BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES BENOIST

$\mathfrak{n}$-coinvariants des $\mathfrak{g}$-modules $\mathfrak{n}$-localement nilpotents

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n^{o} 4 (1988), p. 413-429.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_4_413_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 413–429.

$\mathfrak{n}$-COINVARIANTS DES $\mathfrak{g}$-MODULES $\mathfrak{n}$-LOCALEMENT NILPOTENTS

PAR

YVES BENOIST (*)

RÉSUMÉ. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ une sous-algèbre parabolique. Nous décrivons, pour tout $\mathfrak{g}$-module M $\mathfrak{n}$-localement nilpotent, le $\mathfrak{p}$-module $M/_{\mathfrak{n}^k M}$ en fonction des quotients simples de dimension finie de M.

ABSTRACT. — Let $\mathfrak{g}$ be a semi-simple Lie algebra, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ be a Borel subalgebra and M be a $\mathfrak{n}$-locally nilpotent $\mathfrak{g}$-module. We describe the $\mathfrak{p}$-module $M/_{\mathfrak{n}^k M}$ in terms of the finite dimensional simple quotients of M.

1. Introduction

1.1. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}^*$ son dual, $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ le système de racines, W le groupe de Weyl et $(\ ,\ )$ la forme bilinéaire sur $\mathfrak{h}^*$ duale de la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}$. Pour $\alpha \in \Delta$, on note $\mathfrak{g}^\alpha$ l'espace de poids α et $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ la coracine.

Soient Δ^+ un système de racines positives, $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples, $\mathfrak{n}_\emptyset = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{n}_{\emptyset-} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_\emptyset$, w_0 l'élément de W tel que $w_0\Delta^+ \cap \Delta^+ = \emptyset$ et $P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall\alpha \in \Delta^+, (\lambda, \alpha) \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des poids entiers dominants.

Soient B' une partie de B, $\mathfrak{a} = \{H \in \mathfrak{h} \mid \forall\alpha \in B', \alpha(H) = 0\}$, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{n}_\emptyset]$, $\mathfrak{n}_- = [\mathfrak{a}, \mathfrak{n}_{\emptyset-}]$, $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{a}, [H, X] = 0\}$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ la sous-algèbre parabolique associée à B'. Soient $k, \ell \geq 1$.

1.2. — Soit M un $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{n}$-localement nilpotent (i.e. $\forall m \in M$ $\forall X \in \mathfrak{n}$ $\exists n \geq 1/X^n m = 0$). Nous décrivons le $\mathfrak{p}$-module $M/_{\mathfrak{n}^k M}$ en

(*) Texte reçu le 20 mars 1987, révisé le 11 juin 1987.

Y. BENOIST, Université Paris VII, UER de Mathématiques, UA 748 du CNRS, Tour 45-55, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

fonction des quotients simples de dimension finie de M. Ceci nous permet de calculer le $(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$-bimodule $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$ (THÉORÈME 7.1).

En particulier, nous montrons que le $(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$-bimodule $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}_\emptyset\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset}$ est isomorphe à $\bigoplus_{\lambda\in P^+}\mathbb{C}_{(w_0\lambda,\lambda)}$ et donnons un relèvement à $\mathcal{U}$ des droites $\mathbb{C}_{(w_0\lambda,\lambda)}$ (COROLLAIRE 7.2). Ceci répond par l'affirmative à une conjecture de M. DUFLO.

De façon analogue, nous décrivons, pour tout $\mathfrak{g}$-module M, le quotient $M/_{\mathfrak{n}^kM+\mathfrak{n}_-^\ell M}$ et identifions $\varprojlim_{k,\ell} M/_{\mathfrak{n}^kM+\mathfrak{n}_-^\ell M}$ (PROPOSITIONS 4.1.a et 4.2.a).

1.3. — La démonstration est basée sur l'existence d'une graduation $\mathfrak{g}=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_p$ telle que $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{n}=\bigoplus_{p>0}\mathfrak{g}_p$ et $\mathfrak{n}_-=\bigoplus_{p<0}\mathfrak{g}_p$, sur l'étude du $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$ et sur la semi-simplicité des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie.

Une partie de ces résultats se généralise (PROPOSITIONS 4.1 et 4.2) à une classe d'algèbres de Lie graduées (appelée classe $\mathcal{A}$) contenant, outre les algèbres de Lie semi-simples, les algèbres de Kac-Moody, les algèbres de Cartan, l'algèbre de Virasoro...

Je remercie A. BOUAZIZ et M. DUFLO pour d'intéressantes discussions à ce sujet.

1.4 Plan.

2. La classe $\mathcal{A}$ d'algèbres de Lie graduées

2.1. Notations. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (sur $\mathbb{C}$) graduée (sur $\mathbb{Z}$) : $\mathfrak{g}=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_p$ avec $[\mathfrak{g}_p,\mathfrak{g}_q]\subset\mathfrak{g}_{p+q}$. On note $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{n}=\bigoplus_{p>0}\mathfrak{g}_p$, $\mathfrak{n}_-=\bigoplus_{p<0}\mathfrak{g}_p$ et $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$.

Soit $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ qui est aussi naturellement graduée : $\mathcal{U}=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\mathcal{U}_p$. Pour tout sous-espace vectoriel A de $\mathcal{U}$, $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on note $A_p=A\cap\mathcal{U}_p$ et A^q le sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ engendré par les éléments de la forme $a_1\dots a_q$ avec $a_i\in A$. On dit que A est gradué si $A=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}A_p$. Dans ce cas, on pose $(\mathcal{U}/A)_p=\mathcal{U}_p/A_p$.

Un $\mathfrak{g}$-module M est dit graduable s'il admet une graduation $M = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} M_p$ avec $\mathfrak{g}_p M_q \subset M_{p+q}$ et gradué si on a choisi une telle graduation. Un module gradué est dit "gradué simple" s'il est non nul et s'il n'admet pas de sous-module gradué autre que $\{0\}$ et lui-même.

Soient $\mathfrak{g}^\wedge$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie et $\mathcal{J}$ l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de codimension finie de $\mathcal{U}$. Pour $F \in \mathfrak{g}^\wedge$, on note I_F son annulateur dans $\mathcal{U}$. L'application $F \to I_F$ est une bijection de $\mathfrak{g}^\wedge$ sur $\mathcal{J}$. Un idéal bilatère gradué de $\mathcal{U}$ est dit "gradué maximal" s'il est maximal parmi les idéaux bilatères gradués différents de $\mathcal{U}$.

Soient $\mathfrak{g}_g^\wedge$ l'ensemble des $\mathfrak{g}$-modules simples graduables de dimension finie et $\mathcal{J}_g$ l'ensemble des idéaux bilatères "gradués maximaux" de codimension finie de $\mathcal{U}$. Remarquons que tout module "gradué simple" de dimension finie fournit un élément de $\mathfrak{g}_g^\wedge$, que la graduation sur $F \in \mathfrak{g}_g^\wedge$ est unique (à translation par un entier près), que $\mathcal{J}_g$ est inclus dans $\mathcal{J}$ et que l'application $F \to I_F$ induit une bijection de $\mathfrak{g}_g^\wedge$ sur $\mathcal{J}_g$; cela résulte du LEMME 2.1 ci-dessous.

