C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 901-904, 1988

Théorie des groupes/*Group Theory*

La partie semi-simple de l'algèbre des dérivations d'une algèbre de Lie nilpotente

Yves Benoist

Résumé — On montre que la partie semi-simple de l'algèbre de Lie des dérivations d'une algèbre de Lie nilpotente est arbitraire.

Semisimple part of the algebra of derivations of a nilpotent Lie algebra

Abstract — *Any semisimple Lie algebra is isomorphic to the semisimple part of the Lie algebra of derivations of a nilpotent Lie algebra.*

I. Introduction. — Soient k un corps commutatif de caractéristique 0, k^* l'ensemble de ses éléments inversibles, $\bar{k}$ sa clôture algébrique, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur k et $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes_k \bar{k}$.

Théorème. — *Il existe une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{N}$ sur k dont l'algèbre des dérivations a sa partie semi-simple (i. e. le quotient de cette algèbre par son radical résoluble) isomorphe à* $\mathfrak{g}$.

Soient $p\geqq 2$ et $\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})=\bigoplus_{1\leqq i\leqq p}\mathfrak{g}\,T^i$ muni de la structure d'algèbre de Lie : $\forall X, Y\in\mathfrak{g}$, $[XT^i, YT^j]=[X, Y]\,T^{i+j}$ si $i+j\leqq p$ et 0 sinon. On peut prendre $\mathcal{N}=\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})$ si $p\geqq 3$.

Supposons que $\bar{\mathfrak{g}}$ ne contienne pas d'idéal isomorphe à $\mathrm{sl}(2, \bar{k})$; on peut alors prendre $\mathcal{N}=\mathcal{N}_2(\mathfrak{g})$.

Je remercie P. Pansu pour ses suggestions et J. Dixmier et M. Duflo pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

II. Construction d'algèbres de Lie nilpotentes. — Soient $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$, $C(\mathfrak{g})=\{\varphi\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})\,|\,\forall X, Y\in\mathfrak{g},\ \varphi([X, Y])=[\varphi(X), Y]\}$ le commutant de la représentation adjointe [lorsque $\mathfrak{g}$ est simple, $C(\mathfrak{g})$ est un corps commutatif ([4], ch. X, § 1)], et $C^*(\mathfrak{g})$ le groupe des éléments inversibles de $C(\mathfrak{g})$. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ normalise $C^*(\mathfrak{g})$ et on a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\cap C^*(\mathfrak{g})=\mathrm{Id}$. On note $A(\mathfrak{g})=\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\ltimes C^*(\mathfrak{g})$ le sous-groupe de $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ produit semi-direct de $C^*(\mathfrak{g})$ par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Soit $\mathcal{N}=\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})=\mathcal{N}_{(1)}\oplus\ldots\oplus\mathcal{N}_{(p)}$ avec $\mathcal{N}_{(i)}=\mathfrak{g}\,T^i$ que l'on identifie à $\mathfrak{g}$. Remarquons que les idéaux $\mathcal{N}'_{(i)}=\bigoplus_{i\leqq j\leqq p}\mathcal{N}_{(j)}$ sont les idéaux de la suite centrale descendante. Soient

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{N})=\{\Phi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{N})\,|\,\Phi(\mathcal{N}_{(i)})\subset\mathcal{N}_{(i)},\ \forall i=1, \ldots, p\}$$

et

$$\mathrm{Aut}_n(\mathcal{N})=\{\Phi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{N})\,|\,(\Phi-\mathrm{Id})(\mathcal{N}'_{(i)})\subset\mathcal{N}'_{(i+1)},\ \forall i=1, \ldots, p\}.$$

Alors $\mathrm{Aut}_n(\mathcal{N})$ est un sous-groupe distingué unipotent de $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ et on a $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})=\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{N})\ltimes\mathrm{Aut}_n(\mathcal{N})$. Soient $\mathrm{Der}(\mathcal{N})$, $\mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Der}_n(\mathcal{N})$ les algèbres de Lie des groupes algébriques $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Aut}_n(\mathcal{N})$. $\mathrm{Der}(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{N})$ ont même partie semi-simple.

Note présentée par Michel Duflo.

0249-6291/88/03070901 $ 2.00 © Académie des Sciences

PROPOSITION. — 1. *Soit* $p \geqq 3$. *Le groupe* $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))$ *s'identifie à* $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$.

2. *Si* $\bar{\mathfrak{g}}$ *ne contient pas d'idéal isomorphe à* $\mathrm{sl}(2, \bar{k})$, *le groupe* $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{N}_2(\mathfrak{g}))$ *s'identifie à* $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$.

Remarques. — Le théorème est une conséquence du 1.

Lorsque $k = \mathbb{R}$, l'hypothèse du 2 signifie que $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal isomorphe à $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{so}(3, \mathbb{R})$.

