Flots d'Anosov
à distributions de Liapounov
différentiables.
(I)

Yves Benoist, Centre de Mathématiques
Université Paris VII

Patrick Foulon, Centre de Physique Théorique
Laboratoire propre du C.N.R.S. 014

François Labourie, Centre de Mathématiques
URA D.0169 du C.N.R.S.

Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau/Cedex

1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette série d'articles aux flots d'Anosov, sur des variétés compactes et associés à des formes de contact, comme par exemple les flots géodésiques sur les fibrés unitaires de variétés à courbure négative. Notre but est de montrer dans [B-F-L] que si les distributions associées aux exposants de Liapounov sont C^k ($k \geq 3$), alors un tel flot est ,après un reparamétrage C^{k-1}, C^k-différentiablement conjugués au flot géodésique d'une variété riemannienne localement symétrique et de rang 1.

Dans ce premier papier, nous présentons un résultat intermédiaire montrant une conjugaison (toujours après une reparamétrisation) à des flots canoniques sur des espaces homogènes. Les reparamétrages sont C^{k-1} et sont classifiés par un élément du premier groupe d'homologie de la variété. Les espaces localement homogènes que l'on obtient sont du type $\Gamma\backslash G/H$ où G est un groupe de Lie simple, H un sous-groupe fermé et Γ un sous-groupe discret. Les paires (G, H) s'obtiennent à partir de la classification des paraboliques maximaux.

Ce résultat s'obtient en étudiant une connexion associée à la dynamique du flôt sur M. Dans notre deuxième papier, nous changerons de point de vue et étudierons la dynamique du groupe fondamental sur l'espaces des orbites du flot sur le revêtement universel.

Une dernière remarque avant de présenter plus précisemment nos résultats en 1.2. : Dans le cas particulier des flots géodésiques sur les variétés riemanniennes, on peut montrer directement en utilisant ce résultat intermédiaire, les idées de Kanai [Ka] et la classification de Borel-Montgomery-Samelson que si les distributions de Liapounov sont C^k, ($k \geq 3$) alors un tel flot est C^k conjugué à un flot géodésique sur une variété localement symétrique de rang 1. Cette idée sera développé dans [B-F-L].

Ces résultats font suite à un ensemble de travaux récents sur la rigidité différentielle des flots d'Anosov, et étendent notamment un résultat de E.Ghys en toutes dimensions.

Nous exprimons notre gratitude à Pierre Pansu pour son intérêt constant pour ce travail et ses remarques toujours pertinentes.

1.1 A propos de la rigidité différentielle. rappelons l'historique des résultats. Pour fixer les notations, rappelons que sur une variété M, un flot ϕ_t, associé à un champ X différentiable, est dit de Anosov s'il existe une décomposition invariante du fibré tangent à M

$$TM = \mathbf{R}X \oplus E^+ \oplus E^- \tag{1}$$

et une métrique riemannienne telles que les sous-fibrés E^- et E^+ de TM satisfont aux inégalités suivantes pour tout t positif

$$\begin{aligned} \|T\phi_t(z^-)\| &\leq a\|z^-\|e^{-bt} \\ \|T\phi_{-t}(z^+)\| &\leq a\|z^+\|e^{-bt} \end{aligned}$$

où $z^\pm$ appartiennent à $E^\pm$, et a et b sont des constantes positives.

Ces flots ont été introduits par Anosov pour étendre et abstraire certaines des propriétés dynamiques des flots géodésiques des variétés riemanniennes à courbure négative. Sur les variétés compactes, ils sont fortement ergodiques. Les distributions stable, E^-, et instable, E^+, sont intégrables. Si le flot est de classe C^k, les feuilles correspondantes sont de classe C^{k-1}. En général, les feuilletages sont transversalement très peu différentiables.

Dans le cas particulier des flots géodésiques des variétés riemanniennes à courbure négative, de meilleures différentiabilités sont obtenues. Avec la condition de pincement 1/4 sur la courbure, elles sont de classe C^1. Pour les surfaces, ces distributions sont toujours de classe C^1. On ne peut faire guère mieux et en particulier, les seuls exemples de classe C^2 connus sont les flots géodésiques sur les espaces localement symétriques de rang 1. Par ailleurs, Hurder et Katok ([H-K]) ont montré que pour les surfaces, la différentiabilité C^2 entraîne la différentiabilité C^∞.

Ainsi de nombreux auteurs ont été conduits à penser que des hypothèses supplémentaires devaient rigidifier la situation. Dans le cas des flots géodésiques sur les variétés riemanniennes, un pas dans cette direction est le

Théorème. (M.Kanaï) [Ka] *Soit M une variété riemannienne fermée de dimension supérieure ou égale à 3, à courbure sectionnelle négative pincée $4/9$. Si la décomposition (1) associée au flot géodésique est de classe C^∞ alors il existe un difféomorphisme de classe C^∞ qui conjugue ce flot au flot géodésique d'une variété à courbure négative constante.*

A.Katok et R.Feres ont prouvé ce résultat, sans condition de pincement pour les variétés de dimension 3, et avec la condition optimale de pincement $1/4$ en dimension 4.

Pour les flots d'Anosov généraux, E.Ghys démontre:

Théorème. (E.Ghys [G]) *Soit ϕ_t un flot d'Anosov de classe C^∞ orientable, sur une 3-variété fermée M. Si la décomposition (1) est de classe C^∞ et si ϕ_t n'est pas une suspension, alors ϕ_t est C^∞ équivalent à un flot algébrique dans le sens suivant: Il existe un difféomorphisme de classe C^∞ de M sur un espace localement homogène $\Gamma \backslash \tilde{Sl}(2,R)$ qui envoie les orbites de X sur celle du "flot diagonal".*

Dans le cas particulier des flots géodésiques des surfaces à courbure négative, E.Ghys montre, de plus, que pour que la décomposition (1) soit de classe C^∞, il faut que la métrique soit à courbure négative constante.