Pour $A, B \subset \mathcal{U}$ et M un $\mathfrak{g}$-module, on note $M^A = \{m \in M \mid \forall u \in A, um = 0\}$ l'espace des A-invariants, $M_A = M/_{AM}$ l'espace des A-coïnvariants, $M^{A,B} = M^{A\cup B}$ et $M_{A,B} = M_{A\cup B}$; ainsi, pour $F \in \mathfrak{g}^\wedge$, M_{I_F} est le plus grand $\mathfrak{g}$-module quotient de M qui soit une somme directe de modules isomorphes à F. On pose $L(M) = \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} M_I$, $L(M)$ est un $\mathfrak{g}$-module localement fini (i.e. $\forall m \in L(M)$ $\dim \mathcal{U}m < \infty$).

LEMME 2.1. — *Soit $R = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} R_p$ une algèbre associative graduée (avec unité).*

a) *Soit $V = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} V_p$ un R-module "gradué simple" de dimension finie, alors V est un R-module simple.*

b) *Soit V un R-module simple graduable de dimension finie, alors la graduation sur V est unique à translation par un entier près.*

c) *Supposons R "graduée simple" (i.e. $\{0\}$ est un idéal bilatère "gradué maximal" de R) et de dimension finie, alors R a un unique module simple graduable V et R s'identifie à* End(V) *comme algèbre graduée.*

Démonstration.

a) Montrons que pour tout v dans V, on a l'égalité $Rv = V$. Ecrivons pour cela $V = \bigoplus_{p_0\le p\le p_1} V_p$ avec $V_{p_0} \neq 0$ et $v = \sum_{q_0\le p\le q_1} v_p$ avec $v_{q_1} \neq 0$. Le sous-module Rv_{q_1} est gradué, il est donc égal à V. On déduit les égalités : $R_{p_0-q_1}v = R_{p_0-q_1}v_{q_1} = V_{p_0}$ donc $Rv \supset RV_{p_0} = V$. C'est ce que l'on voulait.

b) Soient d_i $(i = 1, 2)$ deux graduations de V. Soient $D_i : V \to V$ les applications linéaires données par $D_i(v) = 2^p v$ pour tout élément v tel que $d_i(v) = p$. L'application linéaire $D_2 \circ D_1^{-1}$ commute à l'action de R, elle est donc scalaire et d_1 et d_2 coïncident à un entier près.

c) Soit I un idéal à gauche "gradué maximal" et $V = R/I$. L'algèbre graduée R s'identifie à $\mathrm{End}(V)$ d'après a) et V est l'unique module simple de R.

2.2. — Introduisons une classe d'algèbres de Lie graduées adaptée à notre problème :

Définition. — Une algèbre de Lie graduée est dans la classe $\mathcal{A}$ si elle vérifie (avec les notations de 2.1) :

(A1) $\mathfrak{g}$ est de type fini (comme algèbre de Lie).

(A2) $\forall p \in \mathbb{Z}$ $\dim \mathfrak{g}_p < \infty$.

(A3) $\mathfrak{m} \subset [\mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}]$.

(A4) Pour tout idéal gradué $\mathfrak{r}$ de codimension finie dans $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple.

L'hypothèse (A3) est équivalente à (A3′) : $\mathfrak{g}$ est engendrée comme algèbre de Lie par $\mathfrak{n}_-$ et $\mathfrak{n}$. En effet, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{m} \cap [\mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}] \oplus \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Cette hypothèse n'est pas très restrictive car on peut toujours remplacer $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}'$... c'est d'ailleurs ce que nous ferons pour les algèbres de Kac-Moody.

LEMME 2.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée vérifiant* (A1) *et* (A2), *alors $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_-$ sont des algèbres de Lie de type fini.*

Démonstration. — C'est le lemme 18 de [Ma] : soient $a \le 0 \le b$ tels que $\bigoplus_{a\le p\le b} \mathfrak{g}_p$ engendre $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}'$ (resp. $\mathfrak{n}'_-$) la sous-algèbre engendrée par $\bigoplus_{0<p\le b} \mathfrak{g}_p$ (resp. $\bigoplus_{a\le p<0} \mathfrak{g}_p$); on montre que $\mathfrak{n}'_- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, elle est donc égale à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$, $\mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}'_-$.

3. Exemples d'algèbres de la classe $\mathcal{A}$

3.1. Algèbres de dimension finie. — Toute algèbre de Lie graduée de dimension finie de la classe $\mathcal{A}$ est semi-simple d'après (A4).

LEMME 3.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple.*

a) *Si $\mathfrak{g}$ est graduée alors $\mathfrak{p} = \bigoplus_{p\ge 0} \mathfrak{g}_p$ est une sous-algèbre parabolique, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{p\ge 1} \mathfrak{g}_p$ est le radical unipotent de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0$ est une composante réductive de $\mathfrak{p}$.*

b) *Réciproquement, soient $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ le radical unipotent de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m}$ une composante réductive de $\mathfrak{p}$. Alors il existe une graduation sur $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{n} = \bigoplus_{p\ge 1} \mathfrak{g}_p$.*

c) *Une telle algèbre de Lie graduée est dans la classe $\mathcal{A}$ si et seule-*

ment si on a (A3″) *: $\mathfrak{n}$ rencontre de façon non triviale tous les idéaux simples de $\mathfrak{g}$.*

On peut toujours supposer $(\mathfrak{p},\mathfrak{n},\mathfrak{m})$ construit comme en 1.1 ([Bo 1]VI § 1.7 proposition 20). Dans ce cas, on a l'équivalence : $(A3'') \Leftrightarrow B\backslash B'$ rencontre toutes les composantes connexes du diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est simple, on a l'équivalence : $(A3'') \Leftrightarrow \mathfrak{n} \neq 0$.

Démonstration. — Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $Q = \mathbb{Z}\Delta$ le réseau des racines. Soit $f : Q \to \mathbb{Z}$ un morphisme de groupes. On construit une graduation sur $\mathfrak{g}$ en posant, pour p dans $\mathbb{Z}$, $\mathfrak{g}_p = \bigoplus_{\{\alpha\in Q \mid f(\alpha)=p\}} \mathfrak{g}^\alpha$.

Montrons que l'on obtient ainsi toutes les graduations sur $\mathfrak{g}$: soit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ une graduation, l'application linéaire $d : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telle que, pour X dans $\mathfrak{g}_p$, $d(X) = pX$ est une dérivation, elle est donc intérieure et il existe un élément semi-simple H de $\mathfrak{g}$ tel que, pour X dans $\mathfrak{g}$, $d(X) = [H,X]$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan contenant H. Comme $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, chacun des sous-espaces $\mathfrak{g}_p$ est stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}$. Pour toute racine α, il existe un unique entier $f(\alpha)$ tel que $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}_{f(\alpha)}$. On a $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$ et $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ dès que cela a un sens. On peut donc prolonger f en un morphisme de groupe du réseau des racines dans $\mathbb{Z}$ ([Bo 1, VI, § 1.6, corollaire 2 de la proposition 19]).

Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ stable par $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$ on note $\Delta_{\mathfrak{k}} = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{k}\}$.

a) On peut supposer que la graduation est construite comme ci-dessus. L'égalité $\Delta_{\mathfrak{p}} \cup -\Delta_{\mathfrak{p}} = \Delta$ prouve que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ ([Bo 2, VIII, §3.4, proposition 11]). Les égalités $\Delta_{\mathfrak{n}} = \{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}} \mid -\alpha \notin \Delta_{\mathfrak{p}}\}$ et $\Delta_{\mathfrak{m}} = \Delta_{\mathfrak{p}} \cap -\Delta_{\mathfrak{p}}$ prouvent que $\mathfrak{n}$ est le radical unipotent de $\mathfrak{p}$ et que $\mathfrak{m}$ est une composante réductive de $\mathfrak{p}$ ([Bo 2, VIII, §3.4, proposition 13]).

b) On peut supposer $(\mathfrak{p},\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ construits comme en 1.1. Montrons que la graduation associée à un morphisme $f : Q \to \mathbb{Z}$ donné par $f(\alpha) = 0$ lorsque α est dans B' et $f(\alpha) > 0$ lorsque α est dans $B\backslash B'$ convient. On a les égalités : $\Delta_{\mathfrak{m}} = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha|_{\mathfrak{a}} = 0\} = \{\alpha = \sum_{1\le i\le r} n_i\alpha_i \in \Delta \mid \forall\alpha_i \in B\backslash B' \text{ on a } n_i = 0\} = \{\alpha \in \Delta \mid f(\alpha) = 0\}$ et $\Delta_{\mathfrak{n}} = \{\alpha \in \Delta^+;\ \alpha|_{\mathfrak{a}} \neq 0\} = \{\alpha = \sum_{1\le i\le r} n_i\alpha_i \in \Delta^+ \mid \exists\alpha_i \in B\backslash B' \text{ avec } n_i \neq 0\} = \{\alpha \in \Delta \mid f(\alpha) > 0\}$. Ceci prouve bien les égalités $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{n} = \bigoplus_{p>0} \mathfrak{g}_p$.

c) Soient $\mathfrak{g} = \oplus\mathfrak{g}(i)$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en idéaux simples, $\mathfrak{p}(i) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}(i)$, $\mathfrak{n}(i) = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(i)$ et $\mathfrak{n}_-(i) = \mathfrak{n}_- \cap \mathfrak{g}(i)$. $\mathfrak{p}(i)$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}(i)$ et on a $\mathfrak{n} = \oplus\mathfrak{n}(i)$, $\mathfrak{n}_- = \oplus\mathfrak{n}_-(i)$. Les algèbres $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_-$ engendrent $\mathfrak{g}$ si et seulement si, pour tout i, les algèbres $\mathfrak{n}(i)$ et

$\mathfrak{n}_-(i)$ engendrent $\mathfrak{g}(i)$.

On peut donc supposer $\mathfrak{g}$ simple et on veut montrer que si $\mathfrak{n} \neq 0$ alors $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_-$ engendrent $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}'$ la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_-$, il suffit de montrer que, $\forall \alpha \in B \cup -B$, $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}'$. C'est clair si $\alpha \in B \backslash B'$. Si $\alpha \in B'$, écrivons $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ avec, $\forall i = 1, \dots, r-1$, $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) < 0$. Fixons i tel que $\alpha_i = \alpha$ et j tel que $\alpha_j \notin B'$, on a par exemple $i < j$. Posons $\beta = \sum_{i<k\leq j} \alpha_k$ et $\gamma = \alpha + \beta$, on vérifie facilement que $\beta \in \Delta$ et $\gamma \in \Delta$ ([Bo 1, VI, §1.6, corollaire 3 de la proposition 19]). On en déduit $[\mathfrak{g}^\gamma, \mathfrak{g}^{-\beta}] = \mathfrak{g}^\alpha$, or $\mathfrak{g}^\gamma \subset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{g}^{-\beta} \subset \mathfrak{n}_-$, donc $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}'$. On fait de même pour $\alpha \in -B$, ce qui prouve (A3).

Remarques. — Si, dans b), on choisit f de telle sorte que $f(\alpha) = 1$ lorsque α est dans $B \backslash B'$, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}_-$) est engendrée par $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_{-1}$). En effet, $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ engendre $\mathfrak{g}$ et on procède comme dans le LEMME 2.2.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple graduée, on a $\mathfrak{g}^\wedge_g = \mathfrak{g}^\wedge$ et $\mathcal{J}_g = \mathcal{J}$.

3.2. Les algèbres de Kac-Moody. — Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de Cartan généralisée (i.e. $\forall i\, a_{ii} = 2$; $\forall i \neq j$ $a_{ij} \in -\mathbb{N}$ et $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$) et $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie graduée définie par les générateurs $(h_i, e_i, f_i)_{1\leq i\leq n}$, avec $d^\circ h_i = 0$, $d^\circ e_i = 1$, $d^\circ f_i = -1$, et les relations $\forall i, j$ $[h_i, h_j] = 0$, $[h_i, e_j] = a_{ij} e_j$, $[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j$, $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$ (avec les notations de [Ka 2, remarque 1.5], on a $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}'(A)$). Soit $\mathfrak{r}$ un idéal gradué (sur $\mathbb{Z}$) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$.

LEMME 3.2. — *Avec les notations ci-dessus,* $\mathfrak{g}$ *est dans la classe* $\mathcal{A}$.

Démonstration. — Le théorème 1.2 de [Ka 2] donne (A2). (A1) et (A3) sont clairs. Pour montrer (A4), il suffit de voir que si $\mathfrak{r}$ est un idéal $\mathbb{Z}$-gradué de codimension finie de $\tilde{\mathfrak{g}}$ alors $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$ est semi-simple.

Soit $Q = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ est gradué sur Q par $d^\circ h_i = 0$, $d^\circ e_i = \alpha_i^\vee$, $d^\circ f_i = -\alpha_i^\vee$. Quitte à remplacer $\mathfrak{r}$ par un idéal Q-gradué plus petit, on peut supposer $\mathfrak{r}$ gradué sur Q (utiliser les n familles à un paramètre d'automorphismes de $\tilde{\mathfrak{g}}$ associées aux n dérivations définies par la Q-graduation). On se ramène alors au cas où A est indécomposable ([Ka 2, §1.2]).

Si A n'est pas de type fini ([Ka 2, §4.3]), on a forcément $\mathfrak{r} = \tilde{\mathfrak{g}}$ ([Ka 2, propositions 1.7 et 4.9]).

Si A est de type fini, $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$ est simple ou nulle ([Ka 2, théorème 9.11]); car, comme $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$ est de dimension finie, les éléments $(\mathrm{ad} e_i)^{1-a_{ij}}(e_j)$ et $(\mathrm{ad} f_i)^{1-a_{ij}}(f_j)$ sont dans $\mathfrak{r}$ pour tout $i \neq j$.

3.3. Autres algèbres de la classe $\mathcal{A}$. — Toute algèbre de Lie "graduée simple" vérifiant (A2) est de la classe $\mathcal{A}$ (par exemple, les algèbres de Cartan *cf.* [Ka 1, §III.1]). Certaines extensions centrales d'algèbres de Lie graduées simples sont dans la classe $\mathcal{A}$ (par exemple, l'algèbre de Virasoro $\mathfrak{v} = (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n) \oplus \mathbb{C}Z$ avec $[Z, L_n] = 0$ et $[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + 1/12(n^3 - n)\delta_{n,-m}Z$ pour n et m dans $\mathbb{Z}$).

4. Propriétés des algèbres de la classe $\mathcal{A}$

Reprenons les notations du 2 et énonçons les résultats centraux de cet article.

4.1. $\mathfrak{n}$-coïnvariants des $\mathfrak{g}$-modules $\mathfrak{n}$-localement nilpotents.