Démonstration. — 1. On a l'identification :

$$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})) = \{ (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in (\mathrm{Gl}(\mathfrak{g}))^p \mid \forall i, j \text{ avec } i+j \leqq p, \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}, \; [\varphi_i(\mathrm{X}), \varphi_j(\mathrm{Y})] = \varphi_{i+j}([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) \}.$$

Soit $\varphi = \varphi' \circ \gamma \in \mathrm{A}(\mathfrak{g})$ avec $\varphi' \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et $\gamma \in \mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ alors

$$\Phi = (\varphi' \circ \gamma, \varphi' \circ \gamma^2, \ldots, \varphi' \circ \gamma^p) \in \mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})).$$

Donc $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))$.

Montrons que ce sous-groupe est $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g}))$. Pour cela, il suffit de voir que,

$$\forall \Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathrm{Aut}_{gr}(\mathcal{N}_p(\mathfrak{g})), \quad \text{on a } \varphi_1 \in \mathrm{A}(\mathfrak{g}).$$

L'égalité $\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g} \; [\varphi_1(\mathrm{X}), \varphi_2(\mathrm{Y})] = \varphi_3([\mathrm{X}, \mathrm{Y}])$ et le lemme 3 prouvent qu'il existe $\gamma \in \mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ tel que $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \gamma$. Posons $\varphi = \varphi_1 \circ \gamma^{-1} \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$. On a

$$[\varphi(\mathrm{X}), \varphi(\mathrm{Y})] = [\varphi_1(\gamma^{-1}(\mathrm{X})), \varphi_1(\gamma^{-1}(\mathrm{Y}))] = \varphi_2([\gamma^{-1}(\mathrm{X}), \gamma^{-1}(\mathrm{Y})]) = \varphi([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]).$$

Donc $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et $\varphi_1 \in \mathrm{A}(\mathfrak{g})$.

2. C'est une conséquence du lemme 4.

III. NOTATIONS ET RAPPELS ([3], [1] et [2]). — Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}^*$ son dual; on note, pour α dans $\mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{g}^\alpha = \{ \mathrm{X} \in \bar{\mathfrak{g}} \mid \forall \mathrm{H} \in \mathfrak{h}, \; [\mathrm{H}, \mathrm{X}] = \alpha(\mathrm{H})\mathrm{X} \}$, $\Delta = \{ \alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\} \}$ le système de racines, $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ le système de coracines. On choisit, pour $\alpha \in \Delta$, $\mathrm{X}_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ et, pour α, $\beta \in \Delta$ avec $\alpha + \beta \in \Delta$, $\mathrm{N}_{\alpha, \beta} \in k^*$ tels que

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = \mathrm{H}_\alpha, \qquad [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \mathrm{N}_{\alpha, \beta} \mathrm{X}_{\alpha+\beta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_{-\alpha, -\beta} = -\mathrm{N}_{\alpha, \beta}.$$

Soient $\bar{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \mathfrak{g}_i$ la décomposition de $\bar{\mathfrak{g}}$ en idéaux simples et $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$. On a $\mathfrak{h} = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \mathfrak{h}_i$ d'où $\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \mathfrak{h}_i^*$; on pose $\Delta_i = \Delta \cap \mathfrak{h}_i^*$. On aura besoin du

LEMME 1. — *Soient* V *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel euclidien et* Δ *un système de racines dans* V *indécomposable et de rang supérieur ou égal à* 2.

(*a*) *Soit* $\alpha \in \Delta$*; alors* $\{ \beta \in \Delta \mid \alpha + \beta \in \Delta \}$ *engendre* V.

(*b*) *Soit* $\nu : \alpha \mapsto \nu_\alpha$ *une application de* Δ *dans* k *telle que,* $\forall \alpha, \beta \in \Delta$ *avec* $\alpha + \beta \in \Delta$, *on ait* $\nu_\alpha = \nu_\beta = \nu_{\alpha+\beta}$. *Alors* ν *est constante.*

(*c*) *Soient* $\pi = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \}$ *une base de* Δ *et* $a : \alpha \mapsto a_\alpha$ *une application de* Δ *dans* k *telle que,* $\forall \alpha, \beta \in \Delta$ *avec* $\alpha + \beta \in \Delta$, *on ait* $a_\alpha a_\beta = a_{\alpha+\beta}$. *Alors l'application* a *est soit identiquement nulle, soit nulle part nulle et, dans ce second cas, il existe* $a_1, \ldots, a_r$ *dans* k^* *tels que, pour tout* $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ *dans* Δ, *on ait* $a_\alpha = \prod a_i^{n_i}$.

IV. CENTROÏDE ET AUTOMORPHISMES.

LEMME 2. — $\mathrm{C}(\mathfrak{g}) = \{ \varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{g}, \; [\mathrm{X}, \varphi(\mathrm{X})] = 0 \}$.

