MODULES SIMPLES SUR UNE ALGEBRE DE LIE NILPOTENTE CONTENANT UN VECTEUR PROPRE POUR UNE SOUS-ALGEBRE.

Yves BENOIST

Mai 89

Plan.

Introduction.

0.1 Notations. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps F algébriquement clos de caractéristique 0 , $U = U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, I un idéal primitif de U et Ω l'orbite dans $\mathfrak{g}^*$ correspondante ; c'est une variété symplectique.

Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que $f([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) = 0$ et $\mathfrak{k}^f := \{T - f(T) \mid T \in \mathfrak{k}\} \subset U$. On note par une lettre latine G, K... les groupes unipotents correspondants. Pour tout $\mathfrak{g}$-module N on note $N^{\mathfrak{k},f} := \{n \in N \mid \mathfrak{k}^f.n = 0\}$.

0.2 Résultats. Pour chaque composante irréductible lagrangienne Λ de la variété coïsotrope $Z := \Omega \cap (f + \mathfrak{k}^{\perp})$, on construit un $\mathfrak{g}$-module simple M_Λ d'annulateur I tel que $m_\Lambda := dim M_\Lambda^{\mathfrak{k},f} \neq 0$ (5).

On montre que le $\mathfrak{g}$-module $M := U/(I + U\mathfrak{k}^f)$ est de longueur finie si et seulement si Z est lagrangienne. Et dans ce cas :

i) M est isomorphe à $\displaystyle\bigoplus_{\Lambda\, comp.irr.de Z} (M_\Lambda)^{m_\Lambda}$

ii) Tout $\mathfrak{g}$-module simple N annulé par I tel que $N^{\mathfrak{k},f} \neq 0$ est isomorphe à M_Λ pour une unique composante Λ (6).

En particulier: $M = 0 \Leftrightarrow Z = \emptyset$.

Les multiplicités m_Λ ne sont pas toujours égales à 1 (6), même lorsque Z est une K-orbite, contrairement au cas des modules sphériques ([Be]).

0.3 Méthodes. Donnons quelques détails de la méthode suivie : Soit Λ une composante irréductible de Z. Supposons que $f \in \Lambda$. Soient $\mathfrak{b}$ une polarisation en f et $p : G.f \to G/B$ la projection : U/I s'identifie à un anneau d'opérateurs différentiels tordus $D_{f,X}$ sur G/B . On montre que Λ est lagrangienne si et seulement si $p(\Lambda)$ est une K-orbite (4) et que, dans ce cas, le $D_{f,X}$-module M_Λ : "image directe des fonctions sur $p(\Lambda)$" ne dépend pas du choix de $\mathfrak{b}$ (5). La démonstration utilise les "foncteurs d'entrelacements" étudiés en (3). Les $D_{f,X}$-modules M_Λ et M sont (K, f)-équivariants (c.f. ci-dessous) et leur étude peut être menée dans un cadre plus général :

Soit X une variété algébrique lisse sur F sur laquelle un groupe algébrique H agit et $\mathcal{D}$ un faisceau d'opérateurs différentiels tordus avec action de H ($[Ka], [BB1]$). Soit $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des $\mathcal{D}$-modules cohérents (H, μ)-équivariants (i.e. des $\mathcal{D}$-modules avec action de H tels que la différence de l'action de $\mathfrak{h}$ à travers $\mathcal{D}$ et de la différentielle de l'action de H est égale à μ). On définit un ensemble A d'orbites admissibles (2) et on montre que A est fini si et seulement si l'ensemble des objets simples de $\mathcal{C}$ l'est. Dans ce cas ces deux ensembles sont naturellement reliés. Si en outre les orbites admissibles sont fermées alors $\mathcal{C}$ est une catégorie semisimple (i.e. sans extension) (2).

On appliquera ceci à $H = K$ et $X = G/B$: p(Z) est alors la réunion des orbites admissibles (4).

0.4 Motivations. Supposons un instant que $F = \mathbb{C}$,que $\mathfrak{g}$ (resp.$\mathfrak{k}$) est la complexifiée d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_o$ (resp. $\mathfrak{k}_o$),que $f \in i\mathfrak{g}_o^*$ ($i = \sqrt{-1}$) et que $\Omega = G.\Omega_o$ où Ω_o est une G_o-orbite dans $i\mathfrak{g}_o^*$. Soient π_o la représentation unitaire irréductible associée à Ω_o ([Ki 1]) et $\mathcal{H}_{\pi_o}^{-\infty}$ le $\mathfrak{g}$-module des vecteurs distributions de cette représentation. L'espace $M_o := (\mathcal{H}_{\pi_o}^{-\infty})^{\mathfrak{k},f}$ (au moins sa valeur pour "presque tout π_o") joue, via la dualité de Frobenius, un rôle dans la désintégration de la représentation $Ind_{K_o}^{G_o}(\chi_f)$ induite à partir du caractère χ_f de K_o dont la différentielle est $f|_{\mathfrak{k}}$ ([Pe]).

Une de mes motivations est l'étude de cet espace "pour tout π_o" et du lien entre celui-ci et $Z_o := \Omega_o \cap (f + \mathfrak{k}^{\perp})$. Malheureusement, ce lien n'est pas aussi précis que celui entre M et Z : j'ai construit un exemple où Z_o est lagrangienne mais où $\dim M_o = \infty$ (non publié).

Une approche pour ce problème est de remarquer que, pour tout a dans M_o , le $\mathfrak{g}$-module engendré par a est un quotient de M . Ainsi ces résultats permettent facilement de montrer les implications:

$$Z = \emptyset \Longrightarrow M_o = 0 \Longrightarrow Z_o = \emptyset$$

et

$$Z \text{ est lagrangienne } \Longrightarrow \dim M_o < \infty \Longrightarrow Z_o \text{ est lagrangienne .}$$

Je remercie M. Duflo qui est à l'origine de ce travail.

1 Notations $\mathcal{D}$-modules.

Les idées de cette partie viennent de $[B-B]$ et $[Ka]$.

1.1 F.o.d.t. avec action de H

.

Soient X une variété algébrique lisse sur un corps F algébriquement clos de caractéristique 0 et $i_X : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{D}_X$ l'injection du faisceau structural dans celui des opérateurs différentiels.

Définition. *Un faisceau $\mathcal{D}$ d'algèbres sur $\mathcal{O}_X$ est un f.o.d.t. (faisceau d'opérateurs différentiels tordus) si localement (en topologie de Zariski) le morphisme $i : \mathcal{O}_X \to \mathcal{D}$ est isomorphe à i_X.*

Soient H un groupe algébrique qui agit sur X et $\mathfrak{h} = Lie(H)$.

Définition. *Un "f.o.d.t. avec action de H" est la donnée d'un f.o.d.t. $\mathcal{D}$ qui est un $\mathcal{O}_X$-module équivariant et d'un morphisme de H-modules $\alpha : \mathfrak{h} \to \Gamma(X, \mathcal{D})$ tels que :*
i) l'injection $i : \mathcal{O}_X \to \mathcal{D}$ est équivariante
ii) la multiplication dans $\mathcal{D}$ est équivariante
iii) la différentielle de l'action de H sur $\Gamma(X, \mathcal{D})$ est donnée par

$$\mathfrak{h} \ni \xi \mapsto (D \mapsto [\alpha(\xi), D])$$

Si X est un espace homogène, i.e. $X = H/I$ où I est un sous groupe algébrique de H, on dit que $\mathcal{D}$ est un f.h.o.d.t. . Rappelons la construction des f.h.o.d.t. : Soit $\mathfrak{i} = Lie(I)$, $\mathfrak{i}^*$ le dual de $\mathfrak{i}$ et $(\mathfrak{i}^*)^I$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{i}$ invariantes par I. Soit $\lambda \in (\mathfrak{i}^*)^I$. Le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})$ a une structure d'algèbre donnée par la relation de commutation :

$$[1 \otimes X, \phi \otimes 1] = L_X\phi \otimes 1 \quad \forall X \in \mathfrak{h}\ ,\ \phi \in \mathcal{O}_X(V)$$

où $(L_X\phi)(x) = \frac{d}{dt}\phi(\exp(-tX)x)\mid_{t=0}$. Soient $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}$ le faisceau d'isotropie :

$$\mathcal{I} := \{\sum \phi_i \otimes X_i \in \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h} \mid \forall h \in H\ (Adh^{-1})(\sum \phi_i(hI)X_i) \in \mathfrak{i}\,\} \ \ ,$$

$l : \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X$ le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules donné par

$$(l(\sum \phi_i \otimes X_i))(hI) = \lambda((Adh^{-1})(\sum \phi_i(hI)X_i))$$

et

$$\mathcal{I}^l := \{\xi - l(\xi) \mid \xi \in \mathcal{I}\}$$

le faisceau d'isotropie tordu. $(\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h}))\mathcal{I}^l$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})$. On pose

$$\mathcal{D}_{\lambda,X} = (\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h}))\ /\ (\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h}))\mathcal{I}^l$$

[Noté $\mathcal{A}_X(\lambda)$ dans [Ka]].

Proposition 1.1 *([B - B]) Soit $X = H/I$. L'application $\lambda \to \mathcal{D}_{\lambda,X}$ est une bijection de $(\mathfrak{i}^*)^I$ sur l'ensemble des f.h.o.d.t.*

1.2 $\mathcal{D}$-modules avec action de H

.

Définition. *Soit $\mathcal{D}$ un f.o.d.t. avec action de H, on dit que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module avec action de H si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module (quasi-cohérent et à gauche) et un $\mathcal{O}_X$-module H-équivariant tel que l'action de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{M}$ est H-équivariante.*

$\mathcal{M}$ a alors deux structures de $\mathfrak{h}$-modules. La première via $\mathfrak{h} \to \Gamma(X, \mathcal{D})$, est notée α , la deuxième, différentielle de l'action de H, est notée β. La différence $\gamma = \beta - \alpha$ est une action de $\mathfrak{h}$ qui est $\mathcal{O}_X$ linéaire.

Définition. *Un $(\mathfrak{h}, I)$-module λ-tordu M est la donnée de structures de $\mathfrak{h}$-module $\rho : \mathfrak{h} \to End(M)$ et de I-module $\pi : I \to GL(M)$ (on suppose que M est réunion de sous-I-modules algébriques de dimension finie) telle que ρ est I-équivariante et, $\forall T \in \mathfrak{i}$, $d\pi(T) = \rho(T) + \lambda(T)Id$.*

Proposition 1.2 *Soit $X = H/I$. La catégorie des $\mathcal{D}_{\lambda,X}$-modules avec action de H est équivalente à la catégorie des $(\mathfrak{h}, I)$-modules λ-tordus. L'équivalence est donnée par la fibre géométrique $\mathcal{M} \to i^*(\mathcal{M})$ où $i : \{I\} \to X$ est l'injection du point de base.*

Démonstration. c.f. [Ka] th. 4.10.2. La structure de I-module sur $i^*(\mathcal{M})$ est claire. Celle de $\mathfrak{h}$-module est donnée par γ .