1.2 Présentation des résultats. Remarquons que sur une 2n+1-variété M, à chaque flot de Anosov est canoniquement associé une 1-forme A, invariante par le flot, définie par A(X) = 1 et $A(E^+ \oplus E^-) = 0$. Si la décomposition (1) est de classe C^k, il en va de même de A. Si la forme $A \wedge dA^n$ est une forme volume, A est alors dite *de contact*. Il s'agit en quelque sorte du cas opposé des flots obtenus comme suspension. Si M est compacte, cette forme volume définit une mesure de probabilité μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et invariante par le flot. En appliquant le théorème ergodique sous-additif de Osseledec dans ce cas, nous obtenons un ensemble invariant Ω de mesure pleine, tel que pour tout x dans Ω il existe une décomposition invariante,

$$E_x^\pm = \oplus E_i^\pm \ 1 \le i \le s \tag{2}$$

telle que les limites suivantes existent pour $Z_i^\pm \in E_i^\pm$,

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left(\frac{1}{t} \log \|T\phi_t(Z_i^+)\|\right) = \gamma_i(x) > 0$$
$$\lim_{t \to \pm\infty} \left(\frac{1}{t} \log \|T\phi_t(Z_i^-)\|\right) = -\gamma_i(x) < 0.$$

Les s fonctions mesurables $\gamma_i(x)$ sont invariantes par le flot, presque partout constantes, et sont appelées exposants de Liapounov du flot.

Avec ces différentes notations nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème que nous démontrerons dans [B-F-L].

Théorème. *Soit ϕ_t un flot d'Anosov de classe C^k $(k \geq 3)$ sur une 2n+1 variété compacte M sans bord dont la forme canonique est de contact. Si la décomposition d'Osseledec (2) coïncide presque partout avec une décomposition partout définie et de classe C^k, alors sur un revêtement fini de M après une reparamétrisation C^{k-1}, le flot est C^k conjugué au flot géodésique du fibré unitaire d'une variété riemannienne localement symétrique de rang 1. De plus, dans le cas particulier du flot géodésique d'une variété riemannienne, nous obtenons une conjugaison sans avoir besoin de reparamétrer.*

Dans ce papier, nous démontrerons les résultats intermédiaires suivants:

Théorème 1. *Soit ϕ_t un flot d'Anosov de classe C^k $(k \geq 3)$ sur une 2n+1 variété compacte M sans bord dont la forme canonique est de contact. Si la décomposition d'Osseledec (2) coïncide presque partout avec une décomposition partout définie et de classe C^k, alors le flot est C^k conjugué à un flot algébrique produit de la manière suivante. Il existe un groupe G simple avec un nombre fini de composantes connexes tel que*

(1) son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ contient un élément X semi-simple qui la gradue en

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \Sigma_i \mathcal{G}_i^+ \oplus \Sigma_i \mathcal{G}_i^- .$$

Les valeurs propres de $ad(X)$ sur la graduation sont respectivement 0, γ_i, $-\gamma_i$.

(2) La sous-algèbre de lie $\mathcal{G}_0$ se décompose elle-même en $\mathcal{G}_0 = \mathbf{R}X \oplus \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ est l'algèbre de lie d'un sous-groupe H fermé.

(3) De plus, la sous-algèbre $\mathcal{G}^+$ de $\mathcal{G}$ définie par

$$\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_0 \oplus \Sigma_i \mathcal{G}_i^+,$$

est une sous-algèbre parabolique maximale.

Le flot de X nous donne alors un flot G-équivariant sur G/H, ainsi $G \times \mathbf{R}$ agit sur G/H, l'action de $\mathbf{R}$ étant donnée par le flot de X, agissant à droite sur G.

Notre flot ϕ_t sur M est alors conjugué au flot de X sur une variété compacte $\Gamma\backslash G/H$ où Γ est un sous-groupe discret de $G \times \mathbf{R}$. Les sous-espaces $E_i^{\pm}$ s'identifient aux sous-espaces $\mathcal{G}_i^{\pm}$, les γ_i aux valeurs presque-sûres des exposants de Liapounov.

Deux remarques maintenant.

(i) Géométriquement, les espaces homogènes obtenus se construisent, à un revêtement près, de la manière suivante. On considère G un groupe semi-simple, K son compact maximal et $M = G/K$ l'espace symétrique associé. Soit u un vecteur unitaire tangent à M dans le coin d'une chambre de Weyl. On considère maintenant N l'orbite de u pour l'action de G dans le fibré unitaire de M. Le flot géodésique respecte alors N, si le rang de G est plus grand que 1, ce flot n'est pas Anosov.

L'orbite N est feuilleté par des feuilles associés à l'exposant de Liapounov zéro. Ces feuilles sont constitués de la réunion des geodésiques qui restent à une distance bornée d'une géodésique donnée. Feuilletons ces feuilles par les sous-variétés orthogonales aux orbites du flot. L'espace des feuilles de ce nouveau feuilletage est alors, à un revêtement près l'espace homogène que nous obtenons.

(ii) Remarquons enfin que Γ agit à la fois à gauche et à droite sur G. En effet, Γ est un sous-groupe de $G \times \mathbf{R}$, nous obtenons donc une représentation de Γ dans G qui nous fournit l'action à gauche, et un morphisme dans $\mathbf{R}$, associé un élément du premier groupe d'homologie de la variété, qui nous fournit l'action à droite. Le théorème suivant nous dit que l'on peut redresser l'action de Γ en le faisant agir uniquement à gauche.