Démonstration. — Si $\varphi \in \mathrm{C}(\mathfrak{g})$ on a $[\mathrm{X}, \varphi(\mathrm{X})] = \varphi([\mathrm{X}, \mathrm{X}]) = 0$.

Réciproquement, l'égalité $\mathrm{C}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{C}(\bar{\mathfrak{g}})$ permet de supposer que k est algébriquement clos. Soit φ tel que $\forall \mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ on ait $[\mathrm{X}, \varphi(\mathrm{X})] = 0$; quitte à remplacer φ par $\varphi + \lambda\,\mathrm{Id}$ $(\lambda \in k)$, on peut supposer φ inversible. L'égalité précédente appliquée à $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ donne $\forall \mathrm{X}$,

$Y \in \mathfrak{g}$ l'égalité $[X, \varphi(Y)] = [\varphi(X), Y]$. On en déduit $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Soient $H \in \mathfrak{h}$ et $\alpha \in \Delta$; on a $[H, \varphi(X_\alpha)] = [\varphi(H), X_\alpha] = \alpha(\varphi(H)) X_\alpha$. Donc, il existe $\nu_\alpha \in k^*$ tel que $\varphi(X_\alpha) = \nu_\alpha X_\alpha + Z_\alpha$ avec $Z_\alpha \in \mathfrak{h}$ et on a $\nu_\alpha \alpha(H) = \alpha(\varphi(H))$ *i. e.* $\alpha \circ \varphi = \nu_\alpha \alpha$. Posons $\theta = {}^t(\varphi|_{\mathfrak{h}})$. Si α, β sont des racines ainsi que $\alpha + \beta$, on a $\nu_\alpha = \nu_\beta = \nu_{\alpha+\beta}$; on a aussi $\nu_\alpha = \nu_{-\alpha}$; le lemme 1 *b* permet de conclure que l'application $\alpha \mapsto \nu_\alpha$ est constante sur chaque Δ_i égale à ν_i. Soit ψ l'élément de $C(\mathfrak{g})$ qui agit par multiplication par ν_i^{-1} sur chacun des idéaux $\mathfrak{g}_i$. Quitte à remplacer φ par $\psi \circ \varphi$, on peut supposer que φ est l'identité sur $\mathfrak{h}$: on a alors, $\forall \alpha \in \Delta$, $\varphi(X_\alpha) = X_\alpha + Z_\alpha$ avec $Z_\alpha \in \mathfrak{h}$. Soient α, $\beta \in \Delta$; on a : $[\varphi(X_\alpha), X_\beta] = [X_\alpha, \varphi(X_\beta)]$; d'où $Z_\alpha = 0$ et $\varphi = \mathrm{Id}$.

On note $A_{\mathfrak{g}}$, $B_{\mathfrak{g}}$ et $C_{\mathfrak{g}}$ les groupes suivants :

$$A_{\mathfrak{g}} = \{ \varphi \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}) \mid \exists \psi \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}),\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}\ [\varphi(X), \varphi(Y)] = \psi([X, Y]) \}$$

comme $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ψ est unique quand il existe;

$$B_{\mathfrak{g}} = \{ (\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathrm{Gl}(\mathfrak{g}))^2 \mid \exists \varphi_3 \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}),\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}\ [\varphi_1(X), \varphi_2(Y)] = \varphi_3([X, Y]) \};$$

$B_{\mathfrak{g}}$ contient le sous-groupe $A_{\mathfrak{g}}$ de façon diagonale; il contient aussi le sous-groupe

$$C_{\mathfrak{g}} = \{ (\mathrm{Id}, \gamma) \in (\mathrm{Gl}(\mathfrak{g}))^2 \mid \gamma \in C^*(\mathfrak{g}) \} \simeq C^*(\mathfrak{g}).$$

LEMME 3. — *On a l'égalité :* $B_{\mathfrak{g}} = A_{\mathfrak{g}} \ltimes C_{\mathfrak{g}}$.

Démonstration. — Il est clair que $A_{\mathfrak{g}} \cap C_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Id}$ et que $A_{\mathfrak{g}}$ normalise $C_{\mathfrak{g}}$ (lemme 2).

Soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in B_{\mathfrak{g}}$, posons $\gamma = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$. Calculons, pour X dans $\mathfrak{g}$:

$$[\gamma(X), X] = \varphi_3([\varphi_2^{-1}(X), \varphi_2^{-1}(X)]) = 0.$$

Le lemme 2 prouve alors que $\gamma \in C^*(\mathfrak{g})$. Donc $(\varphi_1, \varphi_2) \in A_{\mathfrak{g}} \ltimes C_{\mathfrak{g}}$.

