Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables

Yves BENOIST, Patrick FOULON et François LABOURIE

Résumé – Nous décrivons les flots d'Anosov sur une variété compacte dont les distributions stable et instable sont différentiables et dont la 1-forme canonique est de contact : à revêtements finis près et après un reparamétrage C^∞, ils se réalisent tous comme le flot géodésique sur (le fibré unitaire tangent à) un espace localement symétrique riemannien à courbure strictement négative.

Anosov flows with smooth stable and unstable foliations

Abstract – *We describe which Anosov flows have* C^∞ *stable and unstable distributions and a contact canonical* 1*-form: up to finite coverings and up to a* C^∞ *change of parameter, each of them is isomorphic to the geodesic flow on (the unit tangent bundle of) a compact locally symmetric space of strictly negative curvature.*

1. INTRODUCTION. – Soient V une variété compacte (C^∞ et connexe), X un champ de vecteurs (C^∞) sur V et φ_t le flot associé. On munit V d'une métrique riemannienne annexe.

DÉFINITION [1]. – *Le flot* φ_t *est dit d'Anosov s'il existe une décomposition (automatiquement continue) invariante par le flot du fibré tangent* $TV = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$ *et des constantes* $a, b > 0$ *telles que :*

(i) E^0 *est le fibré de rang un engendré par* X ;

(ii) $\forall Z^+ \in E^+, \forall t \geqq 0, \|T\varphi_{-t}(Z^+)\| \leqq a \|Z^+\| e^{-bt}$;

(iii) $\forall Z^- \in E^-, \forall t \geqq 0, \|T\varphi_t(Z^-)\| \leqq a \|Z^-\| e^{-bt}$.

La distribution E^+ (resp. E^-, $E^0 \oplus E^+$ et $E^0 \oplus E^-$) s'appelle la distribution instable (resp. stable, centrale instable et centrale stable). Elle est intégrable. Les feuilles intégrales qui sont appelées feuilles instables (resp. stables, centrales instables et centrales stables) sont C^∞ mais la distribution n'est pas en général de classe C^2 [1]. On appelle 1-forme canonique associée au flot, la 1-forme λ donnée par $\lambda(E^\pm) = 0$ et $\lambda(X) = 1$.

Le but de cette Note est de *classifier les flots d'Anosov* pour lesquels les distributions E^+ et E^- sont C^∞ et la 1-forme canonique λ est de contact, *i. e.* $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ n'est nulle part nulle où $\dim V = 2n-1$; à revêtements finis près et après reparamétrage C^∞ ce sont des flots géodésiques sur un espace localement symétrique riemannien à courbure strictement négative (ELSRCSN) compact. Cette classification est due à E. Ghys lorsque $n = 2$ [2], et elle précise [3]. Nous en déduirons le :

COROLLAIRE. – *Soit* N *une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative. On suppose que le flot géodésique* φ_t^N *sur le fibré unitaire tangent* $V_N = \{ v \in TN \mid \|v\| = 1 \}$ *a une distribution centrale stable (resp. centrale instable) de classe* C^∞.

Alors il existe un ELSRCSN compact S *et un difféomorphisme* F *de* V_N *sur* V_S *qui échange les flots géodésiques :* $\forall t$, $F \circ \varphi_t^N = \varphi_t^S \circ F$.

Ce corollaire généralise des résultats antérieurs de M. Kanai (pour $n \geqq 3$ et N à courbure 4/9-pincée [4]) de E. Ghys (pour $n = 2$ [2]) et de R. Feres et A. Katok (pour n impair, ou N à courbure strictement 1/4-pincée) ([5], [6], [7]).

Note présentée par Marcel BERGER.

0764-4442/90/03110351 $ 2.00 © Académie des Sciences

2. CLASSIFICATION. — *Exemple fondamental : à des revêtements finis près, et après reparamétrage, il s'agit du flot géodésique sur un ELSRCSN compact.* — Plus précisément :

Choisissons $\tilde{S}$ un ELSRCSN simplement connexe de dimension n. Soit $\tilde{V} := V_{\tilde{S}}$ le fibré unitaire tangent à $\tilde{S}$ et $G := \mathrm{Is}(\tilde{S})$ le groupe des isométries de $\tilde{S}$ [sauf pour $n=2$ où $\tilde{V}$ (resp. G) est le revêtement universel de $V_{\tilde{S}}$ (resp. $\mathrm{Is}(\tilde{S})$)]. Le groupe G agit transitivement sur $\tilde{S}$ et $\tilde{V}$. Soit $\tilde{\varphi}_t$ le flot géodésique sur $\tilde{V}$ (pour $n=2$ il s'agit du relevé de ce flot à $\tilde{V}$).