Définition. *Soient μ un caractère de $\mathfrak{h}$ (i.e. $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$) et $\mathcal{D}$ un f.o.d.t. avec action de H. Un $\mathcal{D}$-module (H, μ)-équivariant est un $\mathcal{D}$-module avec action H tel que $\gamma = -\mu\, Id$.*

Lorsque H est connexe, la catégorie des $\mathcal{D}$-modules (H, μ)-équivariants est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathcal{D}$-modules.

Exemple. Soient F_μ le $\mathfrak{h}$-module de dimension 1 donné par μ et V un H-module, alors

$$\mathcal{M}^\mu := \mathcal{D} \otimes_{U(\mathfrak{h})} (F_\mu \otimes V)$$

est un $\mathcal{D}$-module (H, μ)-équivariant [l'action de $\mathcal{D}$ est donnée par $d'.(d \otimes 1 \otimes v) = d'd \otimes 1 \otimes v$ et celle de H par $h(d \otimes 1 \otimes v) = (h.d) \otimes 1 \otimes (h.v)$].

Corollaire. *Soit $X = H/I$. La catégorie des $\mathcal{D}_{\lambda,X}$-modules (H, μ)-équivariants est équivalente à la catégorie des I-modules (M, π) tels que $\forall X \in \mathfrak{i}$,*

$d\pi(X) = (\lambda(X) - \mu(X))Id$. L'équivalence est donnée par $\mathcal{M} \to i^*(\mathcal{M})$.

En particulier cette catégorie est semi-simple et n'a qu'un nombre fini d'objets simples (cf. [Ki] 14.2).

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module cohérent, on note $Supp(\mathcal{M}) \subset X$ son support et $Ch(\mathcal{M}) \subset T^*X$ sa variété caractéristique. $\mathcal{M}$ est dit holonome si $dim\, Ch(\mathcal{M}) = dim X$.

1.3 Foncteurs pour les $\mathcal{D}$-modules avec action de H

.

Soit $\mathcal{D}$ un f.o.d.t. avec action de H sur X.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré inversible H-équivariant alors $\mathcal{D}^{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes -1}$ est naturellement un f.o.d.t. avec action de H ([Ka] 2.6.5.). En outre le foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{D}$-modules avec action de H (resp. (H, μ)-équivariants) dans celle des $\mathcal{D}^{\mathcal{L}}$-modules avec action de H (resp. (H, μ)-équivariants).

Soit ν un caractère de H : c'est une représentation de H dans un espace vectoriel de dimension 1 : F_ν. Le foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_\nu := \mathcal{M} \otimes_F F_\nu$ est une équivalence de catégorie entre $\mathcal{D}$-modules (H, μ)-équivariants et $\mathcal{D}$-modules $(H, \mu - d\nu)$-équivariants (l'action de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{M}_\nu$ se fait sur $\mathcal{M}$, celle de H se fait sur les deux facteurs $\mathcal{M}$ et F_ν.

Le faisceau d'anneaux opposés $\mathcal{D}^{opp}$ est aussi un f.o.d.t. avec action de H (par exemple $(\mathcal{D}_X)^{opp} = (\mathcal{D}_X)^{\Omega_X^{max}}$ où Ω_X^{max} est le faisceau des formes différentielles de degré maximum). Un $\mathcal{D}$-module à droite avec action de H est (par définition) un $\mathcal{D}^{opp}$-module avec action de H.

Soient $\phi : Y \to X$ un morphisme de H-variétés lisses, $\phi^{\cdot}$ et $\phi_{\cdot}$ les images inverse et directe en théorie des faisceaux, $\mathcal{D}_{\to} = \phi^*(\mathcal{D}) := \mathcal{O}_Y \otimes_{\phi^{\cdot}(\mathcal{O}_X)} \phi^{\cdot}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}^\phi$ le f.o.d.t. avec action de H sur Y, image inverse de $\mathcal{D}$ ([B-B 2]) : $\mathcal{D}^\phi$ est le faisceau des endomorphismes différentiels du $\mathcal{O}_Y$-module $\phi^*(\mathcal{D})$ qui commutent à l'action à droite de $\phi^{\cdot}(\mathcal{D})$. Par construction, $\mathcal{D}_{\to}$ est un $\mathcal{D}^\phi$-module avec action de H et un $\phi^{\cdot}(\mathcal{D})$-module à droite. Exemple: $\mathcal{D}_X^\phi = \mathcal{D}_Y$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module avec action de H (resp. (H, μ)-équivariant). On note $\phi^*(\mathcal{M}) := \mathcal{D}_{\to} \otimes_{\phi^{\cdot}(\mathcal{D})} \phi^{\cdot}(\mathcal{M})$ le $\mathcal{D}^\phi$-module avec action de H (resp. (H, μ)-équivariant) image inverse de $\mathcal{M}$.

On a l'égalité de f.o.d.t. avec action de H : $(\mathcal{D}^{opp})^\phi = ((\mathcal{D}^\phi)^{\Omega_{Y|X}^{max}})^{opp}$ où $\Omega_{Y|X}^{max} = \Omega_Y^{max} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \phi^*(\Omega_X^{max})^{\otimes -1}$ ([Ka] 2.11). Soit $\mathcal{D}_{\leftarrow} := \Omega_{Y|X}^{max} \otimes_{\mathcal{O}_X} \phi^*(\mathcal{D}^{opp})$, c'est un $(\phi^{\cdot}(\mathcal{D}), \mathcal{D}^\phi)$-bimodule. Donc si $\mathcal{M}'$ est un $\mathcal{D}$-module à droite avec action de H, $\phi^{\cdot}(\mathcal{M}') \otimes_{\phi^{\cdot}(\mathcal{D})} \mathcal{D}_{\leftarrow} = \Omega_{Y|X}^{max} \otimes_{\phi^{\cdot}(\mathcal{O}_X)} \phi^{\cdot}(\mathcal{M}')$ est un $\mathcal{D}^\phi$-module à droite avec action de H. D'autre part, on note $\phi^+(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\phi^{\cdot}(\mathcal{D})}(\mathcal{D}_{\leftarrow}, \phi^{\cdot}(\mathcal{M}))$: c'est un D^ϕ-module avec action de H.

Soit $\mathcal{N}'$ (resp. $\mathcal{N}$) un $\mathcal{D}^\phi$-module à droite (resp. à gauche) avec action de H, on note : $\phi_+(\mathcal{N}') := \phi_{\cdot}(\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{D}^\phi} \mathcal{D}_{\to})$ (resp. $\phi_+(\mathcal{N}) := \phi_{\cdot}(\mathcal{D}_{\leftarrow} \otimes_{\mathcal{D}^\phi} \mathcal{N})$) le $\mathcal{D}$-module à droite (resp. à gauche) avec action de H image directe de $\mathcal{N}'$ (resp. $\mathcal{N}$).

Proposition 1.3 *(Kashiwara) Soit $Y \stackrel{i}{\hookrightarrow} X$ une sous variété fermée, lisse et stable par*

H, alors les foncteurs

$$\left\{\begin{array}{c}\mathcal{D}^i - \textit{modules cohérents} \\ \textit{avec action de } H \\ (\textit{resp. } (H,\mu) - \textit{équivariants})\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\mathcal{D} - \textit{modules cohérents avec action} \\ \textit{de } H \ (\textit{resp. } (H,\mu) - \textit{équivariants}) \\ \textit{dont le support est inclus dans } Y\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{N} & \longrightarrow & i_+(\mathcal{N}) \\ i^+(\mathcal{M}) & \longleftarrow & \mathcal{M}\end{array}$$

sont des équivalences de catégories inverses.

Prenons les notations de 1.1 : soit $\psi : K \to H$ un morphisme de groupes, J un sous groupe de K tel que $\psi(J) \subset I$ et $\phi : Y = K/J \to X = H/I$ le morphisme de variétés que l'on déduit de ψ, alors $\forall \lambda \in (\mathfrak{i}^*)^I$, on a l'égalité de f.o.d.t. avec action de K sur Y : $(\mathcal{D}_{\lambda,X})^\phi = \mathcal{D}_{\lambda_o\psi,Y}$ ([Ka] 4.14). Dans cette situation, on note $\mathcal{D}_{\lambda,Y\to X} := \mathcal{D}_{\to}$ et $\mathcal{D}_{\lambda,X\leftarrow Y} := \mathcal{D}_{\leftarrow}$.

On a $(\mathcal{D}_{\lambda,X})^{opp} = \mathcal{D}_{-\lambda+2\rho,X}$ où $\rho(\cdot) = \frac{1}{2}tr_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(ad\cdot)$ ([Ka]).

2 $\mathcal{D}$-modules (H,μ)-équivariants.

Dans cette partie, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un $\mathcal{D}$-module (H,μ)-équivariant soit holonome. Sous ces conditions, on peut décrire ceux qui sont simples.

Soient H un groupe algébrique, $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h},\mathfrak{h}])^*$, X une H-variété lisse et $\mathcal{D}$ un f.o.d.t. avec action de H.

Soient $x \in X$, $\omega = H.x$ l'orbite contenant x , $i_\omega : \omega \hookrightarrow X$ l'injection, $I_x := \{h \in H \mid h.x = x\}$ le groupe d'isotropie en x et $\mathfrak{i}_x$ son algèbre de Lie. Le f.h.o.d.t. $\mathcal{D}^{i_\omega}$ correspond, d'après 1.1, à un élément $\lambda_\omega \in (\mathfrak{i}_x^*)^{I_x}$. On pose $\hat{\omega} = \{\pi$, représentation (algébrique de dimension finie) irréductible de I_x telle que $d\pi = (\lambda_\omega - \mu|_{\mathfrak{i}_x})Id$ $\}$. C'est un ensemble fini ; pour π dans $\hat{\omega}$, on note $\mathcal{O}_\pi$ le $\mathcal{D}^{i_\omega}$-module simple correspondant (1.2).

Définition. *Une orbite est dite admissible si $\hat{\omega} \neq \emptyset$. On note A l'ensemble des orbites admissibles et $\hat{A} = \{(\omega,\pi)/\omega \in A \text{ et } \pi \in \hat{\omega}\}$.*

Proposition 2.1 *Avec ces notations, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module cohérent (H,μ) équivariant.*

a) Si $A = \emptyset$ alors $\mathcal{M} = 0$

b) Si A est fini alors $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module holonome.

c) Dans ce cas, on a une bijection naturelle

$$\hat{A} \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{D} - \textit{modules } (H,\mu) - \textit{équivariants simples}\}$$

donnée par $(\omega,\pi) \longrightarrow$ l'unique sous module (H,μ)-équivariant simple de $i_{\omega+}(\mathcal{O}_\pi)$.

d) Si, en outre, toutes les orbites admissibles sont fermées alors la catégorie des $\mathcal{D}$-modules cohérents (H,μ)-équivariants est une catégorie semi-simple (i.e. tout objet est somme directe finie d'objets simples).