LEMME 4. — *Si* $\bar{\mathfrak{g}}$ *ne contient pas d'idéal isomorphe à* $\mathrm{sl}(2, \bar{k})$, *on a l'égalité :* $A_{\mathfrak{g}} = A(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — On peut supposer k algébriquement clos. Il est clair que $A(\mathfrak{g}) \subset A_{\mathfrak{g}}$. Réciproquement, soient $\varphi \in A_{\mathfrak{g}}$ et ψ tels que, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[\varphi(X), \varphi(Y)] = \psi([X, Y])$. Montrons que φ est produit d'éléments de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et de $C^*(\mathfrak{g})$.

Quitte à multiplier φ par des automorphismes de $\mathfrak{g}$, on peut supposer que $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Soit $\theta = {}^t\varphi|_{\mathfrak{h}}$; pour toute racine α il existe $\lambda_\alpha \in k^*$ tel que $\lambda_\alpha \theta(\alpha) \in \Delta$ et on a l'égalité, $\forall \alpha$, $\beta \in \Delta$ avec $\alpha + \beta \in \Delta$, $\lambda_\alpha^2 = \lambda_\beta^2 = \lambda_{\alpha+\beta}^2$. Le lemme 1 *b* affirme alors que λ_α^2 est constant sur chaque Δ_i. Quitte à multiplier φ par un élément de $A(\mathfrak{g})$, on peut supposer que $\lambda_\alpha = \pm 1$ puis que $\varphi|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Id}$.

On a alors $\varphi(X_\alpha) = a_\alpha X_\alpha + b_\alpha X_{-\alpha} + Z_\alpha$ avec $(a_\alpha, b_\alpha) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $Z_\alpha \in \mathfrak{h}$; d'où $\psi(X_\alpha) = a_\alpha X_\alpha - b_\alpha X_{-\alpha}$. L'étude des égalités $(*)$: $\psi([X_\alpha, X_\beta]) = [\varphi(X_\alpha), \varphi(X_\beta)]$ prouve que φ et ψ laissent stables les idéaux de $\mathfrak{g}$ (on suppose désormais $\mathfrak{g}$ simple) et prouve que, $\forall \alpha$, $\beta \in \Delta$ avec $\alpha + \beta \in \Delta$, on a

(i) $\beta(Z_\alpha) = 0$, (ii) $a_{\alpha+\beta} = a_\alpha a_\beta$ et (iii) $b_{\alpha+\beta} = b_\alpha b_\beta$.

La propriété (i) et le lemme 1 *a* donnent : $\forall \alpha \in \Delta$, $Z_\alpha = 0$. Appliquons le lemme 1 *c* à (ii) et (iii). Comme a_α et b_α ne sont pas simultanément nuls, trois cas apparaissent :

1^er^ *cas :* $\forall \alpha \in \Delta$ $a_\alpha \neq 0$ et $b_\alpha \neq 0$. Choisissons deux racines α, β telles que $\alpha - \beta$ est racine; l'égalité $(*)$ donne alors $a_\alpha b_\beta = 0$. Contradiction.

2^e^ *cas :* $\forall \alpha \in \Delta$ $a_\alpha \neq 0$ et $b_\alpha = 0$. On vérifie que $\varphi = \psi$ est un automorphisme.

3^e^ *cas :* $\forall \alpha \in \Delta$ $a_\alpha = 0$ et $b_\alpha \neq 0$. On vérifie que $\varphi = -\psi$ est un antiautomorphisme.

On peut décrire le groupe $A_{\mathfrak{g}}$ pour une algèbre de Lie semi-simple quelconque grâce au lemme suivant :

LEMME 5. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple sur* k. *On suppose que* $\bar{\mathfrak{g}}$ *contient un idéal isomorphe à* $\mathrm{sl}(2, \bar{k})$. *Alors :*

$$A_{\mathfrak{g}} = \{ \varphi \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}) \mid \exists \tau \in \Gamma(C(\mathfrak{g})/k) \text{ tel que } \varphi \text{ est } \tau\text{-semi-linéaire} \}$$

(où $\Gamma(C(\mathfrak{g})/k)$ *désigne le groupe de Galois de l'extension* $C(\mathfrak{g})/k$).

Démonstration. – Remarquer que $A_{\mathfrak{g}}$ normalise $C(\mathfrak{g})$ (utiliser le lemme 2) et que $\mathfrak{g}$ est un $C(\mathfrak{g})$-espace vectoriel de dimension 3.

Note remise le 10 octobre 1988, acceptée le 18 octobre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5 et 6, Masson, Paris, 1981.

[2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 7 et 8, C.C.L.S., Paris, 1975.

[3] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[4] N. JACOBSON, *Lie algebras*, Interscience Publishers, New York, 1962.

U.A. n° 748 du C.N.R.S., Université Paris-VII,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.