PROPOSITION 4.1. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée de la classe $\mathcal{A}$, M un $\mathfrak{g}$-module et $\varphi : M \to \prod_{I\in\mathcal{J}_g} M_I$ le morphisme de $\mathfrak{g}$-modules donné par $\varphi(m) = (m + IM)_{I\in\mathcal{J}_g}$.*

a) *φ induit (par passage aux quotients) un isomorphisme de $\mathfrak{m}$-modules $\tilde{\varphi} : M_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell} \xrightarrow{\sim} L(M)_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell} (= \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g}(M_I)_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell})$ et donne une identification de $\mathfrak{g}$-modules : $\varprojlim_{k,\ell} M_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell} \xrightarrow{\sim} \prod_{I\in\mathcal{J}_g} M_I$.*

b) *Si $\forall m \in M$, $\exists n > 0$ tel que $\mathfrak{n}^n m = 0$, alors φ induit un isomorphisme de $\mathfrak{p}$-modules $\dot{\varphi} : M_{\mathfrak{n}^k} \xrightarrow{\sim} L(M)_{\mathfrak{n}^k} (= \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g}(M_I)_{\mathfrak{n}^k})$.*

En particulier, $M_{\mathfrak{n}} = 0 \Leftrightarrow M$ n'a pas de quotient gradué simple de dimension finie.

Remarques. — Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, on a l'équivalence : $\forall m \in M$, $\exists n > 0$ tel que $\mathfrak{n}^n m = 0 \Leftrightarrow M$ est $\mathfrak{n}$-localement nilpotent.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée et $\mathfrak{r}$ un idéal gradué de codimension finie. Supposons que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ n'est pas semi-simple et montrons qu'alors on peut construire un $\mathfrak{g}$-module gradué de dimension finie non semi-simple mais $\mathfrak{n}$-localement nilpotent : si l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ ne convient pas, c'est que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est réductif, on construit alors facilement un tel module nul sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Ceci prouve que l'hypothèse (A4) est nécessaire pour montrer 4.1.b.

4.2. Calcul de $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^\ell}$.

PROPOSITION 4.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée de la classe $\mathcal{A}$. Le morphisme de $(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$-bimodules $\Psi : \mathcal{U} \to \prod_{F\in\mathfrak{g}_g^\wedge} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F, F)$ donné par $\Psi(u)_F(x) = ux$ $\forall u \in \mathcal{U}$ $\forall x \in F$ induit :*

a) *un isomorphisme de* $(\mathfrak{g},\mathfrak{m})$*-bimodules de dimension finie*

$$\overline{\Psi} : \mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{F\in\mathfrak{g}_g^\wedge} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\mathfrak{n}_-^k,\mathfrak{n}^\ell}, F)$$

b) *un isomorphisme de* $(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$*-bimodules*

$$\dot{\Psi} : \mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{F\in\mathfrak{g}_g^\wedge} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\mathfrak{n}^\ell}, F_{\mathfrak{n}^k}).$$

Les parties b) de ces propositions sont le résultat central de cet article. Les parties a), plus faciles, leurs sont analogues et forment plus ou moins une étape dans la démonstration des parties b). Les démonstrations des propositions 4.1 et 4.2 vont de pair et sont menées dans les deux prochaines parties.

5. La graduation de $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$

Nous étudions en 5.1 et 5.2 le $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$; nous comparons en 5.3 les $\mathfrak{m}$-modules $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$ et $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$; nous explicitons en 5.4 le cas $\mathfrak{g} = \mathcal{S}\ell(2)$.

5.1. — Commençons par un lemme technique. Notons $\mathcal{U}^n(\mathfrak{m})$ (resp. $\mathcal{U}^n(\mathfrak{g})$) la filtration habituelle de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{m}$ (resp. de $\mathfrak{g}$).

LEMME 5.1. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie graduée,* $p \geq 1$*,* $X \in \mathfrak{g}_p$ *et* $Y \in \mathfrak{g}_{-p}$*. Alors,* $\forall \ell \geq 1$*, on a*

$$[X,Y]^\ell \in \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{m}) + \mathcal{U}\mathfrak{n}_- + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell.$$

Démonstration. — Posons $H = [X,Y] \in \mathfrak{m}$ et notons ad l'action adjointe. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad} Y(X^\ell) &= \ell X^{\ell-1}[Y,X] \mod \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g})\\
(\operatorname{ad} Y)^2(X^\ell) &= \ell(\ell-1)X^{\ell-2}[Y,X]^2 + \ell X^{\ell-1}[Y,[Y,X]] \mod \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g})\\
&= \ell(\ell-1)X^{\ell-2}[Y,X]^2 \mod \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}\mathfrak{n}_-\\
&\dots\\
(\operatorname{ad} Y)^\ell(X^\ell) &= \ell![Y,X]^\ell \mod \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}\mathfrak{n}_-
\end{aligned}$$

Or $(\operatorname{ad} Y)^\ell(X^\ell) = \sum_{0\leq i\leq \ell}(-1)^i C_\ell^i Y^{\ell-i}X^\ell Y^i = Y^\ell X^\ell \mod \mathcal{U}\mathfrak{n}_-$. On a donc

$$H^\ell = (-1)^\ell/\ell! Y^\ell X^\ell \mod \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}\mathfrak{n}_-.$$

D'où $H^\ell \in \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}\mathfrak{n}_- + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell$. Chacun de ces espaces est gradué, donc $H^\ell \in (\mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g}))_0 + (\mathcal{U}\mathfrak{n}_-)_0 + (\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell)_0$. Le théorème de Poincaré-Birkoff-Witt donne l'égalité $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{m}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$, on en déduit $\mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{g})_0 \subset \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{m}) \oplus \mathcal{U}\mathfrak{n}_-$. Finalement, $H^\ell \in \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{m}) + \mathcal{U}\mathfrak{n}_- + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell$.

5.2. — Voici l'étape principale dans la démonstration de 4.2.a.

LEMME 5.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée vérifiant* (A1), (A2) *et* (A3), *alors* $\forall k, \ell \geq 1$ $\dim \mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} < \infty$.

Remarque. — Lorsque $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_-$ sont engendrés par des éléments ad-localement nilpotents, ce lemme est une conséquence de la proposition 3.8 de [Ka 2].

Démonstration. — Par récurrence sur k. Soit $\bar{1}$ l'image de $1 \in \mathcal{U}$ dans le $\mathfrak{g}$-module gradué $M = \mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$.

a) Si $k = 1$. — Considérons l'idéal bilatère $I_\ell = (\mathcal{U}\mathfrak{n}_- + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{m})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{m})$. Montrons que $\dim \mathcal{U}(\mathfrak{m})/I_\ell < \infty$.

D'après (A2) et (A3), on peut choisir une base de $\mathfrak{m}$ $H_i = [X_i, Y_i]$ $i = 1, \ldots, n$ avec $X_i \in \mathfrak{g}_{p_i}$, $Y_i \in \mathfrak{g}_{-p_i}, p_i \geq 1$. On en déduit l'égalité $\mathcal{U}(\mathfrak{m}) = \mathcal{U}^{n(\ell-1)}(\mathfrak{m}) + I_\ell$. En effet, montrons par récurrence sur d que $\mathcal{U}^d(\mathfrak{m}) \subset \mathcal{U}^{n(\ell-1)}(\mathfrak{m}) + I_\ell$. C'est clair si $d \leq n(\ell - 1)$. Si $d > n(\ell - 1)$, il suffit de voir que si $\ell_1 + \cdots + \ell_n = d$ alors $H_1^{\ell_1} \ldots H_n^{\ell_n} \in \mathcal{U}^{d-1}(\mathfrak{m}) + I_\ell$; or il existe i tel que $\ell_i \geq \ell$, ce qui permet de conclure car $H_i^\ell \in \mathcal{U}^{\ell-1}(\mathfrak{m}) + I_\ell$ (LEMME 5.1). Ceci prouve que $\dim \mathcal{U}(\mathfrak{m})/I_\ell < \infty$.