Nous obtenons également

Théorème 2. *Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème 1, et si le flot d'Anosov est orientable, il existe un difféomorphisme C^k conjuguant les orbites du flot de M avec celles de X sur une variété du type $\Gamma\backslash G/H$, obtenue comme précédemment, mais où Γ est un sous-groupe discret de G. A nouveau, les sous-espaces $E_i^{\pm}$ s'identifient aux sous-espaces $G_i^{\pm}$, les γ_i sont alors les valeurs presque-sûres des exposants de Liapounov.*

Enfin, nous démontrerons un dernier résultat

Théorème 3. *Avec les mêmes hypothèses que celles du théorème l, et si de plus ϕ_t est le flot géodésique d'une variété riemannienne, alors le flot de M est conjugué (sans reparamétrisation) avec le flot de X sur une variété du type $\Gamma\backslash G/H$ obtenue comme précédemment.*

2 Une première structure d'espace homogène

Introduisons une convention: nous indexerons les distributions associées aux exposants de Liapounov par ces mêmes exposants, ainsi nous noterons E_λ l'espace, éventuellement réduit au vecteur nul, constitué des vecteurs ayant pour exposant de Liapounov λ, λ pouvant être négatif ou positf. Dans certains cas il sera important de préciser si E_λ est dans E^+ ou E^-, c'est à dire si λ est positif ou négatif, nous utiliserons alors les conventions $E_i^{\pm} = E_{\pm i}$, ou i sera supposé positif.

Notre stratégie va être, comme l'a fait Kanaï, d'utiliser le théorème suivant, ou plutôt d'en adapter la démonstration.

2.1 Théorème. ([K-No]) *Soit N une variété simplement connexe, ∇ une connexion complète telle que $\nabla R = 0$ et $\nabla T = 0$ et S une famille de tenseurs parallèles, alors le groupe des transformations affines qui préservent S est un groupe de Lie qui agit transitivement sur N.*

2.2 Une connexion adaptée. Dès que la décomposition (2) est au moins C^1, nous allons construire une unique connexion sur TM, grâce à la

2.3 Proposition. *Il existe une unique connexion ∇, invariante par le flot, qui parallélise la structure géométrique dans le sens suivant,*

$$\nabla A = 0,\ \nabla dA = 0,\ \nabla E_i^{\pm} \subset E_i^{\pm}, \tag{3}$$

et telle que pour toute section Z_i^+ de E_i^+, Z_j^- de E_j^- nous avons

$$(i)\ \nabla_{Z_i^-} Z_j^+ = p_j^+[Z_i^-, Z_j^+], \quad \nabla_{Z_j^+} Z_i^- = p_i^-[Z_j^+, Z_i^-],$$
$$(ii)\ \nabla_X Z_j^+ = [X, Z_j^+] + \gamma_j Z_j^+, \quad \nabla_X Z_i^- = [X, Z_i^-] - \gamma_i Z_i^-,$$

où $p_i^{\pm}$ dénote la projection sur $E_i^{\pm}$ donnée par la décomposition.

preuve: Il ne nous reste plus qu'à définir $\nabla_{Z_i^+} Z_j^+$ (resp. $\nabla_{Z_i^-} Z_j^-$). Remarquons que l'on obtient aisément de (3) que, si Z_k^- appartient à E_k^-

$$dA(\nabla_{Z_i^+} Z_j^+, Z_k^-) = L_{Z_i^+} dA(Z_j^+, Z_k^-) - dA(Z_j^+, \nabla_{Z_i^+} Z_k^-).$$

Dès lors par (ii)

$$dA(\nabla_{Z_i^+} Z_j^+, Z_k^-) = L_{Z_i^+} dA(Z_j^+, Z_k^-) + dA(Z_j^+, p_k^-[Z_k^-, Z_j^+]).$$

Ceci détermine uniquement $\nabla_{Z_i^+} Z_j^+$ et la connexion. ■

Par construction, cette connexion est invariante par le flot. Si la décomposition (2) est C^3, on peut calculer non seulement sa courbure R sa torsion T, mais aussi leurs dérivées covariantes ∇R et ∇T. Tous ces tenseurs sont eux aussi invariants par le flot. Nous avons alors

2.4 PROPOSITION. *La courbure et la torsion de ∇ sont parallèles et vérifient*

$$R(E_i, E_j) = 0, \text{ si } i + j \neq 0, \ T(E_i, E_j) \subset E_{i+j}.$$

Cette proposition découle immédiatement du

2.5 LEMME. *Soit K un tenseur invariant borné à valeurs dans TM alors, presque partout, si Z_i appartient à E_{γ_i},*

$$K(Z_1, ..., Z_k) \in E_{\gamma_1 + ... + \gamma_k}.$$

En particulier, si K est différentiable ∇K est nul.

preuve: En effet, il existe $c_0 \geq 0$ tel que pour tout reél t

$$\|T\phi_t(K(Z_1, ..., Z_k))\| = \|K(T\phi_t(Z_1), ..., T\phi_t(Z_k))\| \leq c_0 \|T\phi_t(Z_1)\| ... \|T\phi_t(Z_k)\|.$$

Si $K(Z_1, ..., Z_k)$ est non nul, il vient pour $t > 0$

$$\frac{1}{t} \log(\|T\phi_t(K(Z_1, ..., Z_k))\|) \leq \frac{1}{t} \log(c_0 \|T\phi_t(Z_1)\| ... \|T\phi_t(Z_k)\|),$$

et pour $t < 0$

$$\frac{1}{t} \ log(\|T\phi_t(K(Z_1, ..., Z_k))\|) \geq \frac{1}{t} \log(c_0 \|T\phi_t(Z_1)\| ... \|T\phi_t(Z_k)\|).$$

D'où l'on déduit les inégalités, valables presque partout si les vecteurs Z_i appartiennent à E_{γ_i}:

$$\lim_{t \to +\infty} (\frac{1}{t} \log(\|T\phi_t(K(Z_1, ..., Z_k))\|)) \leq \gamma_1 + ... + \gamma_k;$$
$$\lim_{t \to -\infty} (\frac{1}{t} \log(\|T\phi_t(K(Z_1, ..., Z_k))\|)) \geq \gamma_1 + ... + \gamma_k.$$

La première relation entraine que $K(Z_1, ..., Z_k)$ n'a des composantes que sur les sous-espaces d'exposants de Liapounov inférieurs ou égaux à $\gamma_1 + ... + \gamma_k$ et la seconde que sur les espaces dont les exposants sont supérieurs ou égaux à $\gamma_1 + ... + \gamma_k$.

