME 4.3.2. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement muni d'une involution σ et H l'ensemble des points fixes de σ. Soit D $(\in^G(\mathrm{OD}(G/H)))$ un opérateur différentiel non nul G-invariant sur G/H.*

Alors il existe une distribution tempérée et H-invariante E sur G/H qui est solution élémentaire de D (i.e., $D(E) = \delta_{(H)}$ masse de Dirac au points H de G/H).

Démonstration. Soient $\mu_{G,H}$, dP, μ, ν, $(a_\omega, S_\omega, \beta_\omega)_{\omega \in H \backslash \mathfrak{h}^\perp}$ comme en 3.4. On a donc $S_\omega \circ \dot{\exp} = F(\beta_\omega)$; la mesure $\mu_{G,H}$ permet d'identifier $\mathscr{D}(G/H)$ et $\mathscr{D}'(G/H)$.

On sait qu'il existe V dans $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ tel que $D = \dot{L}_U$ avec $U = \beta(V)$ (lemme 4.1.3). Quitte à remplacer D par DD^*, on peut supposer que, pour tout f dans $\mathfrak{h}^\perp$, on a $V(if) \geqslant 0$. En effet:

D'une part, comme $\dot{\beta}$ est un isomorphisme d'algèbres, on a $\gamma \circ \dot{\beta}(VV^*) = DD^*$ et on remarque que $(VV^*)(if) = V(if)\, \bar{V}(-if) \geqslant 0$.

D'autre part, si E_1 est une solution élémentaire tempérée et H-invariante de DD^*, alors $E = D^*(E_1)$ est une distribution H-invariante, car D^* est G-invariant, tempérée, car $(\dot{\exp}_*^{-1} \circ D^* \circ \dot{\exp}_*)$ est un opérateur différentiel à coefficients polynômiaux sur $\mathfrak{p}$ qui laisse donc stable $\mathscr{S}'(\mathfrak{p})$ et E est une solution élémentaire de D.

Supposons donc que, pour tout f dans $\mathfrak{h}^\perp$, on ait $V(if) \geqslant 0$. Posons $P(f) = V(if)$. Le théorème d'Atiyah–Berstein (4.3.1) permet donc de construire une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans l'ensemble des fonctions généralisées tempérées sur $\mathfrak{h}^\perp$: $s \to P^s$ qui prolonge l'application holomorphe définie sur $\{s \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(s) > 0\}$: $s \to (x \to P(x)^s)$.

Notons $A_s = \dot{\exp}_*(\bar{F}^{-1}(P^s))$ où F^{-1} est la transformation de Fourier inverse: elle envoie les fonctions généralisées tempérées sur $\mathfrak{h}^\perp$ sur les distribution tempérées sur $\mathfrak{p}$; A_s est donc une distribution tempérée sur G/H. Voici quelques propriétés de ces distributions.

LEMME. (a) *Si* $\mathrm{Re}(s) > 0$, *on a, pour ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$, $(A_s, \phi) = \int_{H \backslash \mathfrak{h}^\perp} P(\omega)^s (S_\omega, \phi)\, d\nu(\omega)$ cette intégrale étant absolument convergente.*

(b) *Pour h dans H, on a les égalités de fonctions méromorphes*

$$\lambda(h)_* A_s = A_s \text{ et } D(A_s) = A_{s+1}.$$

Démonstration. (a) Remarquons que, comme μ et dP sont des mesures duales, on a l'égalité de distributions tempérées: $\bar{F}^{-1}(\phi \circ \dot{\exp}) = F(\phi \circ \dot{\exp}\, dP)\, d\mu$ et calculons:

$$
\begin{aligned}
(A_s, \phi) &= (\bar{F}^{-1}(P^s), \phi \circ \dot{\exp}) \\
&= (P^s, \bar{F}^{-1}(\phi \circ \dot{\exp})) \qquad \text{(déf. de la transf. de Fourier)} \\
&= (P^s, F(\phi \circ \dot{\exp}\, dP)\, d\mu) \\
&= \int_{\mathfrak{h}^\perp} P^s(f)\, F(\phi \circ \dot{\exp}\, dP)(f)\, d\mu(f) \\
&= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} P^s(\omega) \left(\int_{\mathfrak{h}^\perp} F(\phi \circ \dot{\exp}\, dP)(f)\, d\beta_\omega(f) \right) d\nu(\omega)
\end{aligned}
$$