Choisissons Γ_0 un sous-groupe discret de G tel que $V_0 := \Gamma_0 \diagdown \tilde{V}$ soit une variété compacte. Soient φ_t^0 le flot sur V_0 image de $\tilde{\varphi}_t$ et X^0 le champ de vecteurs associé. A des revêtements finis près, il s'agit du flot géodésique sur un ELSRCSN compact. Soit Ω_{V_0} l'ouvert convexe symétrique et borné de l'espace vectoriel $E = \hom(\Gamma_0, \mathbf{R}) = H^1(V_0, \mathbf{R})$: $\Omega_{V_0} := \{ h_0 \in E \mid$ il existe une 1-forme fermée α_0 représentant h_0 telle que $\alpha_0(X^0)+1>0$ en tout point de $V_0 \}$.

Choisissons h_0 dans Ω_{V_0}. Soit $\Gamma_1 := \{ (\gamma_0, h_0(\gamma_0)) \mid \gamma_0 \in \Gamma_0 \} \subset G \times \mathbf{R}$. Le groupe $G' = G \times \mathbf{R}$ agit transitivement sur $\tilde{V}$ par : $(g, t).\tilde{v} = \tilde{\varphi}_t(g.\tilde{v})$. Le quotient $V_1 := \Gamma_1 \diagdown \tilde{V}$ est encore une variété compacte. Soit φ_t^1 le flot sur V_1 image de $\tilde{\varphi}_t$ et X^1 le champ de vecteurs associé. Il est d'Anosov, ses distributions stable et instable sont C^∞ et la 1-forme canonique est de contact.

A reparamétrage près, il s'agit du flot φ_t^0 : en effet, soient π_0 la projection de $\tilde{V}$ sur V_0, $f \in C^\infty(\tilde{V})$ telle que $df = \pi_0^*(\alpha_0)$ où α_0 est un représentant de h_0 satisfaisant $\alpha_0(X^0)+1>0$ et $\psi : \tilde{V} \to \tilde{V}$ le difféomorphisme donné par $\tilde{\psi}(\tilde{v}) = \tilde{\varphi}_{f(\tilde{v})}(\tilde{v})$. On a l'égalité $\tilde{\psi}(\gamma_0 \tilde{v}) = (\gamma_0, h_0(\gamma_0))\,\tilde{\psi}(\tilde{v})$, $\forall \gamma_0 \in \Gamma_0$. Donc $\tilde{\psi}$ passe au quotient en un difféomorphisme $\psi : V_0 \to V_1$ et on a $X^1 = T\psi((\alpha_0(X^0)+1)^{-1} X^0)$.

THÉORÈME. — *Soit φ_t un flot d'Anosov C^∞ sur une variété compacte V de dimension $2n-1$ tel que :*

(i) *les distributions stable et instable sont C^∞ ;*

(ii) *la 1-forme canonique λ est de contact.*

Alors, il existe un triplet $(\tilde{S}, \Gamma_0, h_0)$, comme ci-dessus, tel que le flot φ_t^1 sur V_1 associé soit isomorphe à φ_t : c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme C^∞ $F : V \overset{\cong}{\to} V_1$ tel que $\forall t$, $F \circ \varphi_t = \varphi_t^1 \circ F$. Ce triplet est unique (à isomorphisme près).

Remarques. — (1) Si on ne suppose pas que la 1-forme canonique est de contact, la conclusion est fausse : prendre la suspension du difféomorphisme du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Si on suppose seulement $E^\pm$ de classe C^k avec $k \geqq 2(2n^2-n+1)$ le résultat est encore vrai avec F de classe C^k.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Pour une démonstration complète du théorème, on renvoie à [8]. En voici les principales étapes :

PROPOSITION 1. — *Soient $\tilde{V}$ le revêtement universel de V, $\tilde{\varphi}_t$ et $\tilde{E}^\pm$ les relevés de φ_t et $E^\pm$ à $\tilde{V}$. Soit G' le groupe des difféomorphismes de $\tilde{V}$ qui préservent $\tilde{X}$, $\tilde{E}^+$ et $\tilde{E}^-$.*

Alors, G' est un groupe de Lie qui agit transitivement sur $\tilde{V}$. On peut donc écrire $\tilde{V} = G'/H'$.

Démonstration. — La 2-forme $d\lambda$ met en dualité non dégénérée les fibrés $\tilde{E}^+$ et $\tilde{E}^-$, elle permet donc de construire une structure pseudoriemannienne sur $\tilde{V}$ invariante par G' qui est donc un groupe de Lie.