Si K est différentiable, considérons le tenseur ∇K. Remarquons tout d'abord que par définition de la connexion, ∇K est invariant par le flot et $\nabla_X K$ est nul.

Soit à nouveau Z_i appartenant à E_{γ_i} alors, d'une part, d'après ce qui précède

$$\nabla_{Z_1} K(Z_2, ..., Z_{k+1}) \in E_{\gamma_1 + ... + \gamma_{k+1}},$$

d'autre part les E_{γ_i} étant parallèles, nous avons

$$\nabla_{Z_1} K(Z_2, ..., Z_{k+1}) \in E_{\gamma_2 + ... + \gamma_{k+1}}.$$

Nous obtenons donc notre résultat. ∎

2.6 Corollaire. *Il existe une structure analytique sur M, telle que ϕ_t, la décomposition (2) et la connexion ∇ soit analytique.*

preuve: En effet, une version préliminaire du théorème 2.1. (voir [K-No]) nous assure que si la torsion et la courbure d'une connexion sont parallèles sur une variété M, alors cette variété est munie d'une $(G, G/H)$-structure pour un groupe de Lie G et un sous-groupe fermé H. Par $(G, G/H)$-structure, nous entendons un atlas à valeurs dans G/H et dont les changements de cartes soient dans G.

La structure analytique définie par cet atlas vérifie alors les conclusions du corollaire. ∎

Nous allons montrer maintenant que le groupe des transformations affines de $\tilde{M}$, le revêtement universel de M, qui préserve X, A, dA et la décomposition agit transitivement. Il nous faudrait pour cela d'après 2.1. prouver la complétude de notre connexion. Nous verrons plus loin qu'il nous suffit de montrer

2.7 Proposition. *Les géodésiques tangentes aux distributions stables et instables sont complètes.*

preuve: Soit g une métrique riemanienne annexe. Utilisons maintenant la structure analytique sur M obtenue dans le corollaire précédent. Pour cette structure, l'application exponentielle associée à la connexion est de classe C^∞. Dès lors, par compacité il existe une constante $c(g)$ telle que si Y est un vecteur tangent à E^+, tel que

$$g(Y, Y) < c(g),$$

alors la géodésique dont la condition initiale est Y s'intègre pour un temps supérieur ou égal à 1.

Or quand t tend vers $-\infty$, la norme de $T\phi_t(Y)$ tend vers 0, autrement dit pour tout Y de E^+, il existe t tel que $\|T\phi_t(Y)\| < c(g)$. Dès lors, la géodésique tangente à $T\phi_t(Y)$ s'intègre pour un temps supérieur à 1. Le flot étant une transformation affine, nous obtenons le même résultat pour Y, d'où l'on déduit que la géodésique dans la direction de Y est complète.

Le même raisonnement se reproduit symétriquement pour les géodésiques tangentes à E^-. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de montrer

2.8 PROPOSITION. *Le groupe des transformations affines de $\tilde{M}$ qui préservent X, A, dA et la décomposition agit transitivement.*

preuve: Il n'est pas inutile de revenir à la démonstration du théorème 2.1. et de l'expliciter dans notre cas.

L'idée est la suivante: soit x un point de $\tilde{M}$ et $(V_1, ..., V_n)$ un repère de E_x^+ et $(V_{-1}, ..., V_{-n})$ la base duale de E^- définie à l'aide de la forme symplectique dA. Soient également T_{ij}^k, R_{ijk}^l, où i, j, k et l appartiennent à $\{-n, ..., -1\} \cup \{1, ..., n\}$ les nombres tels que

$$T(V_i, V_j) = T_{ij}^k V_k, \quad R(V_i, V_j)V_k = R_{ijk}^l V_l.$$

On considère maintenant le fibré F au dessus de M dont la fibre en un point y est l'ensemble des repères $(W_1, ..., W_n)$ de E_y^+ tels que si $(W_{-1}, ..., W_{-n})$ désigne la base duale dans E^-, alors

$$T(W_i, W_j) = T_{ij}^k W_k, \quad R(W_i, W_j)W_k = R_{ijk}^l W_l.$$

La courbure et la torsion étant parallèles, un isomorphisme entre les fibres s'obtient grâce au transport parallèle. Ce fibré est bien sur muni d'une connexion qui en fait un fibré principal dont le groupe structural est le groupe H, inclus dans le groupe linéaire de T_xM préservant les tenseurs R et T. Une base de l'algèbre de Lie de H nous fournit en tout point de F une base de l'espace tangent à la fibre. Une base canonique de l'espace horizontal identifié à TM s'obtient en considérant, le vecteur X, sur E^+ le repère determiné par le point de F en lequel nous sommes (qui est, rappelons le, un repère de E^+), et sur E^- la base duale pour dA.

La parallélitude de la courbure et de la torsion, entrainent que ces champs de vecteurs ont des crochets constants. Par ailleurs, d'après notre proposition précédente, ces champs de vecteurs sont complets. Il est classique de montrer que ces champs de vecteurs proviennent de l'action d'un groupe de Lie $\tilde{G}$ agissant transitivement sur F, $\tilde{M}$ s'identifiant alors à $\tilde{G}/\tilde{H}$. ∎

3 Le groupe des transformations affines

Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, muni de la connexion induite, et $\tilde{G}$ le groupe des transformations affines de $\tilde{M}$ qui préservent notre structure géométrique. Soit également $\tilde{H}$, le sous-groupe d'isotropie d'un point x. Nous avons vu en 2.8. que $\tilde{G}$ est transitif sur $\tilde{M}$.