(désintégration de μ; celle-ci est justifiée car $P^s \cdot F(\phi \circ \dot{\exp}\, dP)$ est dans $L^1(\mathfrak{h}^\perp, \mu)$. Donc

$$(A_s, \phi) = \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} P^s(\omega)(S_\omega, \phi)\, d\nu(\omega) \quad (\text{car } S_\omega \circ \dot{\exp} = F(\beta_\omega)).$$

(b) La formule de (a) et le lemme 4.2.1 permettent de calculer, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ et pour ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$

$$
\begin{aligned}
(\lambda(h)_*(A_s), \phi) &= (A_s, \phi \circ \lambda(h)) \\
&= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} P^s(\omega)(S_\omega, \phi \circ \lambda(h))\, d\nu(\omega) \\
&= (A_s, \phi) \qquad (\text{car} \quad S_\omega = \lambda(h)_*(S_\omega))
\end{aligned}
$$

donc $\lambda(h)_*(A_s) = A_s$. Et

$$
\begin{aligned}
(D(A_s), \phi) &= (A_s, {}^tD(\phi)) \\
&= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} P(\omega)^s(S_\omega, {}^t\dot{L}_U(\phi))\, d\nu(\omega) \\
&= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} P(\omega)^s(\dot{L}_U(S_\omega), \phi)\, d\nu(\omega) \\
&= \int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} P(\omega)^{s+1}(S_\omega, \phi)\, d\nu(\omega) \qquad (\text{lemme 4.2.1 et } P(\omega) = V(i\omega)) \\
&= (A_{s+1}, \phi)
\end{aligned}
$$

donc $D(A_s) = A_{s+1}$. Ces égalités se prolongent en égalités de fonctions mérémorphes.

Il est facile maintenant de terminer la démonstration du théorème: Soit E le terme constant dans le développement de Laurent au voisinage de -1 de la fonction méromorphe $s \to A_s$: E est une distribution tempérée sur G/H, H-invariante et telle que $D(E) = A. = \delta_{(H)}$.

4.3.3

L'existence de solutions élémentaires entraine des propriétés de résolubilité:

COROLLAIRE 4.3.3. *Soit D un opérateur différentiel non nul G-invariant sur G/H.*

(a) $D(\mathscr{D}'(G/H)) \supset \mathscr{E}'(G/H)$

(b) $D(\mathscr{E}(G/H)) \supset \mathscr{D}(G/H)$; *on dit que D est semi-globalement résoluble*).

Démonstration. (a) Rappelons la définition de la convolution de deux distributions R dans $\mathscr{E}'(G)$ et R' dans $\mathscr{D}'(G/H)$: notons $\dot{m}\colon G \times G/H \to G/H$ l'action naturelle de G sur G/H, on a alors $R * R' = \dot{m}_*(R \otimes R')$. Donc on a, pour tout ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$ $(R * R', \phi) = (R \otimes R', \phi \circ \dot{m})$.

Remarquons que $D(R * R') = R * D(R')$; en effet, pour ϕ dans $\mathscr{D}(G/H)$,

$$\begin{aligned}(D(R * R'), \phi) &= (R * R', {}^tD(\phi)) = (R(g) \otimes R'(p), {}^tD(\phi)(gp) \\ &= (R(g), (R'(p), ({}^tD(\phi) \circ \lambda(g))(p))) \\ &= (R(g), (R'(p), ({}^tD(\phi \circ \lambda(g)))(p))) \qquad ({}^tD \in {}^G(\mathrm{OD}(G/H))) \\ &= (R(g), (DR'(p), \phi(gp)) = (R * D(R'), \phi)\end{aligned}$$

donc $D(R * R') = R * D(R')$.