Il résulte de [9] (corollaire 3.1 A, p. 96) que toute orbite dense du pseudogroupe des difféomorphismes locaux de V qui préservent $\tilde{X}$, E^+ et E^-, est ouverte. Comme ce pseudogroupe contient le flot, il a une orbite dense Ω qui est donc ouverte. On montre ensuite que $\Omega = V$. ■

Si K est un groupe de Lie, on note K_e sa composante connexe et $\mathscr{K}$ son algèbre de Lie.

PROPOSITION 2. — *(a) On a* $G' = G \times \mathbf{R}$ *où* G *est simple et* $\mathbf{R}$ *est le sous-groupe de* G' *donné par le flot. Le groupe* G *agit transitivement sur* V. *On peut donc écrire* $V = \Gamma \backslash G/H$ *où* $H = H' \cap G$ *et* Γ *est un sous-groupe discret de* G'.

(b) On a $H_e = M_e$ *où* M *est le « facteur* M *» dans le décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique maximal de* $G_e : P^+ = MAN^+$. *Le flot* φ_t *est donné par l'action à droite de* A *sur* V.

Démonstration. — (*a*) Le point crucial est de construire une connexion sur $\tilde{V}$, pour laquelle $\tilde{E}^+$ et $\tilde{E}^-$ sont parallèles et de montrer que $\Lambda^{\max}(\tilde{E}^+)$ est plat (*cf.* [3]).

(*b*) On prouve que $\mathscr{H}$ est de codimension un dans la partie réductive d'une sous-algèbre parabolique $\mathscr{P}^+$. Le raisonnement du (*a*), appliqué à des sous-fibrés de $\tilde{E}^+$ construits à l'aide d'un élément hyperbolique du centre de $\mathscr{H}$, prouve que $\mathscr{P}^+$ est maximal. ■

PROPOSITION 3. — *Le rang réel de* G *est égal à* 1.

Démonstration. — On veut éliminer les cas où ce rang est supérieur ou égal à 2. On peut supposer $\Gamma \subset G_e$ et $\mathrm{Ad}(\Gamma)$ sans torsion. Soit $p = \sharp(P^+/P_e^+)$.

Supposons $p < \infty$. En étudiant l'action d'un élément γ de Γ sur l'espace G_e/P_e^+ des feuilles centrales instables du flot $\tilde{\varphi}_t$ et sur l'espace $G_e/M_e A$ des orbites de $\tilde{\varphi}_t$, on montre que $\mathrm{Ad}(\gamma)$ est un élément non semi-simple ou est l'identité. D'autre part, en étudiant l'adhérence de Zariski du groupe adjoint de Γ, on montre que $\mathrm{Ad}(\Gamma)$ contient forcément des éléments semi-simples.

On peut dresser la courte liste des cas où $p = \infty$. On les élimine en reprenant les idées précédentes et en étudiant cas par cas l'action des éléments non semi-simples de $M_e A$ sur G_e/P^+. ■

Note remise le 1er juin 1990, acceptée le 7 juin 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. V. ANOSOV, Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature, *Proc. Stekl. Inst. Math.*, 90, 1967.

[2] E. GHYS, Flots d'Anosov dont les feuilletages sont différentiables, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris*, 20, 1987, p. 251-270.

[3] P. FOULON et F. LABOURIE, Flots d'Anosov à distribution de Liapounov différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série I, 1989, p. 255-260.

[4] M. KANAI, Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, 8, 1988, p. 215-240.

[5] R. FERES et A. KATOK, Invariant tensor fields of dynamical systems with pinched Lyapunov exponents and rigidity of geodesic flows, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, 9, 1989, p. 427-432.

[6] R. FERES et A. KATOK, *Anosov flows with smooth foliations and rigidity of geodesic flows in three dimensional manifolds of negative curvature*, Preprint, Caltech, 1989.

[7] R. FERES, *Geodesic flows on manifolds of negative curvature with smooth horospheric foliations*, Preprint, Berkeley, CA 94720, U.S.A.

[8] Y. BENOIST, P. FOULON et F. LABOURIE, *Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables* (à paraître).

[9] M. GROMOV, Rigid transformation groups, in *Géométrie différentielle*, D. BERNARD et Y. CHOQUET-BRUHAT éd., Travaux en cours, Hermann, Paris, 33, 1988, p. 65-139.

Y. B. : *U.A.* 748 *du C.N.R.S., Univ. Paris-VII, U.F.R. de Mathématiques,* 2, *place Jussieu,* 75251 *Paris Cedex* 05 ;

P. F. : *L.P. n°* 014 *du C.N.R.S., École polytechnique, Centre de Phys. théorique,* 91128 *Palaiseau Cedex ;*

F. L. : *U.R.A. D* 0169 *du C.N.R.S., École polytechnique, Centre de Mathématiques,* 91128 *Palaiseau Cedex.*