Le module M est un quotient gradué des modules $N = \mathcal{U}/_{\mathcal{U}I_\ell + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$ et $N' = \mathcal{U}/_{\mathcal{U}I_\ell + \mathcal{U}\mathfrak{n}_-}$. Comme espace vectoriel gradué, on a par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt,

$$N = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes \big(\mathcal{U}(\mathfrak{m})/I_\ell\big) \otimes \big(\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathfrak{n}^\ell \mathcal{U}(\mathfrak{n})\big);$$

or $\dim \mathcal{U}(\mathfrak{m})/I_\ell < \infty$ et, comme $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie de type fini (LEMME 2.2), $\dim \mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathfrak{n}^\ell \mathcal{U}(\mathfrak{n}) < \infty$. Donc $N = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} N_p$ est un module gradué tel que d'une part $\forall p \in \mathbb{Z}$ $\dim N_p < \infty$ et d'autre part $\exists p_0 \geq 0$ tel que $\forall p > p_0$ $N_p = 0$. En raisonnant de même avec N', on en déduit que M est un module gradué $M = \bigoplus_{p_1 \leq p \leq p_0} M_p$ avec $\dim M_p < \infty$.

b) Si $k > 1$. — Soient $(Y_i)_{i=1,\ldots,r}$ une famille de générateurs homogènes de $\mathfrak{n}_-$ (LEMME 2.2), $p_i = -d^\circ Y_i$, $v_i = Y_i \bar{1}$ et $M_i = \mathcal{U} v_i$. Le module $M/_{M_1 + \cdots + M_r} = \mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_- + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$ est de dimension finie.

Soient $(X_j)_{j=1,\ldots,s}$ une famille de générateurs homogènes de $\mathfrak{n}$ et $b = \sup(d^\circ X_j)$. Pour $p' \geq bp$, on a l'inclusion $\mathcal{U}_{p'} \subset \mathcal{U}\mathfrak{n}^p$; donc, en posant $q_i = b\ell + p_i$, on a $\mathfrak{n}^{q_i} Y_i \subset \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell$ et $\mathfrak{n}^{q_i} v_i = 0$; d'autre part $\mathfrak{n}_-^{k-1} v_i = 0$. Le module M_i est donc un quotient du module de dimension finie $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^{k-1} + \mathcal{U}\mathfrak{n}^{q_i}}$. On en déduit $\dim M < \infty$.

5.3. La graduation de $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$.

LEMME 5.3. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée vérifiant* (A1) *et* (A2). *Soient $k, \ell \geq 1$.*

i) $\exists p_0 \geq 0$ *tel que* $\forall p \geq p_0$ $(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell})_p = 0$.

ii) $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\exists m \geq 1$ *tel que* $(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell})_p$ *est un quotient de* $(\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^m+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell})_p$.

Lorsque $\mathfrak{g}$ vérifie en outre (A3), les LEMMES 5.2 et 5.3 prouvent que l'action de $\mathfrak{m}$ dans $\mathcal{U}/\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell$ par multiplication à gauche est localement finie.

Démonstration. — Soient $(X_j)_{j=1,\ldots,s}$ une famille homogène de générateurs de $\mathfrak{n}$ et $b = \sup(d^0 X_j)$.

(i) Soit $p_0 = bk$; $\forall p \geq p_0$ on a $\mathcal{U}_p \subset \mathfrak{n}^k\mathcal{U}$.

(ii) Si $p < p_0$, soit $m = p_0 - p$; on a $(\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^m)_p \subset (\sum_{r \geq p+m} \mathcal{U}_r \mathfrak{n}_-^m)_p \subset (\mathfrak{n}^k\mathcal{U})_p$.

Remarque 5.3. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée telle que $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_-$ sont engendrées par $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ respectivement, alors

(i) $\forall p \geq k$ $(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell})_p = 0$.

(ii) $\forall p < k$ $(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell})_p = (\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^{k-p}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell})_p$.

En effet, $\forall r \geq 0$ on a $\mathfrak{n}^r\mathcal{U} = (\mathfrak{g}_1)^r\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_r = (\mathfrak{g}_1)^r\mathcal{U}_0$. Donc si $p \geq k$ on a $(\mathfrak{n}^k\mathcal{U})_p = \mathcal{U}_p$; et si $p < k$ on a $(\mathfrak{n}^k\mathcal{U})_p = (\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^{k-p})_p$:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{n}^k\mathcal{U})_p &= \big((\mathfrak{g}_1)^k\mathcal{U}\big)_p = (\mathfrak{g}_1)^k\mathcal{U}_{p-k} = (\mathfrak{g}_1)^k\mathcal{U}_0(\mathfrak{g}_{-1})^{k-p}\\ &= \mathcal{U}_k(\mathfrak{g}_{-1})^{k-p} = \big(\mathcal{U}\cdot(\mathfrak{g}_{-1})^{k-p}\big)_p = (\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^{k-p})_p.\end{aligned}$$

5.4. Une formule dans $\mathcal{S}\ell(2)$.

COROLLAIRE 5.4. — *Soient $\mathcal{S} = \mathcal{S}\ell(2,\mathbb{C})$ de base (H, X, Y) avec $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$, $[X,Y] = H$ et $k, \ell \geq 1$, on pose $P_{k,\ell}(H) = (H-k+1)\ldots(H-1)H\ldots(H+\ell-1)$. On a $P_{k,\ell}(H) \in X^k\mathcal{U}(\mathcal{S})Y^k + Y^\ell\mathcal{U}(\mathcal{S})X^\ell$.*

On peut faire jouer à cette formule un rôle central dans la démonstration de certains cas particuliers des PROPOSITIONS 4.1 et 4.2. Nous ne l'utiliserons pas par la suite. Il serait intéressant d'en avoir une version plus explicite (pour $\ell = 1$, *cf.* [Bo 2, VIII §12.5, lemme 4]).

Démonstration. — $\mathcal{S}$ est une algèbre de lie graduée par $d^\circ Y = -1$, $d^\circ H = 0$, $d^\circ X = 1$. D'après le LEMME 5.2 le $\mathcal{S}$-module $N = \mathcal{U}(\mathcal{S})/_{\mathcal{U}(\mathcal{S})Y^k+\mathcal{U}(\mathcal{S})X^\ell}$ est de dimension finie. Soit v l'image de 1 dans N.

Décomposons $N = \bigoplus_{1\leq j\leq m} N_j$ en somme directe de modules simples et écrivons $v = \sum_{1\leq j\leq m} v_j$ avec $v_j \in N_j$; on a $X^\ell v_j = Y^k v_j = 0$. Soit

F_n le $\mathcal{S}$-module simple de dimension $n+1$; les valeurs propres de H dans $\{x \in F_n / X^\ell x = Y^k x = 0\}$ sont dans $\{-\ell+1, \ldots, k-1\}$. Donc $P_{k,\ell}(H)v_j = 0$ et $P_{k,\ell}(H)v = 0$.