Soit maintenant E dans $\mathscr{D}'(G/H)$ tel que $D(E) = \delta_{(H)}$ (th. 4.3.2); soit R dans $\mathscr{E}'(G)$, calculons: $D(R * E) = R * D(E) = R * \delta_{(H)} = p_*(R)$. Soit $s\colon G/H \to G$ la section différentiable de p telle que, pour tout x dans G/H, $s(x)$ est dans P (1.1). Prenons alors $R = s_*(S)$, pour S élément arbitraire de $\mathscr{E}'(G/H)$, la distribution $T = R * E$ vérifie

$$D(T) = (p \circ s)_*(S) = S.$$

(b) Si S est une densité C^∞ à support compact sur G/H, alors on peut trouver une densité C^∞ à support compact R sur G telle que $S = p_*(R)$; donc la démonstration de (a) prouve aussi (b).

4.3.4. *Reprenons les notations de* 3.5

L'espace G_1/H_1 s'identifie à G et ${}^{G_1}(\mathrm{OD}(G_1/H_1))$ s'identifie à l'espace ${}^G(\mathrm{OD}(G))^G$ des opérateurs différentiels biinvariants sur G. Le résultat de M. Raïs [Ra2, corollaire] peut donc se déduire de notre théorème 4.3.2: appelons centrale une distribution de G invariante par automorphisme intérieur:

Tout opérateur différentiel non nul biinvariant sur un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe admet une solution élémentaire tempérée et centrale.

4.4. *Calcul d'un caractère de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$*

Voici une version plus précise de la proposition 4.2.2. Sa démonstration n'utilise pas la formule de Plancherel 3.4 mais une méthode de récurrence.

PROPOSITION 4.4. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe muni d'une involution σ. $\mathscr{G}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}$, H, et P sont comme en* 1.1. *Soient ω dans $H\backslash\mathfrak{h}^{\perp}$, π_{ω} une représentation qui lui est associée (i.e., $\pi_{\omega}\in\zeta_{\omega}$ cf. prop.* 1.3.2), *a_{ω} un élément non nul de $(\mathscr{H}_{\pi_{\omega}}^{-\infty})^{H}$ (prop.* 2.3). *Soit λ_{ω} le caractère de l'algèbre $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ donné par: $\forall U\in\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ $D\pi_{\omega}(U)\,a_{\omega}=\lambda_{\omega}(U)\,a_{\omega}$* (4.2.1)
Alors, pour tout V dans $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ on a l'égalité:

$$\lambda_{\omega}(\beta(V))=V(i\omega).$$

Démonstration. Par récurrence sur $n=\dim G$.

$*\,n=1$: si $\sigma=Id$, le résultat est clair,

si $\sigma=-Id$, on a $\mathscr{G}=G=\mathbb{R}$ et $\mathscr{G}^{*}=\mathfrak{p}^{*}=H\backslash\mathfrak{h}^{\perp}=\mathbb{R}$;

soit X une base de $\mathscr{G}$. On a $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}=\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}X^{n}$. Pour $\omega=aX^{*}$ dans $H\backslash\mathfrak{h}^{\perp}$, π_{ω} est la représentation de dimension 1: $\pi_{\omega}(\exp(xX))=e^{iax}$; donc $D\pi_{\omega}(X)=ia$ et $\lambda_{\omega}(X)=i\omega(X)=X(i\omega)$ et donc, pour tout V dans $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$, on a $\lambda_{\omega}(\beta(V))=V(i\omega)$.