Cette proposition généralise la description des $\mathcal{D}_X$-modules H-équivariants pour une variété avec un nombre fini d'orbites ([Bo] VII thm 12.11). Elle en diffère de deux façons :

1) $\mathcal{M}$ *n'est pas en général un* $\mathcal{D}$*-module holonome régulier* (c.f. [Bo] VII 11 ou [Ka] 3.5).

Exemple. $H = F =$ le sous groupe unipotent de $SL(2,F)$ qui agit sur $X = P_1F = F\bigcup\{\infty\}$ par $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.z = z+h$, $\forall h \in F$, $\forall z \in X$ (X a deux orbites), $\mathfrak{h} = F E =$ son algèbre de Lie ($E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), $\mu \in \mathfrak{h}^*$ l'élément donné par $\mu(E) = 1$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels. Le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathfrak{h}} F_\mu = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(E-1)$ est (H,μ)-équivariant mais il n'est pas holonome régulier ; en effet, au voisinage de l'infini on a $E - 1 = y^2\partial_y - 1$.

2) *Le support de* $\mathcal{M}$ *peut contenir une infinité d'orbites.*

Exemple. $H = \{\ (a,b) \in F^* \times F\}$ = le groupe affine de la droite, $\mathfrak{h} = FA \oplus FB$ son algèbre de Lie avec $[A,B] = B$, $X = \mathfrak{h}^* = \{(x,y) = xA^* + yB^*\}$ l'espace de la représentation coadjointe (l'action est donnée par : $(a,b)^{-1}.(x,y) = (x - by, ay)$, $\forall (a,b) \in H$, $(x,y) \in X$), $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X$ et μ tel que $\mu(A) = \gamma \in F\backslash\mathbb{Z}$ et $\mu(B) = 0$. Il y a une seule orbite admissible l'orbite ouverte Ω (car μ ne s'intègre pas en un caractère de H). Le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathfrak{h}} F_\mu = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(y\partial_y - \gamma\ ,\ y\partial_x)$ est (H,μ)-équivariant. On vérifie que $\mathcal{M}$ est holonome (car $\gamma \neq -1$) et pourtant $Supp(\mathcal{M}) = X$ contient une infinité d'orbites.

Démonstration. Pour toute partie P de X on note $i_P : P \hookrightarrow X$ l'injection naturelle.

a) Notons $A_{\mathcal{M}} = \{\omega \in A \mid \omega \subset Supp(\mathcal{M})\}$ et montrons que

$$Supp(\mathcal{M}) = \overline{\bigcup_{\omega \in A_{\mathcal{M}}} \omega}$$

[Si $A = \emptyset$, on aura alors $\mathcal{M} = 0$]. Quitte à ôter à X la partie singulière de $Supp(\mathcal{M})$, on peut supposer que $S = Supp(\mathcal{M})$ est une variété lisse. On peut alors écrire, grâce à 1.3, $\mathcal{M} = i_{S+}(\mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}^{i_S}$-module (H,μ)-équivariant. On se ramène ainsi au cas où $Supp(\mathcal{M}) = X$.

Dans ce cas, il existe un ouvert dense U de X sur lequel $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre ([Mi]). En particulier, si $x \in U$, on a $i_x^*(\mathcal{M}) \neq 0$. Soient $\omega = H.x$ et $j_x : \{x\} \hookrightarrow \omega$ l'injection naturelle, on a $i_x^*(\mathcal{M}) = j_x^*(i_\omega^*(\mathcal{M}))$. Donc $i_\omega^*(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}^{i_\omega}$-module (H,μ)-équivariant non nul. On en déduit que ω est admissible (1.2). Donc

$$X = \overline{\bigcup_{\omega \in A} \omega}\,.$$

b) Soit U le plus grand ouvert sur lequel $\mathcal{M}$ est holonome et $F = X\backslash U$. On a bien sûr $F \subset Supp(\mathcal{M})$. On veut montrer que $F = \emptyset$. Quitte à ôter à X la partie singulière de F, on peut supposer que F est lisse.

On a alors une suite exacte de $\mathcal{D}$-modules (H,μ)-équivariants ([Bo] VI prop. 8.2) :

$$O \to \underline{\Gamma}_F(\mathcal{M}) \to \mathcal{M} \to i_{U+}(\mathcal{M}|_U)$$

où $\underline{\Gamma}_F(\mathcal{M})$ est le faisceau des sections de $\mathcal{M}$ à support dans F . Par hypothèse $\mathcal{M}|_U$ est holonome, donc $i_{U+}(\mathcal{M}|_U)$ aussi ([Bo] VII th. 10.1). Pour montrer que $\mathcal{M}$ est holonome, il suffit de montrer que $\underline{\Gamma}_F(\mathcal{M})$ l'est. On peut écrire, grâce à 1.3, $\mathcal{M} = i_{F+}(\mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}^{i_F}$-module (H,μ)-équivariant qui n'est holonome sur aucun ouvert de F. ([Bo] VI lemme 7.8). On se ramène ainsi au cas où $F = X$.

Dans ce cas, $Supp(\mathcal{M}) = X$. On a alors $\overline{\bigcup_{\omega\in A}\omega} = X$, d'après a).Comme A est fini, il existe une orbite admissible ω ouverte dans X. La proposition 1.2 prouve alors que le $\mathcal{D}^{i_\omega}$-module cohérent (H,μ)-équivariant $\mathcal{N} = \mathcal{M}|_\omega$ est déjà cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module ([Ka] th. 4.10.2). Il est donc holonome, ce que contredit l'égalité $F = X$.

c) Soit $(\omega,\pi) \in \hat{A}$. Soit $\mathcal{M}_\pi = i_{\omega+}(\mathcal{O}_\pi)$: c'est un $\mathcal{D}$-module holonome (H,μ)-équivariant ; en particulier il est de longueur finie. Montrons que $\mathcal{M}$ a un unique sous $\mathcal{D}$-module (H,μ)-équivariant (on dira "sous-module" si cela ne prête pas à confusion) simple. Comme ω est une orbite d'un groupe algébrique, elle est localement fermée: soit $U = X\backslash(\overline{\omega}\backslash\omega)$, ω est fermé dans U et U est ouvert dans X. Notons $j : \omega \hookrightarrow U$ l'injection. Soit $\mathcal{N} = j_+(\mathcal{O}_\pi)$: c'est un $\mathcal{D}^{i_U}$-module (H,μ)-équivariant simple (1.3). On a $\mathcal{M}_\pi = i_{U+}(\mathcal{N})$, donc $\mathcal{M}_\pi|_U = \mathcal{N}$ et $\mathcal{M}_\pi$ a un unique sous-quotient simple $\mathcal{M}'$ tel que $\mathcal{M}'|_U = \mathcal{N}$. Soient $\mathcal{M}_k$ $(k = 1,2)$ deux sous modules simples de $\mathcal{M}_\pi$. On a

$$\begin{aligned} Hom_X(\mathcal{M}_k,\mathcal{M}_\pi) &= Hom_X(\mathcal{M}_k, i_{U.}(\mathcal{N}) \\ &= Hom_X(\mathcal{M}_k|_U,\mathcal{N}) \end{aligned}$$

où Hom_X (resp. Hom_U) désigne l'ensemble des morphismes dans la catégorie des $\mathcal{D}$-modules (resp. $\mathcal{D}^{i_U}$-modules) (H,μ)-équivariants. On en déduit $\mathcal{M}_k|_U \neq 0$ d'où $\mathcal{M}_k|_U = \mathcal{N}$ puis $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq 0$ et enfin $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2(\simeq \mathcal{M}')$. Donc $\mathcal{M}_\pi$ a un unique sous module simple. Notons le $\mathcal{L}(\omega,\pi)$.

Soient (ω,π) et $(\omega',\pi') \in \hat{A}$. Supposons que $\mathcal{L}(\omega,\pi)$ et $\mathcal{L}(\omega',\pi')$ sont isomorphes. Comme $\overline{\omega} = Supp(\mathcal{L}(\omega,\pi))$, on a $\overline{\omega} = \overline{\omega'}$ d'où $\omega = \omega'$. En outre, comme $\mathcal{O}_\pi = i^+_\omega(\mathcal{L}(\omega,\pi))$, on a $\pi = \pi'$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module (H,μ)-équivariant simple, montrons qu'il existe $(\omega,\pi) \in \hat{A}$ tel que $\mathcal{M} \approx \mathcal{L}(\omega,\pi)$. Par hypothèse l'ensemble $A_\mathcal{M} = \{\omega \in A \mid \omega \subset Supp(\mathcal{M})\}$ est fini, et le a) prouve que

$$Supp(\mathcal{M}) = \overline{\bigcup_{\omega\in A_\mathcal{M}} \omega} \ ,$$

donc il existe une orbite admissible ω qui est ouverte dans $S = Supp(\mathcal{M})$. Soit $U = X\backslash(S\backslash\omega)$: ω est fermé dans U et U est ouvert dans X. Notons $j : \omega \hookrightarrow U$ l'injection. Le $\mathcal{D}^{i_U}$-module (H,μ)-équivariant $\mathcal{M} = \mathcal{M}|_U$ a pour support ω , il existe donc un $\mathcal{D}^{i_\omega}$-module (H,μ)-équivariant $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{N} = j_+(\mathcal{V})$ (1.3). Il existe π dans $\hat{\omega}$ tel que $Hom_\omega(\mathcal{V},\mathcal{O}_\pi) \neq 0$ (1.2). On a alors les identifications canoniques :

$$\begin{aligned} Hom_X(\mathcal{M},\mathcal{M}_\pi) &= Hom_X(\mathcal{M}, i_{U.}(j_+(\mathcal{O}_\pi))) \\ &= Hom_U(\mathcal{M}|_U, j_+(\mathcal{O}_\pi)) \\ &= Hom_\omega(\mathcal{V},\mathcal{O}_\pi) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{M}$ est l'unique sous module simple $\mathcal{L}(\omega,\pi)$ de $\mathcal{M}_\pi$.

d) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module cohérent (H,μ)-équivariant, montrons que $\mathcal{M}$ est semi-simple. Pour $\omega \in A$, notons $\underline{\Gamma}_\omega(\mathcal{M})$ le faisceau des sections de $\mathcal{M}$ à support dans ω. Comme les orbites admissibles sont fermées et en nombre fini, on a, d'après a),

$$Supp(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{\omega\in A} \omega$$

puis

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\omega\in A} \underline{\Gamma}_\omega(\mathcal{M})\ .$$

On peut donc supposer que $Supp(\mathcal{M}) = \omega$ est une orbite admissible. Dans ce cas on peut écrire $\mathcal{M} = i_{\omega+}(\mathcal{V})$où $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{D}^{i_\omega}$-module cohérent (H,μ)-équivariant ; $\mathcal{V}$ est semi-simple (1.2) donc $\mathcal{M}$ aussi (1.3).