On a donc $P_{k,\ell}(H) \in \mathcal{U}(\mathcal{S})Y^k + \mathcal{U}(\mathcal{S})X^\ell$. Or $P_{k,\ell}(H)$ est un élément de $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ homogène de $d^0 0$, donc $P_{k,\ell}(H) \in (\mathcal{U}(\mathcal{S})Y^k)_0 + (\mathcal{U}(\mathcal{S})X^\ell)_0$ et $P_{k,\ell}(H) \in X^k\mathcal{U}(\mathcal{S})Y^k + Y^\ell\mathcal{U}(\mathcal{S})X^\ell$.

6. Démonstrations de 4.1 et 4.2

6.1. Démonstration de 4.1.a. — Distinguons deux cas.

1^{er} *cas* : $M = \mathcal{U}$. — $M_{\mathfrak{n}^k, \mathfrak{n}_-^\ell}$ est égal à $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathfrak{n}_-^\ell\mathcal{U}}$ et a donc une structure de $(\mathfrak{m},\mathfrak{g})$-bimodule. Il est gradué et de dimension finie (LEMME 5.2). Il est donc semi-simple comme $\mathfrak{g}$-module d'après (A4). La décomposition en composantes isotypiques s'écrit $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathfrak{n}_-^\ell\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} \mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathfrak{n}_-^\ell\mathcal{U}+I}$; l'isomorphisme est donné par l'application $\tilde{\varphi}$. Remarquons que dans cette somme, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls.

2^e *cas* : M est un $\mathfrak{g}$-module quelconque. — On a l'égalité de $\mathfrak{m}$-modules

$$\begin{aligned}
M_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell} &\xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathfrak{n}_-^\ell\mathcal{U}}\right) \otimes_{\mathcal{U}} M \\
&\qquad\qquad \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathfrak{n}_-^\ell\mathcal{U}} \text{ est un } (\mathfrak{m},\mathfrak{g})-\text{bimodule}\right) \\
&\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathfrak{n}_-^\ell\mathcal{U}+I}\right) \otimes_{\mathcal{U}} M \qquad (\text{d'après le } 1^{\text{er}} \text{ cas}) \\
&\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} (M_I)_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell}.
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que l'isomorphisme ainsi construit est donné par l'application $\tilde{\varphi}$.

Remarquons que $\varprojlim_{k,\ell} (M_I)_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell} = M_I \ \forall I \in \mathcal{J}_g$ et que $\forall k,\ell$ l'espace $(M_I)_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell}$ est nul sauf pour un ensemble fini de valeurs de I. On en déduit $\varprojlim_{k,\ell}(\bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g}(M_I)_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell}) = \prod_{I\in\mathcal{J}_g} M_I$. D'où l'identification $\varprojlim_{k,\ell} M_{\mathfrak{n}^k,\mathfrak{n}_-^\ell} = \prod_{I\in\mathcal{J}_g} M_I$ qui est clairement une identification de $\mathfrak{g}$-modules.

6.2. Démonstration de 4.1.b. — Distinguons quatre cas.

1^{er} *cas* : M est un $\mathfrak{g}$-module gradué de dimension finie. — D'après (A4), M est un $\mathfrak{g}$-module semi-simple donc d'après la dernière *Remarque* de 3.1, on a $M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} M_I$ et le résultat s'en déduit.

2^e *cas* : $M = \mathcal{U}/\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell$. — M est un $\mathfrak{g}$-module gradué. Pour montrer que φ induit un isomorphisme :

$$\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell+I}\right),$$

il suffit de voir que, $\forall p \in \mathbb{Z}$, φ induit un isomorphisme :

$$\left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}\right)_p \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell+I}\right)_p.$$

Fixons $p \in \mathbb{Z}$.

D'après le LEMME 5.3, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}\right)_p = \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^m+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}\right)_p.$$

Le premier cas appliqué au module de dimension finie $\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^m+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}$ (LEMME 5.2) donne

$$\left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^m+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}\right)_p \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^m+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell+I}\right)_p.$$

C'est-à-dire

$$\left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell}\right)_p \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g} \left(\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell+I}\right)_p$$

qui est l'isomorphisme souhaité.

3^e *cas* : $M = \oplus M_\alpha$ où $M_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}/\mathcal{U}\mathfrak{n}^{\ell_\alpha}$. — Cela résulte immédiatement du deuxième cas.

4^e *cas* : $\forall m \in M$, $\exists n > 0$ tel que $\mathfrak{n}^n m = 0$. — On peut trouver une suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules $P^1 \to P^0 \to M \to 0$ où P^1 et P^0 sont comme dans le troisième cas. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
P^0_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & M_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow \dot{\varphi}^0 & & \Big\downarrow \dot{\varphi} & & \\
\bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g}(P^0)_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & \prod_{I\in\mathcal{J}_g}(M_I)_{\mathfrak{n}^k} & &
\end{array}$$

prouve que $\dot{\varphi}(M_{\mathfrak{n}^k}) \subset \bigoplus_{I\in\mathcal{J}_g}(M_I)_{\mathfrak{n}^k}$. Le fait que $\dot{\varphi}$ est un isomorphisme de $M_{\mathfrak{n}^k}$ sur $L(M)_{\mathfrak{n}^k}$ est une conséquence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
P^1_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & P^0_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & M_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & 0 \\
\wr\Big\downarrow \dot{\varphi}^1 & & \wr\Big\downarrow \dot{\varphi}^0 & & \Big\downarrow \dot{\varphi} & & \\
L(P^1)_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & L(P^0)_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & L(M)_{\mathfrak{n}^k} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes et dont les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes.

6.3. Démonstration de la proposition 4.2.

a) Pour tout F dans $\mathfrak{g}_g^\wedge$, le morphisme de $(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$-bimodules Ψ_F : $\mathcal{U}/I_F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F,F)$ donné par $\Psi_F(u)(x) = ux$ est un isomorphisme. Par passage aux quotients on obtient un isomorphisme de $(\mathfrak{g},\mathfrak{m})$-bimodules $\overline{\Psi}_F : \mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell+I_F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\mathfrak{n}_-^k,\mathfrak{n}^\ell},F)$. On a donc, comme en 6.1

$$\begin{aligned}\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{F\in\mathfrak{g}_g^\wedge} \mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell+I_F}\\ &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{F\in\mathfrak{g}_g^\wedge} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(F^{\mathfrak{n}_-^k,\mathfrak{n}^\ell},F\big).\end{aligned}$$

L'isomorphisme ainsi construit est l'application $\overline{\Psi}$.

b) L'affirmation est une conséquence de la PROPOSITION 4.1.b pour le module $\mathcal{U}/\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell$ et de l'isomorphisme de $(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$-bimodules que l'on déduit de Ψ_F $\forall F\in\mathfrak{g}_g^\wedge$

$$\dot{\Psi}_F : \mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell+I_F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(F^{\mathfrak{n}^\ell},F_{\mathfrak{n}^k}\big).$$

7. Applications aux algèbres de Lie semi-simples

Reprenons les notations de 1.1.