$*\,n>1$: soit f dans $\mathfrak{h}^{\perp}$ et $\omega=Hf$. Notons $\mathscr{Z}$ le centre de $\mathscr{G}$. Le caractère λ_{ω} ne dépend pas de la réalisation de π_{ω}, nous pourrons donc choisir celle-ci à notre convenance. Distinguons plusieurs cas:

1er *Cas.* $\dim(\mathscr{Z}\cap\operatorname{Ker}(f))\geqslant 1$.

Soit $k=\mathscr{Z}\cap\operatorname{Ker}(f)$; k est un idéal de $\mathscr{G}$ stable par σ. Soient K le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie k, $\pi\colon\mathscr{G}\to\mathscr{G}'=\mathscr{G}/k$ et $p\colon G\to G'=G/K$ les projections canoniques, $\mathfrak{h}'=\pi(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{p}'=\pi(\mathfrak{p})$ les espaces propres de σ', f' la forme linéaire sur $\mathscr{G}'$ telle que $f=f'\circ\pi$ et $H'=p(H)$.

Soient $\mathfrak{b}$ une polarisation en f stable par σ et $(X_1,\dots,X_d)$ une base supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathscr{G}$ telle que $\sigma(X_i)=\pm X_i$ $(i=1,\dots,d)$ (lemme 2.2.1). Il est clair que $\mathfrak{b}$ contient k et que $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}/k$ est une polarisation en f' stable par σ'. Choisissons pour réalisation de π_{ω} la représentation de G dans l'espace $L^{2}(\mathbb{R}^{d})$ que nous avions notée π_f en 2.1.3 et qui est construite à partir de la base $(X_1,\dots,X_d)$; $(\pi(X_1),\dots,\pi(X_d))$ est une base supplémentaire de

$\mathfrak{b}'$ dans $\mathscr{G}'$, on a donc aussi une représentation $\pi_{f'}$ de G' dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. Cette représentation est associée à f' et on a l'égalité: $\pi_f = \pi_{f'} \circ p$.

Notons $\theta: \mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbb{C}) \to \mathscr{U}(\mathscr{G}'_\mathbb{C})$ et $\eta: S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}) \to S(\mathfrak{p}'_\mathbb{C})$ les morphismes d'algèbres qui se déduisent de π; on a donc $\theta \circ \beta = \beta' \circ \eta$ où β et β' sont les symétrisations de $\mathscr{G}$ et de $\mathscr{G}'$ (cf. 3.1.2). On a $D\pi_f = D\pi_{f'} \circ \theta$. Remarquons que, si X est dans $\mathscr{G}$, on a $\operatorname{ad} \pi(X) \circ \eta = \eta \circ \operatorname{ad} X$, on en déduit que $\eta(S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}}) \subset S(\mathfrak{p}'_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}'}$.

On a les égalités $\mathscr{H}_{\pi_f}^{-\infty} = \mathscr{H}_{\pi_{f'}}^{-\infty} = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $(\mathscr{H}_{\pi_f}^{-\infty})^H = (\mathscr{H}_{\pi_{f'}}^{-\infty})^{H'}$. Soit donc a_f un vecteur non nul de $(\mathscr{H}_{\pi_f}^{-\infty})^H$; on a en utilisant ces préliminaires et l'hypothèse de récurrence, pour V dans $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}}$:

$$\begin{aligned} D\pi_f(\beta(V))\, a_f &= D\pi_{f'}((\theta \circ \beta)(V))\, a_f = D\pi_{f'}((\beta \circ \eta)(V))\, a_f \\ &= (\eta(V))(if')\, a_f = V(if' \circ \pi)\, a_f = V(if)\, a_f \end{aligned}$$

donc $\lambda_\omega(\beta(V)) = V(i\omega)$.

2ème *Cas*. $\dim(\mathscr{Z} \cap \operatorname{Ker}(f)) = 0$.