3 Foncteurs d'entrelacement.

Le théorème de Serre permet de "localiser" les $\mathfrak{g}$-modules annulés par un idéal primitif. Ce procédé de "localisation" dépend du choix d'une polarisation. Nous montrons dans cette partie, que des "foncteurs d'entrelacements", analogues à ceux introduits par Beilinson et Bernstein [B-B 2] dans le cas semi-simple, relient les localisés associés à des polarisations différentes.

3.1 Localisation

.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur F , $U = U(\mathfrak{g})$, $f_o \in \mathfrak{g}^*, B_{f_o}$ la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$: $B_{f_o}(X,Y) = f_o([X,Y])$, $\mathfrak{g}(f_o)$ le noyau de B_{f_o} , $\Omega := G.f_o$: c'est une variété symplectique pour la 2-forme G-invariante donnée par B_{f_o} sur $T_{f_o}(\Omega) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f_o)$, $2d := dim(\Omega)$, I l'idéal primitif de U associé à l'orbite Ω par la bijection de Dixmier ([Di] th. 6.2.4), $R = U/I$, $\mathfrak{b}$ une polarisation en f_o (i.e. une sous algèbre de $\mathfrak{g}$ isotrope pour B_{f_o} telle que $2\ dim\mathfrak{b} = dim\mathfrak{g} + dim\mathfrak{g}(f_o)$) , $X := G/B$: c'est une variété affine isomorphe à F^d , $\mathcal{D}_{f_o} := \mathcal{D}_{f_o,X}$ le f.h.o.d.t. sur X de paramètre $f_o|_\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}^*)^B$(1.1) et $D_{f_o} = D_{f_o,X} := \Gamma(X,\mathcal{D}_{f_o})$.

Proposition 3.1 *(Kirillov) Le morphisme d'algèbres $U \to D_{f_o}$ qui prolonge α (c.f.1.1) induit un isomorphisme $R \simeq D_{f_o}$.*

Démonstration. (c.f. [Ki] ou [Be2] appendice A).

Notons Γ_X le foncteur "sections globales" de la catégorie des $\mathcal{D}_{f_o}$-modules (quasi-cohérents) dans celle des R-modules : $\Gamma_X(\mathcal{M}) = \Gamma(X,\mathcal{M})$ et Δ_X le foncteur "localisation" de la catégorie des R-modules dans celle des $\mathcal{D}_{f_o}$-modules : $\Delta_X(M) = \mathcal{D}_{f_o} \otimes_R M$. Le théorème de Serre donne alors:

Lemme . *Les foncteurs Γ_X et Δ_X sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.*

3.2 Foncteurs d'entrelacement

.

Soient $\mathfrak{b}'$ une (autre) polarisation en f_o , $X' = G/B'$, $\mathcal{D}_{f_o,X'}$, $D_{f_o,X'}$, $\Gamma_{X'}$, $\Delta_{X'}$ comme ci-dessus, $Y = G/B \cap B'$, $\pi : Y \to X$ et $\pi' : Y \to X'$ les projections naturelles, $\mathcal{D}_{f_o,Y}$, $\mathcal{D}_{f_o,Y\to X}$ et $\mathcal{D}_{f_o,X'\leftarrow Y}$ comme en 1.3 . Lorsqu'un faisceau est désigné par une lettre ronde, on note par la lettre droite correspondante les sections globales de ce faisceau (ainsi $D_{f_o,Y\to X} = \Gamma(Y, \mathcal{D}_{f_o,Y\to X})$ est un $(D_{f_o,Y}, D_{f_o,X})$-bimodule). Le foncteur image inverse π^* est un foncteur exact sur les $\mathcal{D}_{f_o,X}$-modules car π est une application lisse. Le foncteur image directe π'_+ est un foncteur exact à droite sur les $\mathcal{D}_{f_o,Y}$-modules car π' est une application affine (de fibre $B'/B \cap B' \simeq F^\delta$) ; on note $L^{-k}\pi'_+$ son $k^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à gauche.

Définition. *On appelle foncteur d'entrelacement le foncteur $\mathcal{I}_{X',X} = \pi'_+ o\, \pi^*$ qui envoie $\mathcal{D}_{f_o,X}$-modules sur $\mathcal{D}_{f_o,X'}$-modules.*

Proposition 3.2 *Avec les notations ci-dessus*

a) Les foncteurs $\mathcal{I}_{X',X}$ et $\Delta_{X'} o\, \Gamma_X$ sont isomorphes.

b) $\forall k \geq 1$, $(L^{-k}\pi'_+)\ o\ \pi^* = 0$.

Le b) n'est pas utilisé dans la suite, il signifie que "en catégorie dérivée, le foncteur d'entrelacement est concentré en degré 0". Cette proposition est un analogue algébrique de [Li].

Corollaire3.3 *Avec les notations ci-dessus, soit $\mathfrak{b}''$ une (troisième) polarisation en f_o , $X'' = G/B'', \ldots$*

Alors les foncteur $\mathcal{I}_{X'',X}$ et $\mathcal{I}_{X'',X'}\ o\, \mathcal{I}_{X',X}$ sont isomorphes.

Démonstration. $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{X'',X'}\ o\, \mathcal{I}_{X',X} &= \Delta_{X''}\ o\, (\Gamma_{X'}\ o\, \Delta_{X'})\ o\, \Gamma_X \\ &= \Delta_{X''}\ o\, \Gamma_X \\ &= \mathcal{I}_{X'',X}\ . \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition. On utilise les idées de la démonstration du résultat analogue pour les groupes de Lie semisimples ([Mi] theorème 3.16). La différence essentielle est qu'on ne peut pas se ramener au cas où $dim(B'/B \cap B') = 1$ (c.f. remarque 5.3). On utilise à la place le fait que $(B'/B \cap B')$ est une sous variété fermée de X (c.f. lemme 3.4).

a) Soit $I_{X',X} = \Gamma_{X'}\ o\, \mathcal{I}_{X',X}\ o\, \Delta_X$: c'est un foncteur de la catégorie des R-modules dans elle-même. On veut construire un isomorphisme de foncteurs

$$Id \tilde{\to} I_{X',X}\ .$$

Soit M un R-module, on a

$$I_{X',X}(M) = D_{f_o,X'\leftarrow Y} \bigotimes_{D_{fo,Y}} D_{f_o,Y\rightarrow X} \bigotimes_{D_{fo,X}} M$$

(On a utilisé l'identification $D_{f_o,X} \simeq R \simeq D_{f_o,X'}$). Remarquons que $D_{f_o,Y\rightarrow X} = O_Y \otimes_{O_X} D_{f_o,X}$ contient l'élément canonique $1\otimes 1$ et que $D_{f_o,X'\leftarrow Y} = \Gamma(Y, \Omega^{max}_{Y|X}) \otimes_{O_X} D_{f_o,X'}$ contient l'élément $\omega \otimes 1$ où ω est une section non nulle G-invariante de $\Omega^{max}_{Y|X}$: ω est unique à une constante près. Notons F_M le morphisme de M dans $I_{X',X}(M)$donné par $\forall m \in M$

$$F_M(m) = (\omega \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes m\ .$$

On vérifie que, $\forall u \in U$, $F_M(u\,m) = u.F_M(m)$: en effet, si on regarde $D_{f_o,X'\leftarrow Y}$ comme un $(D_{f_o,X'}, D_{f_o,Y})$-bimodule et donc comme un (U, U)-bimodule via les applications α , on a l'égalité $u.(\omega \otimes 1) = (\omega \otimes 1).u$; on a une égalité analogue avec l'élément $1 \otimes 1 \in D_{f_o,Y\rightarrow X}$. Donc F_M est un morphisme de R-modules. Cela définit un morphisme de foncteurs $Id \rightarrow I_{X',X}$.

Montrons que, pour tout R-module M, F_M est un isomorphisme. Comme les foncteurs Id et $I_{X',X}$ sont exacts à droite et commutent à la somme directe, il suffit de le montrer pour $M = R$, le R-module libre de rang 1. En effet une résolution libre $L_1 \rightarrow L_o \rightarrow M \rightarrow 0$ donnera un diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow F_{L_1} & & \downarrow F_{L_0} & & \downarrow F_M & & \\ I_{X',X}(L_1) & \longrightarrow & I_{X',X}(L_0) & \longrightarrow & I_{X',X}(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où F_{L_1} et F_{L_0} seront des isomorphismes et F_M sera un isomorphisme.

Supposons donc $M = R$. Dans ce cas, les localisés $\Delta_{X'}(M) = \mathcal{D}_{f_o,X'}$ et $\Delta_{X'}(I_{X',X}(M)) = \mathcal{I}_{X',X}(\mathcal{D}_{f_o,X})$ sont des $\mathcal{D}_{f_o,X'}$-modules avec action de G et le localisé $\mathcal{F}_R$ du morphisme F_R est un morphisme de $\mathcal{D}_{f_o,X'}$-modules avec action de G (i.e. c'est un morphisme de $\mathcal{D}_{f_o,X'}$-modules et de $\mathcal{O}_{X'}$-modules G-équivariants). Il suffit donc de montrer que l'application induite sur les fibres géométriques en $x_o = B'/B'$ est un isomorphisme.

Soient $Z = B'/B \cap B'$, $i : x_o \hookrightarrow X'$, $j : Z \hookrightarrow Y$, $i_Z : Z \hookrightarrow X$ les injections naturelles et $p : Z \rightarrow x_o$ la projection. On a $i_Z = \pi\ o\ j$ et on a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow \pi' \\ x_o & \xrightarrow{i} & X' \end{array}$$

D'une part,

$$i^*(\mathcal{D}_{f_o,X'}) = O_{x_o} \otimes_{O_{X'}} D_{f_o,X'}$$

où $O_{x_o} \approx F$ est l'anneau des fonctions sur $\{x_o\}$. D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} i^*(\mathcal{I}_{X',X}(\mathcal{D}_{f_o,X})) & = & i^*(\pi'_+(\pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X}))) \\ & = & p_+(j^*(\pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X}))) \\ & = & p_+(i_Z^*(\mathcal{D}_{f_o,X})) \\ & = & p_+(\mathcal{D}_{f_o,Z\rightarrow X}) \\ & = & D_{f_o,x_o\leftarrow Z} \otimes_{D_{f_o,Z}} D_{f_o,Z\rightarrow X} \end{array}$$

On a utilisé l'égalité $i^* \ o \ \pi_+^{'} = p_+ \ o \ j^*$: c'est une conséquence du "changement de base" ([Bo] VI theorème 8.4 ; ici on peut éviter de travailler en catégorie dérivée car les quatre foncteurs sont exacts à droite). Conformément à 1.3, $\mathcal{D}_{f_o,x_o}$ est le f.o.d.t. avec action de $B^{'}$ sur la variété réduite à un point $x_o = B^{'}/B^{'}$ de paramètre $f_o|_{\mathfrak{b}'} \in (\mathfrak{b}^{'*})^{B'}$ et $\mathcal{D}_{f_o,x_o\leftarrow Z} = \Omega_Z^{max} \otimes_{\mathcal{O}_{x_o}} \mathcal{D}_{-f_o,x_o}$ ($\simeq \Omega_Z^{max}$) est un $\mathcal{D}_{f_o,Z}$-module à droite simple.