7.1. — Pour λ dans P^+, on note F_λ le $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids λ et I_λ son annulateur dans $\mathcal{U}$. Soient $\Delta_{\mathfrak{m}} \subset \Delta$ les racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{m}$, $\Delta_{\mathfrak{m}}^+ = \Delta^+ \cap \Delta_{\mathfrak{m}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ le groupe de Weyl de $\mathfrak{m}$, w_1 l'élément de $W_{\mathfrak{m}}$ tel que $w_1\Delta_{\mathfrak{m}}^+ \cap \Delta_{\mathfrak{m}}^+ = \emptyset$ et $P_{\mathfrak{m}}^+ = \{\lambda\in\mathfrak{h}^*/\forall\alpha\in\Delta_{\mathfrak{m}}^+, (\lambda,\alpha)\in\mathbb{N}\} \supset P^+$. Pour λ dans $P_{\mathfrak{m}}^+$, on note E_λ le $\mathfrak{m}$-module simple de plus haut poids λ.

THÉORÈME. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$ une sous-algèbre parabolique, M un $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{n}$-localement nilpotent et $k,\ell \geq 1$.*

On suppose que $\mathfrak{n}$ rencontre tous les idéaux simples de $\mathfrak{g}$. On a alors des isomorphismes canoniques (donnés comme en 4.1 et 4.2)

a) *de $\mathfrak{p}$-modules :* $M_{\mathfrak{n}^k} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in P^+}(M_{I_\lambda})_{\mathfrak{n}^k}$

b) *de $(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$-bimodules :* $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in P^+}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F_\lambda^{\mathfrak{n}^\ell},(F_\lambda)_{\mathfrak{n}^k})$

c) *de $(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$-bimodules :* $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in P^+}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_\lambda, E_{w_1w_0\lambda})$.

Démonstration.

a) et b) sont des conséquences des PROPOSITIONS 4.1.b et 4.2.b et du LEMME 3.1.

c) Cela résulte du b) car $F_\lambda^{\mathfrak{n}}$ est un $\mathfrak{m}$-module simple de plus haut poids λ et $(F_\lambda)_{\mathfrak{n}}$ est un $\mathfrak{m}$-module simple de plus bas poids $w_0\lambda$.

Remarques. — Soit $\rho_{\mathfrak{n}}$ l'élément de $\mathfrak{h}^*$ donné par : $(\rho_{\mathfrak{n}},\alpha) = 0$ pour α dans B' et $(\rho_n,\alpha) = 1$ pour α dans $B\backslash B'$, alors comme $\mathfrak{h}$-module $(F_\lambda)^{\mathfrak{n}^\ell}$ est la somme des espaces de poids μ de F_λ pour μ tel que $0 \leq (\rho_{\mathfrak{n}},\lambda-\mu) \leq \ell-1$ et $(F_\lambda)_{\mathfrak{n}^k}$ est la somme des espaces de poids μ de F_λ pour μ tel que $0 \leq (\rho_{\mathfrak{n}},\mu - w_0\lambda) \leq k-1$.

La même méthode permet d'obtenir une description analogue pour $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}'^\ell}$ où $\mathfrak{n}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ ad$\mathfrak{h}$-invariante telle que $\mathfrak{n}'$ et $\mathfrak{n}_-$ engendrent $\mathfrak{g}$ (par exemple, si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\emptyset$, on peut prendre $\mathfrak{n}' = \mathfrak{g}^{\alpha_0}$ où α_0 est la plus grande racine).

7.2. Une base de $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}_\emptyset\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset}$.

Pour $\alpha \in \Delta$, on note s_α la symétrie de $\mathfrak{h}^*$: $s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda,\alpha^\vee)\alpha$ et on choisit un $\mathcal{S}\ell(2)$-triplet $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ associé à α : $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ et $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$, $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$, $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$. On note, pour $i = 1,\ldots,r$ $s_i = s_{\alpha_i}$ et $(H_i, X_i, Y_i) = (H_{\alpha_i}, X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i})$.

Rappelons la construction due à D. N. VERMA [Ve], pour $w \in W$ et $\lambda \in P^+$ d'un élément $U_{w,\lambda}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_{\emptyset-})$: soit $w = s_{i_d}\ldots s_{i_1}$ une décomposition réduite de w et, pour $j = 1,\ldots,d$, soit $n_j = (s_{i_{j-1}}\ldots s_{i_1}(\lambda), \alpha_{i_j}^\vee)$, alors l'élément $U_{w,\lambda} = Y_{i_d}^{n_d}\ldots Y_{i_1}^{n_1}$ ne dépend pas de la décomposition réduite choisie. On pose $U_\lambda = U_{w_0,\lambda}$.

COROLLAIRE 7.2. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\lambda \in P^+$ et $\dot{U}_\lambda$ l'image de U_λ dans le $(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$-bimodule $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}_\emptyset\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset}$; alors $\dot{U}_\lambda$ est un vecteur de poids $(w_0\lambda,\lambda)$. La famille $(\dot{U}_\lambda)_{\lambda\in P^+}$ est une base de $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}_\emptyset\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset}$.*

Démonstration. — D'après le théorème, on a un isomorphisme de $(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$-bimodules

$$\dot{\Psi} : \mathcal{U}/_{\mathfrak{n}_\emptyset\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in P^+} \mathbb{C}_{(w_0\lambda,\lambda)}$$

où

$$\mathbb{C}_{(w_0\lambda,\lambda)} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}\big(F_\lambda^{\mathfrak{n}_\emptyset}, (F_\lambda)_{\mathfrak{n}_\emptyset}\big)$$

est un $(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$-bimodule de dimension 1 de poids $(w_0\lambda,\lambda)$.

Choisissons, $\forall\lambda \in P^+$, un vecteur non nul $v_\lambda \in F_\lambda$ de poids λ. Pour montrer que $\dot{U}_\lambda$ est un vecteur non nul de poids $(w_0\lambda,\lambda)$ il faut et il suffit de voir que

(i) $\forall\mu \neq \lambda$ $U_\lambda v_\mu \in \mathfrak{n}_\emptyset F_\mu$

(ii) $U_\lambda v_\lambda \notin \mathfrak{n}_\emptyset F_\lambda$.

Remarquons que $U_{w,\lambda}v_\mu$ est un vecteur de poids $\mu+w\lambda-\lambda$. Supposons que $U_\lambda v_\mu \notin \mathfrak{n}_\emptyset F_\mu$. On en déduit $\mu + w_0\lambda - \lambda = w_0\mu$. Soit $i \in \{1,\dots,r\}$, choisissons une décomposition réduite $w_0 = s_{i_n}\dots s_{i_1}$ telle que $i_1 = i$; on en déduit $Y_i^{(\lambda,\alpha_i^\vee)}v_\mu \neq 0$ d'où $(\lambda,\alpha_i^\vee) \leq (\mu,\alpha_i^\vee)$, pour tout i, puis $(-w_0\lambda,\alpha_i^\vee) \leq (-w_0\mu,\alpha_i^\vee)$, pour tout i, et $(\lambda - w_0\lambda,\alpha_i^\vee) \leq (\mu - w_0\mu,\alpha_i^\vee)$, pour tout i. Or $\lambda - w_0\lambda = \mu - w_0\mu$, donc ces inégalités sont des égalités et $\lambda = \mu$. Ceci prouve (i).