Décrivons tout d'abord les algèbres de lie $\tilde{\mathcal{G}}$ de $\tilde{G}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ de $\tilde{H}$. Un élément h de $\tilde{\mathcal{H}}$ est une transformation linéaire infinitésimale de contact qui préserve la décomposition (2) mais aussi la courbure et la torsion. Par construction pour tout Y et Z de T_xM, l'opérateur $R(Y,Z)$ appartient à $\tilde{\mathcal{H}}$

Comme $\tilde{M} = \tilde{G}/\tilde{H}$, l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{H}} \oplus T_xM$. Si Z et Y appartiennent à T_xM et h à $\tilde{\mathcal{H}}$ les relations de crochets de l'algèbre de lie $\tilde{\mathcal{G}}$ sont données par:

$$
\begin{aligned}
[Y, Z] &= T(Y, Z) - R(Y, Z), \\
[h, Y] &= h(Y), \\
[h, f] &= h \circ f - f \circ h.
\end{aligned}
$$

Nous obtenons alors immédiatement la

3.1 Proposition. *Si on note $\tilde{\mathcal{G}}_0 = \tilde{\mathcal{H}} \oplus \mathbf{R}X$ et $\tilde{\mathcal{G}}_i = E_i$, l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$ est graduée en,*

$$\tilde{\mathcal{G}} = \oplus \tilde{\mathcal{G}}_i, \ [\tilde{\mathcal{G}}_i, \tilde{\mathcal{G}}_j] \subset \tilde{\mathcal{G}}_{i+j}.$$

De plus $L = ad(X)|_{T\tilde{M}}$, appartient à $\tilde{\mathcal{H}}$ et nous avons $L|_{\tilde{\mathcal{G}}_i} = \gamma_i.Id$. Le centre de $\tilde{\mathcal{G}}$ est engendré par $L - X$.

Nous allons montrer tout d'abord que $\tilde{G}$ est réductif. Pour cela, les outils développés dans le paragraphe suivant nous seront utiles.

3.2 Formes de courbure.

Soit F un sous-fibré parallèle du fibré tangent à M et Λ le fibré (de rang 1) des formes volumes sur F. Ce dernier fibré est naturellement muni d'une connexion induite de ∇ et soit alors Ω la 2-forme de courbure de ce fibré. Cette forme est, bien sûr, invariante par le flot et vérifie

$$\Omega(Y, Z) = \mathrm{trace}(R(Y, Z)|_F).$$

Soit alors B, l'opérateur défini par

$$\Omega(Y, Z) = dA(Y, BZ), \quad A(BZ) = 0.$$

Nous allons montrer la

3.3 Proposition. *L'opérateur B est nilpotent.*

Nous pouvons toujours supposer que F est orientable, éventuellement en prenant un revêtement à 2 feuillets de M. Soit alors ω une section jamais nulle de Λ, la forme de courbure est la différentielle de la forme β définie par

$$\nabla_Z \omega = \beta(Z).\omega.$$

Nous avons alors

3.4 LEMME. *La forme β a une valeur moyenne temporelle presque sûrement nulle: pour presque tout m dans M:*

$$\lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{t}\int_0^t \beta(X(\phi_t(m))dt) = 0.$$

preuve: remarquons tout d'abord que F étant parallèle, il est invariant par le flot et se décompose en

$$F = \bigoplus F_i, \quad F_i = F \cap E_i. \tag{1}$$

En effet, soit V un vecteur de F. Transportons le par le flot, il s'écrit

$$V(t) = T\phi_t(V) = \Sigma V_i(t), \quad V_i(t) \in E_i.$$

Le fibré Fétant parallèle, nous en déduisons que $\nabla_X V$, $\nabla_X\nabla_X V$, $\nabla_X...\nabla_X V$ appartiennent également à F. Dès lors par définition de la connexion, pour tout p

$$\Sigma i^p V_i(t) \in F.$$

Ceci entraine que les V_i appartiennent à F et notre décomposition (1).

Notons maintenant s la quantité $\Sigma\dim(F_i).i$.

Soit $\Delta(t)$ le déterminant (calculé grâce à notre choix de ω) du transport parallèle restreint à F sur un temps t le long des orbites. . D'après la construction de la connexion,

$$\Delta(t) = e^{-s.t}\det(T\phi_t|_F).$$

Par ailleurs, la fonction $\beta(X)$ est égale la dérivée logarithmique du determinant $\Delta(t)$ du transport parallèle par le flot restreint à F. Nous obtenons donc

$$-\beta(X) = \frac{d}{dt}\log(\det(T\phi_t|_F)) - s. \tag{$*$}$$

On conclut en utilisant le fait que presque partout

$$\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{t}\log(\det(T\phi_t|_F)) = s.$$

■

La proposition 3.3. est alors une conséquence immédiate du

3.5 LEMME. *Pour tout p, $1 \leq p \leq n$, nous avons:* $\Omega^p \wedge dA^{n-p} = 0$

preuve: par ergodicité, Ω étant invariante par le flot, il existe des constantes c_p telles que

$$A \wedge \Omega^p \wedge dA^{n-p} = c_p A \wedge dA^n.$$

Or maintenant, par intégration par partie, il vient

$$\begin{aligned}\int_M A \wedge \Omega^p \wedge dA^{n-p} &= \int_M \beta \wedge \Omega^{p-1} \wedge dA^{n-p+1}\\ &= c_{p-1}\int_M \beta(X) A \wedge dA^{2n}.\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est nulle d'après le lemme précédent et le théorème de Birkhoff. Ceci entraîne que c_p est nulle et donc notre lemme. ■