On remarque alors sur ces formules que les fibres géométriques sont des R-modules à droite (la proposition 1.2 prouve seulement que ce sont des $(\mathfrak{g}, B^{'})$-modules f_o-tordus) et qu'on a les identifications de R-modules à droite :

$$\begin{array}{rcl} i^*(\mathcal{D}_{f_o,X'}) & \simeq & \Gamma(X^{'}, i_+(\mathcal{O}_{x_o})) \\ i^*(\mathcal{I}_{X',X}(\mathcal{D}_{f_o,X})) & \simeq & \Gamma(X, i_{Z+}(\mathcal{D}_{f_o,x_o\leftarrow Z})) \end{array}$$

Comme i et i_Z sont des immersions fermées (c.f. lemme 3.4 ci-dessous), ces R-modules sont simples et non nuls d'après 1.3. Le morphisme de R-modules à droite $i^*(\mathcal{F}_R)$ est donné, avec ces identifications, par $\forall r \in R$ ($\simeq D_{f_o,X'} \simeq D_{f_o,X}$)

$$i^*(F_R)(1 \otimes r) = (\omega|_Z \otimes 1) \otimes (1 \otimes r)$$

où $\omega|_Z \in \Gamma(Z, \Omega_Z^{max})$ est la restriction à Z de ω. Il est non nul, c'est donc un isomorphisme.

b) Supposons par l'absurde qu'il existe $k \geq 1$ et $\mathcal{M}_o$ un $\mathcal{D}_{f_o,X}$-module tel que $(L^{-k}\pi_+)(\pi^*\mathcal{M}_o) \neq 0$. Soit $k_o \geq 1$, le plus petit entier pour lequel un tel module $\mathcal{M}_o$ existe. Si $k_o \neq 1$ alors le foncteur $\mathcal{M} \to (L^{-k_o+1}\pi_+)(\pi^*\mathcal{M})$ est nul ; si $k_o = 1$ alors ce foncteur est exact d'après a) ; dans les deux cas, on en déduit que le foncteur $\mathcal{M} \to (L^{-k_o}\pi_+)(\pi^*\mathcal{M})$ est exact à droite. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}_{f_o,X}$-module libre tel que $\mathcal{L} \to \mathcal{M}_o \to 0$, alors $(L^{-k_o}\pi_+)(\pi^*\mathcal{L}) \neq 0$. On peut donc supposer $\mathcal{M}_o = \mathcal{D}_{f_o,X}$.

Soient $\Omega^{\cdot}_{Y|X'}$ le complexe (de de Rham) des faisceaux des formes différentielles relatives et $\Omega^{\cdot}_Z = j^*(\Omega^{\cdot}_{Y|X})$ celui des formes différentielles sur Z. On a l'égalité ([Bo] VI 5.3)

$$L^{-k}\pi_+(\pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X})) = h^{\delta-k}(\pi^{'}_{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{Y|X'} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X})))$$

où h^i est la cohomologie du complexe en degré i. Ce complexe est un complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules G-équivariants. Il suffit donc de démontrer que $i^*(L^{-k}\pi_+(\pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X}))) = 0$, $\forall k \geq 1$. Or, i^* est un foncteur exact dans la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$-modules G-équivariant, on a donc :

$$\begin{array}{rcl} i^*(L^{-k}\pi_+(\pi^*\mathcal{D}_{f_o,X})) & = & h^{\delta-k}(i^*(\pi^{'}_{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{Y|X'} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X})))) \\ & = & h^{\delta-k}(p_{\cdot}(j^*(\Omega^{\cdot}_{Y|X'} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X})))) \\ & = & h^{\delta-k}(p_{\cdot}(\Omega^{\cdot}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} j^*(\pi^*(\mathcal{D}_{f_o,X})))) \\ & = & h^{\delta-k}(p_{\cdot}(\Omega^{\cdot}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_{f_o,X})) \\ & = & (L^{-k}p_+)(\mathcal{D}_{f_o,Z\to X}) \\ & = & 0 \ \ \forall k \geq 1 \end{array}$$

car $\mathcal{D}_{f_o,Z\to X}$ est un $\mathcal{D}_{f_o,Z}$-module localement libre ([Bo] VI 7.3).

Lemme 3.4 *Soient $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ deux sous algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$, alors l'immersion naturelle $K_1/K_1 \cap K_2 \hookrightarrow G/K_2$ est fermée.*

Démonstration. C'est classique : on peut trouver une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathfrak{g}$ et $i_1 < \ldots < i_s \leq l \leq r$ tels que, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{g}_i := FX_{i+1} \oplus \ldots \oplus FX_n$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{g}_l$ et $\mathfrak{k}_1 = FX_{i_1} \oplus \ldots \oplus FX_{i_s} \oplus \mathfrak{g}_r$. Alors on a un isomorphisme $\Phi : F^l \to G/K_2$ donné par $\Phi(t_1, \ldots, t_l) = exp(t_1X_1) \ldots exp(t_lX_l)K_2$ et
$\Phi^{-1}(K_1/K_1 \cap K_2) = \{(t_1, \ldots, t_l) \mid \forall k \neq i_1, \ldots, i_s \, , on\ a\ t_k = 0\} \approx F^s$.

4 Géométrie des orbites.

4.1

On rassemble dans cette partie quelques lemmes géométriques.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur F , $f_o \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b}$ une polarisation en f_o, $\Omega = Gf_o$, $p : \Omega \to X = G/B$ la projection canonique : $\forall g \in G \ p(g.f_o) = gB$, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre subordonnée à f (i.e. $f|_{[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]} = 0$) . On note $\forall \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}^\perp := \{f' \in \mathfrak{g}^* \mid f'(\mathfrak{s}) = 0\}$, $\mathfrak{s}^{B_{f_o}} := \{X \in \mathfrak{g} \mid f_o([X, \mathfrak{s}]) = 0\}$, Ad et Ad^* les actions adjointes et coadjointes de G dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ et, $\forall g \in G$, $\mathfrak{b}_g := Adg(\mathfrak{b})$: c'est une polarisation en $g.f_o := Ad^*(g).f_o$.

On pose $Z = \Omega \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$: c'est une sous variété algébrique stable par K.

Lemme 4.1 *Avec ces notations :*

a) $p(Z) = \{gB \in X \mid (gf_o - f)|_{\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}_g} = 0\}$

b) Soit $f_1 = g.f_o \in Z$ *. Alors*

α) $\{f' \in Z \mid p(f') = p(f_1)\} = f_1 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_g)^\perp$

β) $\Lambda := K.(f_1 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_g)^\perp)$ *est une sous variété lagrangienne, irréductible, lisse et fermée incluse dans* Z*. Son espace tangent est* $T_{f_1}(\Lambda) = (\mathfrak{k}^{B_{f_1}} \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_g))^\perp$.

Démontration.

a) Soient $E = \{g \in G \mid g.f_o - f \in \mathfrak{k}^\perp\}$ et $F = \{g \in G \mid gf_o - f \in (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_g)^\perp\}$. On veut montrer $F = E.B$.

Soit $g \in F$, l'égalité $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_g)^\perp = \mathfrak{k}^\perp + \mathfrak{b}_g^\perp$ prouve qu'il existe $f' \in \mathfrak{b}_g^\perp$, $f'' \in \mathfrak{k}^\perp$ tel que $gf_o - f = f' + f''$. Comme $Bf_o = f_o + \mathfrak{b}^\perp$ ([B-C-D ...] prop. 3.1.7), il existe $b \in B$ tel que $g(bf_o - f_o) = -f'$ d'où $gbf_o - f = f'' \in \mathfrak{k}^\perp$ et $gb \in E$.

Réciproquement, soient $g \in E$ et $b \in F$, alors $gbf_o - f = g(bf_o - f_o) + gf_o - f \in \mathfrak{b}_g^\perp + \mathfrak{k}^\perp$ donc $gb \in F$.

b) On peut supposer $f_1 = f_o \in Z$.

α) $\{f' \in Z \mid p(f') = p(f_o)\} = Z \cap Bf_o = (f_o + \mathfrak{k}^\perp) \cap Bf_o = f_o + (k + \mathfrak{b})^\perp$

β) Remarquons que $f_o + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp$ est stable sous $K \cap B$. L'application

$$j : K \times_{K\cap B} (f_o + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp) \to G.f$$

donnée par $j(k,f')=k.f'$ est une immersion fermée : elle est la composée :

$$\begin{array}{ccccccc} K\times_{K\cap B}(f_o+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp) & \stackrel{j_1}{\to} & K\times_{K\cap B}(f_o+\mathfrak{b}^\perp) & \stackrel{j_2}{\to} & G\times_B(f_o+\mathfrak{b}^\perp) & \stackrel{j_3}{\to} & G.f_o \\ (k,f') & \to & (k,f') & \to & (k,f') & \to & k.f' \end{array}$$

où j_1 est fermée car $f_o+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp$ est fermée dans $f_o+\mathfrak{b}^\perp$, j_2 est fermée d'après le lemme 3.4 et j_3 est un isomorphisme. En particulier, son image Λ est une sous variété fermée lisse irréductible de Ω et on a l'égalité de sous espaces de $\mathfrak{g}^*$:

$$T_{f_o}(\Lambda)=\mathfrak{k}.f_o+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp=(\mathfrak{k}^{B_{f_o}}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}))^\perp=(W^{B_{f_o}})^\perp$$

avec

$$W:=\mathfrak{k}+(\mathfrak{k}^{B_{f_o}}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{k}^{B_{f_o}}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})=W^{B_{f_o}}$$

car $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{k}^{B_{f_o}}$ et $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^{B_{f_o}}$.

Le sous espace W est lagrangien pour B_{f_o}, donc $T_{f_o}(\Lambda)$ est un sous-espace lagrangien de $T_{f_o}(\Omega)$: Λ est lagrangienne.

Les inclusions $Kf_1\subset\Lambda\subset Z$ prouvent que Z est une variété coïsotrope ([Gi]) et que les K-orbites de Z sont des sous variétés isotropes. Les lemmes suivants étudient les cas d'égalités :

Lemme 4.2 *Avec ces notations. Soient C une composante irréductible de Z et $f_1=g\,f_o\in C$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
i) $dim C=\frac{1}{2}\,dim\Omega$
ii) $p(C)=K.p(f_1)$
iii) $C=K(f_1+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_g)^\perp)$
iv) $C=p^{-1}(K.p(f_1))\cap Z$
Dans ce cas C est une variété lagrangienne lisse et $p(C)$ est fermée.