Soit Z une base de $\mathscr{Z}$ telle que $f(Z) = 1$. Comme $\mathscr{Z}$ est stable par σ et que f est dans $\mathfrak{h}^\perp$, on a nécessairement $\sigma(Z) = -Z$.

Soit $\mathfrak{b}$ une polarisation de M. V. en f stable par σ (lemme 2.2.1). Comme $C_2(\mathscr{G}) \cap \mathfrak{b}$ n'est pas égal à $\mathscr{Z}$ (lemme 2.1.2) et que $C_2(\mathscr{G}) \cap \mathfrak{b}$ est stable par σ, on peut trouver Y dans $C_2(\mathscr{G}) \cap \mathfrak{b}$ tel que $\sigma(Y) = \pm Y$ et $Y \notin \mathscr{Z}$.

Puisque $[\mathscr{G}, C_2(\mathscr{G})] \subset C_1(\mathscr{G}) = \mathscr{Z}$, il existe une unique forme linéaire ϕ sur $\mathscr{G}$ telle que, pour tout X dans $\mathscr{G}$, $[Y, X] = \phi(X)\, Z$; cette forme linéaire est non nulle car Y n'est pas dans le centre de $\mathscr{G}$. L'identité de Jacobi donne $[[\mathscr{G}, \mathscr{G}],\ C_2(\mathscr{G})] \subset [\mathscr{G}, C_1(\mathscr{G})] = \{0\}$, donc $[\mathscr{G}, \mathscr{G}] \subset \operatorname{Ker}(\phi)$. On a aussi l'inclusion $\mathfrak{b} \subset \operatorname{Ker}(\phi)$ car, si X est dans $\mathfrak{b}$, on a $\phi(X) = f([Y, X]) = B_f(Y, X) = 0$. On a $\phi \circ \sigma = \pm \phi$.

Soit donc $\mathscr{G}' = \operatorname{Ker}(\phi)$; $\mathscr{G}'$ est un idéal de $\mathscr{G}$ contenant $\mathfrak{b}$, stable par σ. Notons $f' = f|_{\mathscr{G}'}$. Montrons que $\mathfrak{b}$ est une polarisation en f'. Il est clair que $\mathfrak{b}$ est totalement isotrope pour $B_{f'}$. Soient $\mathscr{G}(f)$ et $\mathscr{G}'(f')$ les stabilisateurs de f et f' dans $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ respectivement. On sait que $\dim(\mathscr{G}) + \dim(\mathscr{G}(f)) = 2 \dim(\mathfrak{b})$ et l'on veut montrer que $\dim(\mathscr{G}') + \dim(\mathscr{G}'(f')) = 2 \dim(\mathfrak{b})$; il suffit pour cela de montrer que $\mathscr{G}'(f') = \mathscr{G}(f) \oplus \mathbb{R} Y$. Il est clair que $\mathscr{G}(f) \oplus \mathbb{R} Y \subset \mathscr{G}'(f')$; Soient maintenant Y_1 un vecteur de $\mathscr{G} - \mathscr{G}'$ tel que $\phi(Y_1) = 1$ et X un vecteur arbitraire de $\mathscr{G}'(f')$; on a $(X - f([X, Y_1])\, Y) \in \mathscr{G}(f)$. Ceci prouve l'inclusion inverse.

Soit $(Y_2, ..., Y_d)$ une base supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathscr{G}'$ telle que $\sigma(Y_i) = \pm Y_i$ $(i = 2, ..., d)$ et Y_1 un élément de $\mathscr{G} - \mathscr{G}'$ tel que $\sigma(Y_1) = \pm Y_1$ et $\phi(Y_1) = 1$ (cf. lemme 2.2.1). La famille $(Y_1, ..., Y_d)$ est une base supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathscr{G}$.