3.6 L'algèbre de lie $\tilde{\mathcal{G}}$ est réductive.

Montrons donc

3.7 PROPOSITION. *L'algèbre de lie $\tilde{\mathcal{G}}$ n'admet pas d'idéal nilpotent non trivial autre que son centre $\mathcal{C}$.*

preuve: Soit I un idéal de $\tilde{\mathcal{G}}$. Sous l'action de X, il se décompose suivant la graduation

$$I = \bigoplus I_i, \quad I_i = I \cap \tilde{\mathcal{G}}_i.$$

Montrons tout d'abord que pour tout i non nul I_i est réduit à 0. Si Z est dans I_i et Y dans E_{-i}, $[Z, Y]$ appartient à I_0. L'idéal I étant nilpotent, l'adjoint de ce crochet est de trace nulle sur tout sous-espace stable par I. En particulier

$$\mathrm{trace}|_{E_i}(ad[Z, Y]) = 0.$$

Or

$$[Z, Y] = T(Z, Y) - R(Z, Y).$$

Nous obtenons donc, en notant Ω_i la forme de courbure associée au sous-fibré E_i et n_i le rang de ce fibré que

$$\Omega_i(Z, Y) - n_i i.dA(Z, Y) = 0. \tag{1}$$

Soit alors B_i l'opérateur associé à Ω_i. Cet opérateur invariant par le flot envoie donc E_j dans lui même (cf 2. 5.). Puisqu'il est nilpotent d'après 3.3., $n_i i.Id - B_i$ est inversible, d'où l'on déduit que Z est nul, l'égalité (1) étant vraie pour tout Y de E_{-i}.

Dès lors I est inclus dans $\tilde{\mathcal{G}}_0$. Soit donc Z un élément non nul de I, il se décompose alors en $Y + h$, où Y appartient au centre et h à $\tilde{\mathcal{H}}$. Maintenant, I étant un idéal, $[Z, V]$ est nul pour tout V de $T_x M$ et en particulier $h(V)$ (cf 3.0.) est nul. Ce dernier point entraine que h est nul et notre résultat. ∎

4 PREUVE DU THÉORÈME 1

Montrons tout d'abord

4.1 LEMME. *Pour tout sous-fibré vectoriel parallèle F du fibré tangent à M, la 2-forme de courbure, Ω, du fibré des formes volumes sur F (voir 3.2.) est nulle.*

preuve: Cette forme est invariante par toutes les transformations affines et par conséquent, l'opérateur associé B commute avec $\tilde{\mathcal{H}}$. L' algèbre $\tilde{\mathcal{G}}$ étant réductive, on peut trouver une sous-algèbre de Cartan η qui contient X . En raison de la graduation η est incluse dans $\tilde{\mathcal{G}}_0$. On montre ensuite aisément qu'un opérateur linéaire nilpotent qui commute avec tout élément de η est nécessairement nul. ∎

4.2 Construction d'un sous-groupe G. Nous pouvons donc montrer une première partie de notre théorème. Le lemme précédent entraîne qu'il existe une forme volume ω sur E^+, définie sur $\tilde{M}$ et parallèle. Cette forme volume nous permet de définir un homomorphisme τ de $\tilde{G}$ dans $\mathbf{R}$ donné par, en notant h l'entropie métrique ($h = \Sigma_i \gamma_i.dim E_i^+$

$$g^*\omega = e^{h.\tau(g)}\omega.$$

Remarquons que si nous notons ρ le morphisme d'holonomie du $\pi_1(M)$ dans $\tilde{G}$, l'homomorphisme $h.\tau \circ \rho$ est l'holonomie de la connexion ∇ sur Λ^+.

Le théorème 2.1. nous assure ensuite que le sous-groupe $G = \tau^{-1}(0)$ de $\tilde{G}$ qui préserve ω est transitif. Enfin, remarquons maintenant que $\tilde{G}$ est isomorphe à $G \times \mathbf{R}$. L'isomorphisme étant donné par

$$g \longrightarrow (g \circ \phi_{-\tau(g)}, \tau(g)).$$

En effet, $\tau(\phi_t) = t$. Enfin, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est bien sûr $[\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{G}}]$, ce qui montre que G est semi-simple. Soit $H = \tilde{H} \cap G$ et $\mathcal{H}$ son algèbre de Lie. Pour obtenir la graduation sur $\mathcal{G}$, il nous faut montrer que X appartient à $\mathcal{G}$ et nous aurons notre graduation en prenant

$$\mathcal{G}_0 = \mathbf{R}X \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{G}_i = \tilde{\mathcal{G}}_i.$$

Ce dernier point est essentiellemnt une trivialité. Notons g_t le difféomorphisme de $\tilde{M}$ donné par $\exp(tX)$. Par construction, la différentielle $T_e g_t$ de g_t calculée sur la classe e de l'élément neutre est le transport parallèle pendant un temps t le long de l'orbite du flot. Dès lors ω étant parallèle, nous avons

$$g_t^*\omega = \omega.$$

Autrement dit, g_t appartient à G.

Avant de continuer, remarquons la

4.3 PROPOSITION. *Soit F un sous-fibré de $T\tilde{M}$ invariant par $\tilde{G}$, alors pour tout élément h de $\mathcal{H}$ nous avons*

$$\text{trace}(h|_F) = 0.$$

preuve: en effet, ce sous-fibré F est parallèle et invariant sous l'action du $\pi_1(M)$. Par projection, nous obtenons ainsi un sous-fibré de TM parallèle.