Démontration.
i) $\Rightarrow$ ii) : Soient $f'=g'f_o$ un point lisse de Z tel que $f'\in C$ et $\Lambda=K.(f'+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_{g'})^\perp)$. Λ est une sous variété fermée et irréductible de Z donc $\Lambda\subset C$ puis $\Lambda=C$ car Λ et C ont même dimension. En particulier $p(C)=p(\Lambda)$ est une K-orbite (et est donc fermée: lemme 3.4).

ii) $\Rightarrow$ iii) : On a $C\subset p^{-1}(Kp(f_1))\cap Z=K(p^{-1}(p(f_1))\cap Z)=K.(f_1+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_g)^\perp)=\Lambda$. Comme C est coïsotrope et que Λ est lagrangienne et irréductible, on a $C=\Lambda$. En particulier C est lisse.

iii) $\Leftrightarrow$ iv) : résulte de 4.1.b α) .

iii) $\Rightarrow$ i) : résulte de 4.1.b β) .

Corollaire4.3 *Avec ces notations. On a l'équivalence*
i) Z est lagrangienne.
ii) $p(Z)$ est une réunion finie de K-orbites.
La projection p met alors en bijection les composantes irréductibles de Z et les K-orbites de $p(Z)$.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ ii) : clair

ii) $\Rightarrow$ i) : écrivons $p(Z) = \bigcup_{i=1}^{n} Kp(f_i)$ avec $f_i = g_i f_o \in Z$. Alors

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}(Kp(f_i)) \cap Z = \bigcup_{i=1}^{n} K.(f_i + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_{g_i})^{\perp})$$

est lagrangienne.

Corollaire4.4 *Avec ces notations. Supposons que f_o appartient à une composante irréductible Λ de Z qui est lagrangienne. Soit $\mathfrak{b}'$ une (autre) polarisation en f_o telle que $dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') = 1$, alors*

$$dim((\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'))/(\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'))) = 1 \ .$$

Démonstration. On a $(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')^{B_{f_o}} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ donc B_{f_o} induit sur l'espace vectoriel de dimension 2 : $(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$ une forme bilinéaire non dégénérée ; l'image $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')$ dans cet espace est isotrope donc $dim\, \mathfrak{i} \leq 1$.

Supposons que cette inégalité est stricte. On a alors

$$\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \qquad (\star)$$

d'où $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{k}^{B_{f_o}} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$. On peut donc trouver $X \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{k}^{B_{f_o}}$ tel que $X \notin \mathfrak{b}'$. Puisque Λ est lagrangienne, on a les égalités

$$\Lambda = K(f_o + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^{\perp}) = K(f_o + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}')^{\perp})$$

(lemme 4.2 iii)) puis

$$T_{f_o}(\Lambda) = (\mathfrak{k}^{B_{f_o}} \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}))^{\perp} = (\mathfrak{k}^{B_{f_o}} \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}'))^{\perp}$$

(lemme 4.1.b), d'où

$$\mathfrak{k}^{B_{f_o}} \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{k}^{B_{f_o}} \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}') \ .$$

On en déduit $X \in \mathfrak{b} \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}') \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ d'après $(\star)$. Contradiction. Donc $dim\, \mathfrak{i} = 1$.

Lemme 4.5 *Reprenons les notations du lemme 4.2 : Soient C une composante irréductible de Z et $f_1 = g\, f_o \in C$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

i) $dimC = \frac{1}{2}\, dim\Omega$ et l'intersection $\Omega \cap (f + \mathfrak{k}^{\perp})$ est transverse en f_1

ii) $C = K f_1$

iii) $dim\, K f_1 = \frac{1}{2}\, dim\Omega$

iv) $2\, dim(\mathfrak{g}(f_1) + \mathfrak{k}) = dim\mathfrak{g} + dim\, \mathfrak{g}(f_1)$

Démonstration : (c.f. [Fu]) On peut supposer $f_1 = f_o$.

i) $\Rightarrow$ iv) : Par hypothèse on a, $T_{f_o}(C) = T_{f_o}(\Omega) \bigcap T_{f_o}(f_o + \mathfrak{k}^\perp) = (\mathfrak{g}(f_o) + \mathfrak{k})^\perp$ et $dimT_{f_o}(C) = \frac{1}{2}\, dim\Omega$. On en déduit $dim\mathfrak{g} - dim(\mathfrak{g}(f_o) + \mathfrak{k}) = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g} - dim\mathfrak{g}(f_o))$ c'est l'égalité cherchée

iii) $\Rightarrow$ iv) : c'est clair.

iv) $\Rightarrow$ (i) et ii)) : Par hypothèse $\mathfrak{g}(f_o) + \mathfrak{k}$ est lagrangienne pour B_{f_o} on a donc

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}(f_o) + \mathfrak{k})^\perp &= (\mathfrak{k}^{B_{f_o}})^\perp = T_{f_o}(Kf_o) \subset T_{f_o}(\Omega \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)) \\ &\subset T_{f_o}(\Omega) \cap T_{f_o}(f + \mathfrak{k}^\perp) = \mathfrak{g}(f_o)^\perp \cap \mathfrak{k}^\perp = (\mathfrak{g}(f_o) + \mathfrak{k})^\perp. \end{aligned}$$

Donc ces inclusions sont des égalités. On en déduit, d'une part que $dimKf_o = dimC$ puis $Kf_o = C$ et $dimC = \frac{1}{2}\, dim\Omega$ et d'autre part que l'intersection $\Omega \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$ est transverse en f_o.

ii) $\rightarrow$ iii) La variété $Kf_1 = C$ est à la fois isotrope et coïsotrope, elle est donc lagrangienne.

4.2 Exemples

.

Donnons divers exemples qui éclairent la géométrie de Z. Dans ces exemples $\mathfrak{g}$ a pour base $(e_i)_{i=1,\cdots,N}$. On note e_ie_j pour $[e_i, e_j]$ et on ne donne que les crochets e_ie_j non nuls avec $i < j$.

a) *Z peut être lagrangienne et contenir une infinité de K-orbites.*

$N = 4$; avec $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$; $f = f_o = {e_4}^*$ et $\mathfrak{k} = Fe_2$.

On a $\Omega = \{(x_1, x_3) := x_3{e_1}^* + \frac{1}{2}{x_1}^2{e_2}^* - x_1{e_3}^* + {e_4}^*\} \simeq F^2$, $Z = \{(0, x_3)\} \simeq F$ et l'action de K sur Z est triviale.

b) *$p(Z)$ n'est pas forcément localement fermé.*

$N = 5$; avec $e_1e_2 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_2e_3 = e_5$; $f = f_o = {e_5}^*$, $\mathfrak{b} = Fe_1 \oplus Fe_3 \oplus Fe_5$ et $\mathfrak{k} = Fe_1$.

On a $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_4{e_1}^* + (x_3 + \frac{1}{2}{x_1}^2){e_2}^* - x_2{e_3}^* - x_1{e_4}^* + {e_5}^*\} \simeq F^4$, $Z = \{(x_1, x_2, x_3, 0)\} \simeq F^3$, $G/B \simeq \{(t_2, t_4) := exp(t_2e_2)exp(t_4e_4)B\} \simeq F^2$ et $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_4 + x_1x_2)$. Donc $p(Z) = \{(t_2, t_4) \mid t_2 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

c) *Z n'est pas forcément lisse* ([Fu]).

$N = 6$; avec $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_5 = e_6$, $e_2e_3 = e_5$, $e_2e_4 = e_6$; $f = f_o = {e_6}^*$ et $\mathfrak{k} = Fe_3$.

On a $\Omega = \{(x_1, x_2, x_4, x_5) := x_5{e_1}^* + x_4{e_2}^* + x_1x_2{e_3}^* - x_2{e_4}^* - x_1{e_5}^* + {e_6}^*\} \simeq F^4$ et $Z = \{(x_1, x_2, x_4, x_5) \mid x_1x_2 = 0\}$.

d) *On peut avoir $Z = Z_1 \cup Z_2$ avec Z_1 lagrangienne et Z_2 pas.*

$N = 7$; avec $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_5 = 2e_6$, $e_1e_6 = e_7$, $e_2e_3 = e_6$, $e_2e_4 = e_7$; $f_o = f = {e_7}^*$ et $\mathfrak{k} = F(e_3 + e_4) \oplus F(e_5 + e_6)$.

On a $\Omega = \{(x_1, x_2, x_4, x_6) := x_6{e_1}^* + x_4{e_2}^* + x_1x_2{e_3}^* - x_2{e_4}^* + {x_1}^2{e_5}^* - x_1{e_6}^* + {e_7}^*\} \simeq F^4$ et $Z = Z_1 \cup Z_2$ où $Z_1 = \{(0, 0, x_4, x_6)\} \simeq F^2$ est une K-orbite et $Z_2 = \{(1, x_2, x_4, x_6)\} \simeq F^3$ n'est pas lagrangienne.

5 Modules simples associés à une composante lagrangienne.

Le but de cette partie est d'associer à chaque composante lagrangienne Λ de Z un $\mathfrak{g}$-module simple M_Λ . On relie en 5.4 ces modules avec ceux introduits dans [Be] .

5.1 Construction du module simple M_ω

.

Gardons les notations de 3 et 4 et celles de 2 avec $X = G/B$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{f_o,X}$, $H = K$ et $\mu = f$ (plus précisément $\mu = f|_{\mathfrak{k}}$).

Lemme 5.1 *$p(Z)$ est la réunion des K-orbites admissibles de X .*

Démonstration. C'est une reformulation du lemme 4.2.a.

Pour chaque K-orbite ω de $p(Z)$, on note $i_\omega : \omega \to X$ l'injection, $\mathcal{M}_\omega = i_{\omega+}(\mathcal{O}_\omega)$: l'unique $\mathcal{D}_{f_o,X}$-module (K, f)-équivariant simple de support ω et $M_\omega = \Gamma_X(\mathcal{M}_\omega)$.

Proposition 5.2 *Avec ces notations, soient Λ une composante irréductible de Z que l'on suppose lagrangienne et ω la K-orbite $p(\Lambda)$ alors le $\mathfrak{g}$-module M_ω ne dépend pas du choix de la polarisation $\mathfrak{b}$.*

On note M_Λ ce module.

Montrons tout d'abord quelques lemmes.

5.2 Polarisations adjacentes

.

Définition. *Deux polarisations $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ en f_o sont dites adjacentes si $dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') = 1$.*

Lemme 5.3 *Soient $f_o \in \mathfrak{g}^*$, $(\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}')$ deux polarisations en f_o , alors il existe une suite $\mathfrak{b}_o = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, ... , $\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}'$ de polarisations en f_o telles que $\forall i = 1, \dots, r$, $(\mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i)$ sont adjacentes.*

Remarque. On a $r \geq dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$. Mais il n'existe pas toujours de suite pour laquelle on ait l'égalité : prendre pour $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ les deux polarisations $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ dans l'exemple de ([Be] Appendice A).

Démonstration. On procède par récurrence sur $dim\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{z}_o = \mathfrak{z} \cap Ker f_o$.

Si $\mathfrak{z}_o \neq 0$, on applique le résultat à $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_o$.