Soient G' le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathscr{G}'$, $H' = H \cap G'$,

$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathscr{G}'$ et $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathscr{G}'$. Soient π_f et $\pi_{f'}$ les représentations de G et G' dans les espaces $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ obtenues comme en 2.1.3. On a $\mathscr{H}^\infty_{\pi_f} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{H}^\infty_{\pi_{f'}} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ (prop. 2.1.3). Les représentations π_f et $\pi_{f'}$ sont associées aux éléments f de $\mathscr{G}$ et f' de $\mathscr{G}'$ respectivement.

Soit $(Y_{j_1},..., Y_{j_k})$ la sous-famille des vecteurs Y_i invariants par σ. On sait (prop. 2.3 et sa démonstration) que, si E est le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ donné par $E = \{(t_1,..., t_d)/\text{si } t_i \neq 0 \text{ alors il existe } l \text{ tel que } i = j_l\}$ et dE une mesure de Lebesgue sur E, alors l'application a_f de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$, donnée par $a_f(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\psi}(x)\, dE(x)$, est un élément de $(\mathscr{H}^{-\infty}_{\pi_f})^H$. Identifions $\mathbb{R}^{d-1}$ au sous-espace de $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{R}^{d-1} = \{(t_1,..., t_d)/t_1 = 0\}$. Soit alors $E' = E \cap \mathbb{R}^{d-1}$, avec une formule analogue, on construit un élément $a_{f'}$ de $(\mathscr{H}^{-\infty}_{\pi_{f'}})^{H'}$.

Il nous suffit de démontrer que, pour V dans $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ on a $\overline{D\pi_f(\beta(V))}\, a_f = V(if)\, a_f$, i.e., que, pour tout ψ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $\int_{\mathbb{R}^d} ((D\pi_f(\beta(\check{V})))\,\psi)(t)\, dE(t) = V(if) \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\psi}(t)\, dE(t)$. Ce que nous réecrivons: $\forall V \in S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$, $\forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} ((D\pi_f(\beta(V)))\,\psi)(t)\, dE(t) = V(if) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t)\, dE(t). \tag{I}$$

Pour montrer cette égalité (I) nous utiliserons l'hypothèse de récurrence qui nous donne une formule analogue, $\mathbb{R}^d$, π_f, E étant remplacés par $\mathbb{R}^{d-1}$, $\pi_{f'}$ et E'.

Pour U dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}'_{\mathbb{C}})$, notons $D(U)$ l'opérateur différentiel à coefficients polynomiaux sur $\mathbb{R}^d$ obtenu en faisant agir l'opérateur $D\pi_{f'}(U)(\in \mathrm{OD}_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^{d-1}))$ sur $\mathbb{R}^d$, la première variable t_1 étant considérée comme un paramètre.

Calculons grâce à 1.2.4, pour ψ dans $\mathscr{H}^\infty_{\pi_{f'}}$ et X dans $\mathscr{G}'$, $(\phi = W^{-1}(\psi)$; cf. 2.1.3)

$$\begin{aligned}
&((D\pi_{f'})(X)\,\psi)(t_1,..., t_d)\\
&\quad = \frac{d}{ds} (\phi(\exp(-sX) \exp(t_1 Y_1) \cdots \exp(t_d Y_d)))|_{s=0}\\
&\quad = \frac{d}{ds} (\phi(\exp(t_1 Y_1) \exp(-s(e^{-\operatorname{ad}(t_1 Y_1)} X)) \exp(t_2 Y_2) \cdots \exp(t_d Y_d)))|_{s=0}.
\end{aligned}$$

Donc

$$((D\pi_{f'})(X)\,\psi)(t_1,..., t_d) = (D(e^{-\operatorname{ad}(t_1 Y_1)} X)\,\psi))(t_1,..., t_d).$$

On en déduit que, pour U dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}'_{\mathbb{C}})$ et ψ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$((D\pi_{f'}(U))\,\psi)(t_1,..., t_d) = (D(e^{-ad(t_1 Y_1)}\, U)\,\psi)(t_1,..., t_d).$$

Distinguons encore deux sous-cas:

(a) $Y_1 \in \mathfrak{p}$.