D'après le lemme 4.1., le fibré des formes volumes sur F est plat. En particulier, choisissons ω_0 une forme volume sur F définie sur $\tilde{M}$ et parallèle, elle nous permet donc de définir un homomorphisme δ de G dans $\mathbf{R}$ associant à un élément g de G le nombre $\delta(g)$ défini par

$$g^*\omega_0 = e^{\delta(g)}\omega_0.$$

Or tout homomorphisme d'un groupe semi-simple dans $\mathbf{R}$ est trivial. En particulier G préserve ω_0,ce qui entraîne notre proposition. ■

4.4 . Il nous reste simplement à montrer que la sous-algèbre de lie $\mathcal{G}^+$ définie par

$$\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_0 \oplus \Sigma_i \mathcal{G}_i^+,$$

est une sous-algèbre parabolique maximale.

L'élément X étant hyperbolique (c'est à dire que son spectre est réel), on peut trouver une décomposition de Cartan

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P},$$

où $\mathcal{K}$ est la sous-algèbre de Lie d'un compact maximal et $\mathcal{P}$ contient X. Soit également $\mathcal{A}$ un sous-espace de Cartan de $\mathcal{P}$ contenant X. On considère Σ le système de racines restreintes associées à $\mathcal{A}$ et Π une base de ce système. A nouveau, on peut toujours supposer que, pour tout α appartenant à Π, $\alpha(X)$ est positif ou nul.

On considère alors

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi / \alpha(X) > 0\}.$$

Par définition, $\mathcal{G}^+$ est parabolique maximale si le cardinal de Π^+ est 1. On considère également

$$\mathcal{A}^+ = \{Y \in \mathcal{A} / \forall \alpha \in (\Pi \setminus \Pi^+),\ \alpha(Y) = O\}.$$

Par construction, la dimension de $\mathcal{A}^+$ est le cardinal de Π^+. Une autre manière de décrire $\mathcal{A}^+$ est de dire que c'est la partie hyperbolique (i.e les éléments dont le spectre est réel) du centre de $\mathcal{G}_0$.

Soit donc Y un élément hyperbolique du centre de $\mathcal{G}_0$. Nous voulons montrer qu'il est colinéaire à X. Soit donc h la projection de Y sur $\mathcal{H}$ parallèlement à X, il est clair que h appartient à $\mathcal{A}^+$.

Supposons que h est non nul et soit V un sous-espace propre de $ad(h)$ associé à une valeur propre λ non nulle.

l'élément h appartenant au centre de $\mathcal{G}_0$, nous en déduisons que $[V, \mathcal{G}_0]$ est inclus dans V. Ceci entraîne que V définit un sous-fibré F de $T\tilde{M}$ dans $\tilde{M}$ invariant par le groupe G et le flot. Maintenant, nous déduisons de la proposition 4.3. que trace$(h|_F)$ est nulle. Or cette trace vaut $\lambda.\dim(V)$. Nous obtenons ainsi notre contradiction.

Soit donc ω^+ une forme volume sur E^+ définie sur M. Soit également β^+ la 1-forme de connexion associée comme en 3.3. par

$$\nabla_Z \omega^+ = \beta^+(Z).\omega^+.$$

Nous avons maintenant besoin d'un lemme

5.1 LEMME. *Soit β^+ la forme de connexion, asociée à ω^+, du fibré Λ^+ des formes volumes sur E^+ et h l'entropie. Il existe alors une 1-forme α cohomologue à $\frac{1}{h}\beta^+$, telle que $1 + \alpha(X) > \epsilon > 0$.*

preuve: Par définition de la forme de connexion nous avons, pour tout m, d'après $(*)$ de 3.4.

$$\frac{1}{t}\log(\det(T\phi_t(m)|_{E^+})) = h + \frac{1}{t}\int_0^t \beta^+(X(\phi_t(m)))dt$$

Or, pour un flot d'Anosov et pour tout t positif

$$\frac{1}{t}\log(det(T\phi_{-t}(m)|_{E^+})) \leq \frac{1}{t}\log(c) - d,$$

pour des constantes c et d positives. Dès lors, pour un t_0 (et négatif ...) bien déterminé nous avons

$$h + \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \beta^+(X(\phi_t(m))dt > b > 0.$$

Nous obtenons notre résultat en prenant

$$h.\alpha = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \phi_t^*(\beta^+)dt.$$

■

Par ailleurs remarquons la

5.2 PROPOSITION. *la 1-forme α du lemme précédent représente en cohomologie de de Rham, l'homomorphisme $-\tau \circ \rho$ (voir 4.2.) du $\pi_1(M)$ dans $\mathbf{R}$.*

preuve: Nous avons déjà remarqué que $h.\tau \circ \rho$ du $\pi_1(M)$ dans $\mathbf{R}$ était l'homomorphisme d'holonomie du fibré Λ^+. La proposition découle alors simplement du fait que l'homomorphisme d'holonomie sur un fibré en droites plat est représenté en cohomologie de de Rham par *l'opposé* de la 1-forme de connexion. ■

5.3 . Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème. Notons $\rho = (\rho_1, \tau)$ la représentation du $\pi_1(M)$ dans $\tilde{G} = G \times \mathbf{R}$. Notons enfin f, la fonction, definie sur $\tilde{M} = G/H$, dont la différentielle est α, et qui vaut 0 sur la classe de l'élément neutre.

Nous allons construire un difféomorphisme ψ de G/H dans lui-même, préservant les orbites du flot et vérifiant pour tout γ de $\pi_1(M)$,

$$(*) \qquad \psi \circ \rho(\gamma) = \rho_1(\gamma) \circ \psi.$$

Dans cette formule, nous considérons $\rho(\gamma)$ et $\rho_1(\gamma)$ comme des difféomorphismes de $\tilde{M}$.

Ce difféomorphisme est donné par la formule explicite suivante

$$\psi(z) = \phi_{f(z)}(z).$$

Il est clair que ψ préserve les orbites du flot. Il nous reste donc à montrer

(i) L'application ψ et un difféomorphisme.