Si $\mathfrak{z}_o = 0$, on a $\mathfrak{z} = FZ$ avec $f_o(Z) = 1$. Soit $Y \in C_2(\mathfrak{g})\backslash\mathfrak{z}$ où $C_i(\mathfrak{g})$ est le i^{eme} terme de la suite centrale ascendante, et $\mathfrak{g}' = \{T \in \mathfrak{g} \mid [T,Y] = 0\}$: c'est un idéal de codimension un de $\mathfrak{g}$. Si $Y \notin \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{b}_1 = FY \oplus (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}')$ est une polarisation en f_o et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1)$ sont adjacentes. On peut donc supposer $Y \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$. On a alors $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{g}'$. Soient $f_o^{'} = f_o|_{\mathfrak{g}'}$ on a $\mathfrak{g}'(f_o^{'}) = \mathfrak{g}(f_o) \oplus FY$, donc $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont des polarisations en $f_o^{'}$. On applique alors le résultat à $\mathfrak{g}'$ pour conclure.

Lemme 5.4 *a) Soient $f_o \in \mathfrak{g}^*$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ deux polarisations en f_o adjacentes, alors $\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$.*

b) Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ une sous algèbre subordonnée à f telle que f_o appartient à une composante irréductible lagrangienne Λ de $Z = G.f_o \cap (f + \mathfrak{k}^{\perp})$, alors on est dans une et une seule des trois situations suivantes :

i) $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}'$

ii) $\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}$

iii) $\exists \mathfrak{b}''$ *polarisation en f_o telle que $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'')$ et $(\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}')$ sont adjacentes,* $\mathfrak{b}'' \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{b}'' \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}'$.

Démonstration. a) Ecrivons $\mathfrak{b} = FX \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}' = FY \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$. Montrons tout d'abord que $[X,Y] \in \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$. Comme $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')^{B_{f_o}}$, il suffit de voir que, $\forall Z \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$, on a $f_o([[X,Y],Z]) = 0$. Or $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ est un idéal de $\mathfrak{b}$, donc $[X,Z] \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$, d'où $f_o([[X,Z],Y]) \in f_o([\mathfrak{b}', \mathfrak{b}']) = 0$. De même $f_o([X,[Y,Z]]) = 0$. On en déduit l'égalité cherchée grâce à l'identité de Jacobi.

Donc $\mathfrak{d}$ est une sous algèbre de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont des sous-algèbre de codimension un de $\mathfrak{d}$, on a $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$.

b) Ecrivons $dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k}) = dim(\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{k}) + \delta$ avec $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. Dans le cas i), on peut écrire $\mathfrak{b} = FX \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ avec $X \in \mathfrak{k}$; donc $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}' \subset (FX)^{B_{f_o}} \cap \mathfrak{b}' = (FX + \mathfrak{b}')^{B_{f_o}} \subset \mathfrak{b}^{B_{f_o}} = \mathfrak{b}$ et $\delta = 1$. Dans le cas ii), on a $\delta = -1$ et dans le cas iii) on a $\delta = 0$. Donc ces trois cas s'excluent mutuellement.

Supposons qu'on n'est ni dans le cas i) ni dans le cas ii) : on a $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$. Soit $\mathfrak{b}'' = (\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$, on a $f_o([\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}'']) = 0$ et $dim\mathfrak{b}'' = dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') + 1$ (corollaire 4.4) donc $\mathfrak{b}''$ est une polarisation en f_o . On a $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}'' \not\subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ donc $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}'' \not\subset \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}'' \not\subset \mathfrak{b}'$.

5.3 Indépendance de la polarisation

.

Démonstration de la proposition 5.2. On peut supposer $f_o \in \Lambda$. Soient $\mathfrak{b}'$ une (autre) polarisation en f_o , $X' = G/B'$, $\mathcal{D}_{f_o,X'}$, $\mathcal{I}_{X',X}$ comme en 3.2, $p' = \Omega \to G/B'$, $\omega' = p'(\Lambda)$, $i_{\omega'}$, $\mathcal{O}_{\omega'}$, $\mathcal{M}_{\omega'}$, $M_{\omega'}$ comme ci-dessus. Il suffit de montrer d'après la proposition 3.2 l'égalité $\mathcal{I}_{X',X}(\mathcal{M}_\omega) = \mathcal{M}_{\omega'}$.

Les deux lemmes ci-dessus permettent de supposer que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont adjacentes et que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}'$. Dans ce cas : soient $\pi : Y = G/B \cap B' \to X = G/B$ et $\pi' : Y \to X'$ les projections naturelles et $\overline{\omega} = \pi^{-1}(\omega) \simeq K/K \cap B \cap B' \simeq K/K \cap B'$ (en effet, les lemmes

5.4 et 3.5 prouvent que $K/K \cap B \cap B'$ est ouvert et fermé dans $\pi^{-1}(\omega)$). La restriction de π' à $\overline{\omega}$ induit un isomorphisme noté σ' de $\overline{\omega}$ sur ω' et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\omega} & \stackrel{j}{\hookrightarrow} & Y \\ \downarrow\sigma & & \downarrow\pi \\ \omega & \stackrel{i_\omega}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

est cartésien et la formule du changement de base donne alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_{X'X}(\mathcal{M}_\omega) & = & \pi^{'}_{+}\ o\ \pi^*(i_{\omega+}(\mathcal{O}_\omega)) \\ & = & (\pi^{'}_{+}\ o\ j_+)(\sigma^*(\mathcal{O}_\omega)) \\ & = & i_{\omega'+}\ o\ \sigma^{'}_{+}(\mathcal{O}_{\overline{\omega}}) \\ & = & i_{\omega'+}(\mathcal{O}_{\omega'}) \\ & = & \mathcal{M}_{\omega'}\ . \end{array}$$

5.4 Construction par récurrence de M_ω

.

Soit ω une K-orbite admissible de G/B. Le seul but de ce paragraphe est de démontrer que les modules M_ω coincident avec ceux introduits dans [Be] §3 (notre "paramètre ω " est la projection dans G/B du "paramètre de [Be]" qui lui est une K-orbite dans Z) et donc que ceux-ci ne dépendent pas de la polarisation choisie pour leur construction lorsque ω est la projection $p(\Lambda)$ d'une composante irréductible lagrangienne de Z . (On peut donner de cette dernière affirmation une démonstration directe basée sur les lemmes 5.3 et 5.4).

Soient $\mathfrak{g}_1$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}$, $U_1 = U(\mathfrak{g}_1)$, $f_1 = f_o|_{\mathfrak{g}_1}$, I_1 l'idéal primitif associé à $G_1 f_1$, $i_1 : X_1 = G_1/B \hookrightarrow X = G/B$ l'injection canonique.

Lemme 5.5 *Avec ces notations. Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{f,X}$-module, $\mathcal{M}_1$ un $\mathcal{D}_{f_1,X_1}$-module, $M := \Gamma_X(\mathcal{M})$ et $M_1 := \Gamma_{X_1}(\mathcal{M}_1)$. Alors*
a) $\Gamma_X(i_{1+}(\mathcal{M}_1)) = U \otimes_{U_1} M_1$
b) $\Gamma_X(i_1^*(\mathcal{M})) = M/I_1M$

Démonstration. Il suffit de montrer que $D_{f,X_1 \to X} \simeq U/I_1U$ comme $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g})$-bimodules.

Pour celà, écrivons $\mathfrak{g} = FT \oplus \mathfrak{g}_1$ d'où un isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} F \times X_1 & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & X \\ (t, x_1) & \longrightarrow & (exptT).i_1(x_1)\ . \end{array}$$

Ceci permet d'identifier les algèbres (lemme A3 de [Be]) :

$$\begin{array}{cccl} U/I \simeq D_{f_o,X} & \simeq & A_1 \otimes D_{f_1,X_1} & \text{où } A_1 = F < t, \partial_t > \\ T & \longrightarrow & -\partial_t \otimes 1 & \\ u_1 & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \otimes (adT)^n(u_1) & \forall u_1 \in U_1 \end{array}$$

Il suffit de montrer que, avec cette identification, on a l'égalité $I_1 U/I \simeq tA_1 \otimes D_{f_1,X_1}$. L'inclusion $\subset$ est claire car tout élément u_1 de I_1 est nul dans D_{f_1,X_1}. L'inclusion $\supset$ résulte de l'existence d'un élément u_o de I_1 dont l'image dans $D_{f_o,X}$ est $t \otimes 1$ (corol. A3 de [Be]).

Si N est un $\mathfrak{g}$-module, on note $\Gamma_f^o(\mathfrak{k}, N) = \{n \in N \mid \exists p \geq 1 \text{ tel que } (\mathfrak{k}^f)^p.n = 0\}$, c'est un sous-$\mathfrak{g}$-module de N .

Corollaire5.6 *Avec ces notations ; soient ω une K-orbite admissible de X , $\omega_1 := i_1^{-1}(\omega)$: c'est une $K_1(= K \cap G_1)$-orbite admissible de X_1 , $M_\omega := \Gamma_X(i_{\omega+}(\mathcal{O}_\omega))$ et $M_{\omega_1} := \Gamma_{X_1}(i_{\omega_1+}(\mathcal{O}_{\omega_1}))$*

a) Si $\mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{k}$ alors $M_\omega = U \bigotimes_{U_1} M_{\omega_1}$

b) Si $\mathfrak{g}_1 \not\supset \mathfrak{k}$ alors $M_\omega = \Gamma_f^o(\mathfrak{k}, Hom_{U_1}(U, M_{\omega_1}))$.

Ceci permet de construire le module M_ω par récurrence sur $dim X$.

Démonstration.

a) Dans ce cas $\mathcal{M}_\omega = i_{1+}(\mathcal{M}_{\omega_1})$

b) Dans ce cas $\mathcal{M}_{\omega_1} = i_1^*(\mathcal{M}_\omega)$ et le foncteur $\mathcal{N} \to i_1^*(\mathcal{N})$ est une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_{f_o,X}$-modules (K, f_o)-équivariants et celle des $\mathcal{D}_{f_1,X_1}$-modules (K_1, f_1)-équivariants ([B-B-3] 1.3). Soit $M' = \Gamma_f^o(\mathfrak{k}, Hom_{U_1}(U, M_{\omega_1}))$; il suffit donc de montrer que les $\mathfrak{g}_1$-modules M_{ω_1} et M'/I_1M' sont isomorphes. Ecrivons $\mathfrak{g} = FT \oplus \mathfrak{g}_1$ et soit $a = f_o(T)$; comme ($D_{f_o,X} \simeq A_1 \otimes D_{f_1,X_1}$)-module, M' est isomorphe à $\mathbb{C}[t]e^{at} \otimes M_{\omega_1}$ pour l'action produit tensorielle ([Be] §3). Donc $M'/I_1M' \simeq M'/(t \otimes 1)M' \simeq M_{\omega_1}$.