On a donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ et $E = E'$; choisissons $dE = dE'$. Montrons qu'on a l'égalité: $S(\mathscr{G}'_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}'} = S(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$: l'inclusion $S(\mathscr{G}'_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}'} \subset S(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ est claire; pour montrer l'inclusion inverse, complétons $(Y_2,..., Y_d)$ en une base $(Y_2,..., Y_n)$ de $\mathscr{G}'$; remarquons que Y ne peut être dans $\mathfrak{p}$ car $[Y, Y_1] = Z$ est dans $\mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$; donc Y est dans $\mathfrak{h}$. Soit alors P un polynôme en n variables tel que $P(Y_1,..., Y_n)$ est dans $S(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$. Pour X dans $\mathfrak{h}$, on a $adX(P(Y_1,..., Y_n)) = 0$; ce qui se réécrit: $\sum_{i=1}^{n} [X, Y_i] P'_i(Y_1,..., Y_n) = 0$. Prenons par exemple $X = Y$; comme $[Y, Y_2] = \cdots = [Y, Y_n] = 0$ et $[Y, Y_1] = Z$, on en déduit $P'_1(Y_1,..., Y_n) = 0$ et P ne dépend que des $n-1$ dernières variables: $P(Y_1,..., Y_n) \in S(\mathscr{G}'_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}'}$. Ceci prouve $S(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}} = S(\mathscr{G}'_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}'}$. On en déduit $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}} = S(\mathfrak{p}'_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}'}$.

Montrons maintenant l'égalité (I): soit V dans $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ et ψ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} ((D\pi_f(\beta(V)))\,\psi)(t)\,dE(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (D(e^{-\operatorname{ad}(t_1 Y_1)}\,\beta(V))\,\psi)(t)\,dE(t)$$

$$(\text{car } \beta(V) \in \mathscr{U}(\mathscr{G}'_{\mathbb{C}}))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (D(\beta(V))\,\psi)(t)\,dE(t)$$

$$(Y_1 \in \mathfrak{p} \text{ donc } t_1 = 0\ dE\text{-presque partout})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (D\pi_{f'}(\beta(V))\,\psi_0)(t_2,..., t_d)\,dE'(t_2,..., t_d)$$

$$(\text{où } \psi_0(t_2,..., t_d) = \psi(0, t_2,..., t_d))$$

$$= V(if') \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \psi_0(t_2,..., t_d)\,dE'(t_2,..., t_d)$$

$$(\text{hyp. de récurrence; } V \in S(\mathfrak{p}'_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}'})$$

$$= V(if) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t)\,dE(t)$$

C'est bien l'égalité (I) cherchée.

(b) $Y_1 \in \mathfrak{h}$.

On a donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, $E' = E \cap \{t \in \mathbb{R}^d / t_1 = 0\}$ et $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}} \subset S(\mathfrak{p}'_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}'}$.

Choisissons sur E une mesure de Lebesgue telle que $dE = dt_1 \otimes dE'$. Calculons, pour V dans $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^\mathfrak{h}$ et ψ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} ((D\pi_f(\beta(V)))\,\psi)(t)\,dE(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (D(e^{-\operatorname{ad}(t_1 Y_1)}\beta(V))\,\psi)(t)\,dE(t)$$

$$(\text{car } \beta(V) \in \mathscr{U}(\mathscr{G}'_\mathbb{C}))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (D(\beta(e^{-\operatorname{ad}(t_1 Y_1)}\,V))\,\psi)(t)\,dE(t)$$

$$(\text{car } \beta \circ \operatorname{ad} Y_1 = \operatorname{ad} Y_1 \circ \beta)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (D(\beta(V))\,\psi)(t)\,dE(t)$$