Choisissons une décomposition réduite $w_0 = s_{i_n}\dots s_{i_1}$, posons $v_{0,\lambda} = v_\lambda$ et, pour $d = 1,\dots,n$, posons $w_d = s_{i_d}\dots s_{i_1}$ et $v_{d,\lambda} = U_{w_{d'},\lambda}v_\lambda$. Montrons par récurrence sur d que $v_{d,\lambda}$ est non nul; $v_{d,\lambda}$ est un vecteur de poids extrême $w_d\lambda$, il est donc annulé par $X_{i_{d+1}}$; donc si $v_{d,\lambda} \neq 0$, le vecteur $v_{d+1,\lambda} = Y_{i_{d+1}}^{(w_d\lambda,\alpha_{i_{d+1}}^\vee)} v_{d,\lambda}$ est non nul. Ceci prouve (ii).

On en déduit que la famille $(\dot{U}_\lambda)_{\lambda\in P^+}$ est une base de $\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}_\emptyset\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset}$.

7.3. $\mathfrak{n}_\emptyset$-coïnvariants de certains modules induits. — Soient $S(\mathfrak{h}) = \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{h}$ qui est aussi l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$ et $\forall\lambda \in \mathfrak{h}^*$ $\mathcal{M}_\lambda = \{P \in S(\mathfrak{h})/P(\lambda) = 0\}$.

COROLLAIRE 7.3. — ($\mathfrak{g}$ *semi-simple*). *Soient E un $\mathfrak{h}$-module (que l'on considère comme un $\mathfrak{b}$-module avec une action de $\mathfrak{n}_\emptyset$ triviale), $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} E$ le $\mathfrak{g}$-module induit et, pour μ dans $\mathfrak{h}^*$, $M_{\mathfrak{n}_\emptyset}(\mu) = \{m \in M_{\mathfrak{n}_\emptyset}/\forall H \in \mathfrak{h},\ Hm = \mu(H)m\}$; alors*

a) $M_{\mathfrak{n}_\emptyset} = \bigoplus_{\lambda\in P^+} M_{\mathfrak{n}_\emptyset}(w_0\lambda)$

b) $\forall\lambda \in P^+$, *l'application* $\chi_\lambda : E \to M$ *donnée par* $\chi_\lambda(e) = U_\lambda e$ *induit un isomorphisme d'espaces vectoriels* $\dot{\chi}_\lambda : E/\mathcal{M}_\lambda E \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{n}_\emptyset}(w_0\lambda)$.

Démonstration. — Considérons le $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$-bimodule $\mathcal{U}/\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset$; on a l'égalité de $\mathfrak{g}$-modules $M = \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} E = (\mathcal{U}/\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} E$. Donc, comme $\mathfrak{h}$-module, on a l'égalité $M/\mathfrak{n}_\emptyset M = (\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}_\emptyset\mathcal{U}+\mathcal{U}\mathfrak{n}_\emptyset}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} E$. Le résultat est alors une conséquence du COROLLAIRE 7.2.

8. Remarques sur les algèbres de la classe $\mathcal{A}$

Reprenons les notations du 2.

8.1. Modules graduables de dimension finie.

COROLLAIRE 8.1. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée de la classe $\mathcal{A}$ et F un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) *F est graduable.*

(b) $F^{\mathfrak{n}} \neq 0$ (*resp.* (b′) $F^{\mathfrak{n}_-} \neq 0$).

(c) $F/_{\mathfrak{n}F} \neq 0$ (*resp.* (c′) $F/_{\mathfrak{n}_-F} \neq 0$).

(d) *I_F est un idéal gradué.*

Remarques. — Ceci explique, a posteriori, pourquoi les modules simples non graduables ne contribuent pas dans les diverses formules des PROPOSITIONS 4.1 et 4.2.

Il peut exister des $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie non graduables.

Exemple. — $\mathfrak{g} = \mathcal{S}\ell(2, \mathbb{C}[t, t^{-1}])$= algèbre de Lie des matrices 2×2 de trace nulle à coefficients dans l'anneau des polynômes de Laurent. $\mathfrak{g}$ est un quotient gradué de l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}\,'(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (*cf.* 3.2 et [Ka 2, théorème 7.4]. La graduation induite est donnée par $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\mathfrak{n} = \mathcal{S}\ell(2, t\mathbb{C}[t]) \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit F le $\mathfrak{g}$-module simple de dimension 2 donné par le morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathcal{S}\ell(2, \mathbb{C})$ qui envoie $M(t)$ sur $M(1)$. On a $F^{\mathfrak{n}} = 0$.

Les $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie qui ne sont pas graduables ne sont pas forcément semi-simples; en particulier, si $\mathfrak{r}$ est un idéal gradué de codimension finie de $\mathfrak{g}$, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ n'est pas forcément semi-simple.

Exemple. — Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ comme ci-dessus et F' le $\mathfrak{g}$-module de dimension 4 donné par le morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathcal{S}\ell(4, \mathbb{C})$ qui envoie $M(t)$ sur

$$\begin{pmatrix} M(1) & M'(1) \\ 0 & M(1) \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad M'(1) = \frac{d}{dt} M(t)\big|_{t=1}.$$

L'hypothèse (A4) n'est pas inutile dans ce corollaire, comme le prouvent l'algèbre de Lie commutative de dimension 1 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}Y$ et son module de dimension 1 $F = \mathbb{C}v$ avec $Yv = v$.

Démonstration. — (d)$\Rightarrow$(a)$\Rightarrow$(b) est clair.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) est clair. — Dans ce cas, la réunion $\bigcup_{k \geq 0} F^{\mathfrak{n}^k}$ est un sous-module de F qui est donc égal à F.

(b) et (c) $\Rightarrow$ (d). — La PROPOSITION 4.1.b prouve qu'il existe $I \in \mathcal{J}_g$ tel que $F_I \neq 0$. On a donc $F_I = F$ et $I \subset I_F$ d'où $I_F = I$.

8.2. — Pour une algèbre de Lie graduée simple de dimension infinie, la PROPOSITION 4.2 est moins jolie que pour une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie : on comparera le corollaire suivant au THÉORÈME 7.1.

COROLLAIRE 8.2. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie graduée vérifiant* (A1), (A2), (A3) *et n'ayant pas d'idéal gradué de codimension finie autre que* $\mathfrak{g}$. *Alors* $\forall k, \ell \geq 1$

$$\mathcal{U}/_{\mathcal{U}\mathfrak{n}_-^k + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} = \mathcal{U}/\mathfrak{g}\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

et

$$\mathcal{U}/_{\mathfrak{n}^k\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathfrak{n}^\ell} = \mathcal{U}/\mathfrak{g}\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

Démonstration. — Soit $I \in \mathcal{J}_g$ alors $I \cap \mathfrak{g}$ est un idéal gradué de codimension finie de $\mathfrak{g}$, donc $I \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ et $I = \mathfrak{g}\mathcal{U}$. On utilise alors la PROPOSITION 4.2.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo 1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5, et 6. — Paris, Masson, 1984.

[Bo 2] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 7 et 8. — Paris, CCLS, 1974.

[Di] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes*. — Paris, Gauthier-Villars, 1974.

[Ka 1] KAC (V.G.). — Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth, *Math. USSR-Izv.*, t. **2**, 1968, p. 1271–1311.

[Ka 2] KAC (V.G.). — *Infinite dimensional Lie algebras*. — Cambridge University Press, 1985.

[Ma] MATHIEU (O.). — Classification des algèbres de Lie graduées simples de croissance ≤ 1, *Inv. Math.*, t. **86**, 1986, p. 371–426.

[Ve] VERMA (D.N.). — Structure of certain induced representation of semi-simple Lie algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **74**, 1968, p. 160–166 et 628.