6 $U/(I + Uk^f)$

6.1

C'est la partie centrale de cet article: on étudie les $\mathfrak{g}$-modules simples contenant des vecteurs propres sous la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de valeur propre f : ils sont annulés par un idéal primitif I . On fixe un tel idéal et on étudie (avec les notations de O.1) le $\mathfrak{g}$-module $U/(I + U\mathfrak{k}^f)$ qui est “universel” parmi les modules annulés par I et engendrés par un vecteur propre sous $\mathfrak{k}$ de valeur propre f .

Théorème. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur F , $U := U(\mathfrak{g})$, Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, I l'idéal primitif de U associé à Ω , $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre telle que $f([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) = 0$, $Z := \Omega \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$, M le $\mathfrak{g}$-module $U/(I + U\mathfrak{k}^f)$ où $\mathfrak{k}^f = \{T - f(T) \mid T \in \mathfrak{k}\}$ et S l'ensemble des $\mathfrak{g}$-modules simples N d'annulateur I tels que $N^{\mathfrak{k},f} \neq 0$ où $N^{\mathfrak{k},f} := \{n \in N \mid \mathfrak{k}^f.n = 0\}$*

a) Les affirmations suivantes sont équivalentes

i) Z est lagrangienne

ii) M est de longueur finie

iii) S est un ensemble fini.

b) Dans ce cas

α) Z est une variété lisse.

β) L'application $\Lambda \to M_\Lambda$ construite en 5 est une bijection entre l'ensemble des composantes irréductibles de Z et l'ensemble S.

γ) On pose $m_\Lambda := dim(M_\Lambda)^{\mathfrak{k},f}$. On a alors un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules : $M \simeq \bigoplus_\Lambda (M_\Lambda)^{m_\Lambda}$. En particulier $m_\Lambda < \infty$ et M est semi-simple.

Démonstration. Soit $\mathfrak{b}$ une polarisation en f_o et prenons les notations de 3. Les foncteurs $N \to \Delta_X(N)$ et $\mathcal{N} \to \Gamma_X(\mathcal{N})$ induisent des équivalences inverses entre la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules annulés par I et $\mathfrak{k}^f$-localement nilpotents et celle des $\mathcal{D}_{f_o,X}$-modules (K,f)-équivariants.

En effet, un $\mathfrak{g}$-module N (d'action ρ) est $\mathfrak{k}^f$-localement nilpotent si et seulement si $(\rho - f)|_\mathfrak{k}$ est la différentielle d'une action (algébrique) π de K sur N. On munit alors $\Delta_X(N) = \mathcal{D}_{f_o,X} \otimes_R N$ de la structure de $\mathcal{O}_X$-module K-équivariant donnée par $k.(d\otimes n) = (k.d) \otimes \pi(k)n$, $\forall k \in K$, $d \in \Gamma(U, \mathcal{D}_{f_o,X})$, $n \in N$ (où $k.d \in \Gamma(k.U, \mathcal{D}_{f_o,X})$ est donné par l'action naturelle de K sur $\mathcal{D}_{f_o,X}$) ce qui en fait un $\mathcal{D}_{f_o,X}$-module (K,f)-équivariant. Réciproquement, si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_{f_o,X}$-module (K,f)-équivariant alors $N = \Gamma_X(\mathcal{N})$ est un K-module dont la différentielle est $(\rho - f)|_\mathfrak{k}$.

a) *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Si Z est lagrangienne, il existe un nombre fini d'orbites admissibles (corollaire 4.3 et lemme 5.1) et M est un $\mathcal{D}_{f_o,X}$-module holonome (proposition 2.1) il est donc de longueur finie.

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Si M est de longueur finie, M n'a qu'un nombre fini de quotients simples (à équivalence près) donc S est fini.

iii) $\Rightarrow$ *i*) A chaque orbite admissible ω, on a associé un $\mathfrak{g}$-module simple $M_\omega = \Gamma_X(\mathcal{M}_\omega)$ de S avec $supp(\mathcal{M}_\omega) = \omega$. Donc, si S est fini il n'y a qu'un nombre fini d'orbites admissibles et Z est lagrangienne.

b) α) C'est le lemme 4.2.

β) On a les bijections successives (corollaire 4.3 et proposition 2.1) :

$$\begin{array}{ccccccc} \left\{ \begin{array}{c} composantes \\ irréductibles \\ de\ Z \end{array} \right\} & \leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} orbites \\ admissibles \\ de\ X \end{array} \right\} & \leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D}_{f_o,X} - modules \\ simples\ (K,f)- \\ équivariants \end{array} \right\} & \leftrightarrow & S \\ \Lambda & \to & p(\Lambda)\ \ ;\ \ \omega & \to & \mathcal{M}_\omega\ \ \ ;\ \ \ \mathcal{M} & \to & \Gamma_X(\mathcal{M}) \end{array}$$

dont la composée est l'application $\Lambda \to M_\Lambda$ qui ne dépend pas du choix de la polarisation (lemme 5.2).

γ) La proposition 2.1.d. prouve que M est une somme directe de modules simples: il existe un entier m'_Λ tel que $M = \bigoplus\limits_\Lambda (M_\Lambda)^{m'_\Lambda}$. On a alors $m'_\Lambda = dim(Hom_\mathfrak{g}(M, M_\Lambda)) = dim(M_\Lambda^{\mathfrak{k},f}) = m_\Lambda$.

Corollaire. *Avec ces notations.*

1) On a les équivalences :

$$Z = \emptyset \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow S = \emptyset .$$

2) Si Z est une K-orbite alors M est multiple d'une module simple: $M = (M_Z)^{m_Z}$.

Démonstration.

1) Clair.

2) Z est lagrangienne et irréductible (lemme 4.5).

6.2 Exemple de multiplicité

.

Si Z est une K-orbite, le module $M = U/(I + U\mathfrak{k}^f)$ n'est pas toujours simple (i.e. on peut avoir $m_Z \geq 2$) :

Soient $\mathfrak{g}$ la sous algèbre de Lie de dimension 9 de l'algèbre de Weyl $A_2 = F\langle x, y, \partial_x, \partial_y\rangle$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h}$ est (l'algèbre de Heisenberg) engendrée par $x, y, \partial_x, \partial_y, 1$ et $\mathfrak{n}$ est (le radical unipotent d'un Borel de $sp(2, F)$) engendrée par $x\partial_y, \partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_y^2$; $f_o = 1^*$, $\Omega = G.f_o$, $\mathfrak{k}$ est la sous algèbre de dimension 4 engendrée par

$$\partial_x + x\partial_y \, , \, \partial_y + \partial_x^2 \, , \, \partial_x\partial_y \, , \, \partial_y^2$$

et $f = 0$.

On vérifie par un petit calcul que $Z = K.f_o$ (On sait a priori grâce au lemme 4.5 que $K.f_o$ est une composante irréductible de Z car $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}(f_o)$ est lagrangienne pour B_{f_o}). L'unique $\mathfrak{g}$-module simple de S est alors $M_Z = F[x, y]$ (via l'action naturelle de A_2) et on a $(M_Z)^{\mathfrak{k},f} = F.1 \oplus F.(x^2 - 2y)$ donc $m_Z = 2$.

Remarque. Supposons un nouvel instant que $F = \mathbb{C}$. Soient $\mathfrak{g}_o$ et $\mathfrak{k}_o$ les algèbres de Lie définies comme $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ mais sur le corps de base $\mathbb{R}$ de sorte que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ sont leur complexifiée; soient π_o la représentation unitaire irréductible de G_o associée à $\Omega_o := i\, G.f_o$ et $\mathcal{H}_{\pi_o}^{-\infty}$ le $\mathfrak{g}$-module des vecteurs distributions de cette représentation. Le même calcul prouve que $Z_o := \Omega_o \cap \mathfrak{k}^\perp$ est une K_o-orbite mais que $M_o := (\mathcal{H}_{\pi_o}^{-\infty})^{\mathfrak{k},0}$ est de dimension 2 .

6.3 Voici trois questions ouvertes

.

1) *A-t-on l'implication : Λ est lagrangienne $\Rightarrow m_\Lambda < \infty$?*

Notre démonstration utilise l'hypothèse plus forte : "Z est lagrangienne" et peut se généraliser si on suppose que "Λ est lagrangienne et $p(\Lambda)$ est ouvert dans $p(Z)$ ".

2) *Existe-t-il une caractérisation géométrique de la propriété de multiplicité* 1 *: $m_\Lambda = 1$? Il est probable que $m_\Lambda = 1 \Rightarrow \Lambda$ est une K-orbite.*

Lorsque $\mathfrak{k}$ est l'ensemble des points fixes d'une involution de $\mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{k}^\perp$, la variété Z est une K-orbite et $m_Z = 1$ ([Be]).

3) *Soit $Z^o \subset T^*X$ la variété caractéristique du $\mathcal{D}_{f_o,X}$-module $\Delta_X(M)$ localisé de $M := U/(I + U\mathfrak{k}^f)$. Quel lien existe-t-il entre Z et Z^o ? En particulier, a-t-on l'égalité $dimZ = dimZ^o$?*

On a seulement prouvé l'équivalence: $dimZ = dimX \Longleftrightarrow dimZ^o = dimX$. Remarquons que ces variétés ne sont pas en général isomorphes: dans l'exemple 4.2.b) , Z est irréductible mais pas Z^o .

REFERENCES

[B-B 1] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN - Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. C.R.A.S. Paris 292, p. 15-18 (1981).

[B-B 2] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN - A generalisation of Casselman's submodule theorem. Progress in Math., 40, Birkaüser, p. 35-52 (1983).

[B-B 3] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN - A proof of Jantzen conjectures. (preprint)

[Be] Y. BENOIST - Les modules simples sphériques d'une algèbre de Lie nilpotente. Compos. Math. (à paraître).

[B-C-D...] P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, M. LEVY-NAMAS, M. RAIS, P. RENOUARD, M. VERGNE - Représentations des groupes de Lie résolubles. Mon. Soc. Math. Fr., Dunod, Paris (1972).

[Bo] A. BOREL - Algebraic D-modules. Acad. Press (1987).

[Di] J. DIXMIER - Algèbre enveloppante. Gauthier-Villars, Paris (1974).

[Fu] H. FUJIWARA - Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotentes. Pacific. Journ. Math., 127, p. 329-352 (1986).

[Gi] V. GINZBURG - Symplectic geometry and representations. Funct. An. and Appl. 17, p. 225-227 (1983).

[Ka] - M. KASHIWARA - Representation theory and D-modules on flag varieties. A paraître dans Astérisque.

[Ki 1] A. KIRILLOV - Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes. Uspek. Math. Nauk., 17, p. 57-110 (1962).

[Ki 2] A. KIRILLOV - Elements de la théorie des représentations. Ed. MIR (1974).

[Li] G. LION - Intégrales d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov. LN 587, Springer, p. 160-176 (1977).

[Mi] D. MILICIC - D-modules and representation theory. Livre en préparation.

[Pe] R. PENNEY - Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem. Journ. Funct. Anal.,18, p. 177-190 (1975)

U.A. 748 du C.N.R.S.

Université Paris 7
UFR de Mathématiques
2, place Jussieu
75251 Paris cedex 05.