$$(Y_1 \in \mathfrak{h} \text{ donc } e^{-\operatorname{ad}(t_1 Y_1)}\,V = V)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dt_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (D\pi_{f'}(\beta(V))\,\psi_{t_1})(t_2,\dots,t_d)\,dE'(t_2,\dots,t_d)$$

$$(\text{où } \psi_{t_1}(t_2,\dots,t_d) = \psi(t_1,\dots,t_d))$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dt_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} V(if')\,\psi_{t_1}(t_2,\dots,t_d)\,dE'(t_2,\dots,t_d)$$

$$(\text{hyp. de récurrence})$$

$$= V(if) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t)\,dE(t).$$

C'est bien l'égalité (I) cherchée, ceci termine la démonstration.

Bibliographie

[At] M. F. Atiyah, Resolution of singularities and division of distributions, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 145–150.

[B1] Y. Benoist, Sur l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique nilpotent, *C.R.A.S.* Paris 295 série A (1982), p. 59–62.

[B2] Y. Benoist, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **296** (1983), 489–492.

[B3] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, à paraître aux *Mém. Soc. Math. France* (*N.S.*), 1984.

[Be] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, M. Levy-Nahas, M. Rais, P. Renouard, and M. Vergne, Représentations des groupes de Lie résolubles, *in* "Monograph. Soc. Math. France," No. 4, Dunod, Paris, 1972.

[Ber] I. N. BERNSTEIN, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. Anal. Appl.* **6** (1972), 273–285.

[Bo] N. BOURBAKI, "Intégration," Hermann, Paris.

[Ca] P. CARTIER, Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, *in* Lecture Notes in Math., Vol. 514, pp. 20–34, Springer, Berlin/New York, 1975.

[Co] E. CORWIN, F. P. GREENLEAF, AND R. PENNEY, A general character formula for irreducible projections on L^2 of a nilmanifold, *Math. Ann.* **225** (1977), 21–32.

[Di] J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthier–Villars, Paris, 1974.

[Du] M. DUFLO, Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **289** (1979), 135–137.

[Ef] E. G. EFFROS, Transformation groups and C^*-algebras, *Ann. of Math.* **81** (1965), 38–55.

[He1] S.HELGASON, "Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces," Academic Press, New York, 1978.

[He2] S. HELGASON, Invariant differential operators and eigenspace representations, *in* Lecture Notes, Vol. 34, pp. 236–286, London Math. Soc., Cambridge, 1979.

[Ki1] A. A. KIRILLOV, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Uspekhi Mat. Nauk.* **17** (4) (1962), 57–110.

[Ki2] A. A. KIRILLOV, Plancherel measure for nilpotent Lie groups, *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967), 330–331.

[Li] A. LICHNEROWICZ, Opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène, *Ann. Scientifique Ecole Norm. Sup.* 3e *Sér.* **81** (1964), 341–385.

[Pe] R. PENNEY, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, *J. Funct. Anal.* **18** (1975), 177–190.

[Po] N. S. POULSEN, On C^∞-vectors and intertwinning bilinear forms for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.* **9** (1972), 87–120.

[Ra1] M. RAIS, Représentations des groupes de Lie nilpotents et méthode des orbites, *Cours du C.I.M.P.A.*, Analyse Harmonique, 1982.

[Ra2] M. RAIS, Solutions élémentaires des opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie nilpotent, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **273** (1971), 495–498.

[S] G. SCHIFFMANN, Distributions centrales de type positif sur un groupe de Lie nilpotent, *Bull. Soc. Math. France* **96** (1968), 347–355.

[Sc1] L. SCHWARTZ, "Théorie des distributions," Hermann, Paris, 1973.

[Sc2] L. SCHWARTZ, "Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés; applications aux représentations des groupes de Lie," pp. 153–163, 2e coll. sur l'analyse fonctionnelle, Liège 1964.

[We] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds, *in* "Conf. Board. Math. Soc." No. 29, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.