(ii) Elle vérifie bien l'équation de commutation $(*)$.

Ceci entraîne notre résultat de la manière suivante: tout d'abord $\rho_1(\gamma)$ agit proprement discontinuement sans point fixe sur G/H à cause de la relation de conjugaison $(*)$ et puisque ψ est un difféomorphisme. Ensuite ψ, toujours à cause de $(*)$, passe au quotient et nous fournit un difféomorphisme préservant les orbites entre $\rho(\pi_1(M))\backslash\tilde{G}/\tilde{H}$ et $\rho_1(\pi_1(M))\backslash G/H$.

5.4 . Montrons (i).

Nous nous intéresserons tout d'abord à la différentielle de ψ. D'après notre formule nous obtenons

$$T\psi(Z) = T\phi_{f(y)}(Z) + df(Z)X.$$

Par contruction df vaut α, et le lemme 5.1. nous assure que $df(X)$ est différent de 1, c'est à dire que $T\psi$ est injective.

Nous allons démontrer maintenant que ψ est une bijection. soit donc y un point de $\tilde{M}$, nous cherchons z tel que

$$\phi_{-f(z)}(z) = y.$$

Nécessairement nous avons

$$(1) \qquad z = \phi_{t_0} y.$$

Nous cherchons donc en fait t_0 tel que

$$t_0 + f(\phi_{t_0}(y)) = 0.$$

Considérons donc la fonction g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$g(t) = t + f(\phi_t)(y).$$

D'après le lemme 5.1., $\frac{dg}{dt}$ est supérieur à ϵ strictement positif. En particulier, g est une bijection, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de t_0 vérifiant (1).

5.5 . Montrons maintenant (ii).

Il nous faut donc vérifier, pour tout γ de $\pi_1(M)$, la relation

$$\psi \circ \rho(\gamma) = \rho_1(\gamma) \circ \psi. \tag{$*$}$$

Il s'agit d'une suite d'identifications triviales que nous allons expliciter. Nous voulons donc montrer

$$\phi_{-f(\rho(\gamma)(z))}(\rho(\gamma)(z)) = \rho_1(\gamma)(\phi_{-f(z)}(z)). \tag{2}$$

Or d'après 4.2.

$$\rho_1(\gamma) = \rho(\gamma) \circ \phi_{-\tau(\rho(\gamma))}.$$

En remplaçant dans (2) et en utilisant le fait que les éléments de $\tilde{G}$ commutent avec le flot, notre relation se réduit à

$$f(\rho(\gamma)(z)) = f(z) - \tau(\rho(\gamma)). \tag{3}$$

Or maintenant, si C est une courbe reliant z à $\rho(\gamma)(z)$, nous avons

$$f(\rho(\gamma)(z)) - f(z) = \int_C \alpha,$$

et d'après la proposition 5.2., nous avons

$$\int_C \alpha = -\tau(\rho(\gamma)).$$

Ceci montre donc (3) et, par là, notre relation de commutation $(*)$.

6 Preuve du théorème 3.

Il nous faut en fait démontrer que la représentation τ définie précédemment est triviale. Pour cela, nous utiliserons la propriété suivante triviale des fibrés unitaires $U(M)$ des variétés riemaniennes M:

Si σ est l'antipodie de $U(M)$ qui associe à un vecteur unitaire son opposé, alors σ conjugue le flot géodésique en son opposé. En particulier, elle préserve la connexion. Par ailleurs, elle est difféotope à l'identité.

Maintenant, soit ω^+ une forme volume sur E^+, et β^+ la 1-forme de connexion du fibré Λ^+ des formes volumes de E^+ définie par

$$\nabla_Z \omega^+ = \beta^+(Z).\omega^+.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, cette 1-forme β^+ est fermée et représente en cohomologie de de Rham l'homomorphisme $-\tau$. Si nous étions partis d'une forme volume sur E^-, nous aurions obtenu une 1-forme de connexion du fibré Λ^- des formes volumes sur E^- représentant en cohomologie de de Rham l'homomorphisme τ. En effet, $\Lambda^+ \otimes \Lambda^-$ est le fibré des formes volumes sur $E^+ \oplus E^-$, dont l'holonomie est triviale, puisque que la forme volume déduite de dA est parallèle.

Considérons maintenant $\sigma^*\omega^+$. C'est une forme volume sur E^-. Comme σ préserve la connexion, la 1-forme de connexion associée est $\sigma^*\beta^+$ qui, comme nous venons de le remarquer, représente τ.

Or σ étant difféotope à l'identité, β^+ et $\sigma^*\beta^+$ sont égaux cohomologiquement. Ceci montre que τ est trivial.

[B-F-L] Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie, *Flots d'Anosv à distributions de Liapounov différentiables (II), en préparation*

[F-K 1] R. Feres, A. Katok, *Invariant tensor fields of dynamical systems with pinched Lyapunov exponents and rigidity of geodesic flows,* to appear in Erg. Th. Dynam. Syst.

[F-K 2] R. Feres, A. Katok, *Anosov flows with smooth foliations and rigidity of geodesic flows in three-dimensional manifolds of negative curvature,* Preprint Caltech (1989).

[G] E. Ghys, *Flots d'Anosov dont les feuilletages sont différentiables,* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.,**20** (1987), 251-270

[H-K] S. Hurder, A. Katok, *Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows,* Preprint

[Ka] M. Kanai, *Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations*, Erg. Th. Dynam. Syst., **8** (1988), 215-240.

[K-Na] S. Kobayashi, T. Nagano, *On filtered Lie algebras and geometric structures,* I. J. Math.mech **13** (1964), 875-908; idem II **14** (1965), 513-522.

[K-No] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, 1969.