

COMPOSITIO MATHEMATICA

YVES BENOIST

Les modules simples sphériques d'une algèbre de Lie nilpotente

Compositio Mathematica, tome 73, n° 3 (1990), p. 295-327.

[<http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__73_3_295_0>](http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__73_3_295_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Les modules simples sphériques d'une algèbre de Lie nilpotente

YVES BENOIST

UA 748 du CNRS, Univ. Paris VII, UFR de Mathématiques 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex

Received 19 August 1988; accepted 19 July 1989

Résumé. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une involution σ et $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des points fixes de σ . On montre qu'il existe une bijection naturelle entre les modules simples sphériques de $(\mathfrak{g}, \sigma)$ et les orbites dans $\mathfrak{h}^\perp$ du groupe adjoint de $\mathfrak{h}$.

On donne trois constructions de ces modules. L'une d'elles les réalise comme image de modules induits par le foncteur dérivé des vecteurs $\mathfrak{h}$ -nilpotents.

Introduction

On ne sait pas en général décrire l'ensemble des modules simples d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. La méthode des orbites ramène ce problème à celui de la classification des modules simples sur l'algèbre de Weyl A_n ([Di] th. 4.7.9 et 6.2.4). La difficulté est que la correspondance qui à un module simple associe son annulateur dans l'algèbre enveloppante $U = U(\mathfrak{g})$ n'est pas injective. Soient σ une involution de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des points fixes de σ . On montre que pour les modules simples sphériques (i.e. qui admettent un vecteur annulé par $\mathfrak{h}$) cette correspondance est injective et que son image est l'ensemble $\text{Prim}_\sigma(U)$ des idéaux primitifs I vérifiant $I^j = I^\sigma$ (j désigne l'antiautomorphisme principal). La correspondance inverse est donnée par $I \rightarrow U/(I + U\mathfrak{h})$. On montre en outre que les vecteurs $\mathfrak{h}$ -invariants d'un module simple sphérique forment un espace vectoriel de dimension 1 (Théorème 1). La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ à l'aide des "quadruplets réduisant". Les résultats analogues dans le cas semisimple sont dûs à Harish-Chandra ([Di] 9.5.4 et 9.5.6).

Dans la deuxième partie, on interprète ce résultat en termes de la méthode des orbites: on vérifie que l'application de Dixmier qui met en bijection les orbites de la représentation coadjointe dans $\mathfrak{g}^*$ avec les idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ induit une bijection entre l'ensemble $H \backslash \mathfrak{h}^\perp$ des orbites du groupe adjoint de $\mathfrak{h}$ dans l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ et l'ensemble $\text{Prim}_\sigma(U)$. On en déduit la paramétrisation annoncée de l'ensemble des modules simples sphériques par $H \backslash \mathfrak{h}^\perp$ (Théorème 2).

Dans la troisième partie, on donne une deuxième construction du module simple sphérique M_ω associé à l'orbite $\omega = Hf$, par des inductions et "coinductions $\mathfrak{h}$ -nilpotentes" successives à partir du caractère C_f d'une polarisation ℓ en f (Théorème 3). La méthode de construction nous oblige à sortir du cadre des

espaces symétriques et permet de construire, pour toute sous-algèbre $\mathfrak{k}$ subordonnée à $\mathfrak{f}$, des modules simples admettant des vecteurs propres sous $\mathfrak{k}$ de caractère $\mathfrak{f}|_{\mathfrak{k}}$ (Proposition 3).

Dans la quatrième partie, on montre que M_{ω} est l'image du module induit $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} C_{\mathfrak{f}}$ par le $d^{\text{ième}}$ ($d = \dim(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})$) foncteur dérivé des vecteurs $\mathfrak{k}$ -nilpotents; les autres images étant nulles (Théorème 4). De nouveau, on est amené à faire les choses dans un cadre plus général (Proposition 4).

Dans l'appendice A, on rappelle l'identification des quotients primitifs de U avec certaines algèbres d'opérateurs différentiels tordus (Théorème A3).

Dans les appendices B et C, on ne suppose plus $\mathfrak{g}$ nilpotente. On étudie les modules images d'un module induit par le $p^{\text{ième}}$ foncteur dérivé des vecteurs $\mathfrak{k}$ -finis. D'une part, on donne des conditions générales, sous lesquelles ces images sont nulles (Théorèmes B2 et C2); on retrouve ainsi le théorème d'annulation du IV (Théorème 4a). D'autre part, on explique comment calculer ces images dans quelques situations assez particulières, soit grâce à une induction (Théorème B3), soit grâce à une "coinduction $\mathfrak{k}$ -finie" (Théorème C3); ceci est fort utile pour la démonstration du théorème 4.

Je remercie M. Duflo qui m'a suggéré ce travail et en a suivi avec intérêt la progression.

Notations

Les notations qui suivent sont valables dans tout l'article sauf dans les appendices B et C.

Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique 0 (si F n'est pas algébriquement clos, les énoncés restent valables quitte à remplacer les mots "primitif" par "rationnel" et "simple" par "absolument simple").

On note A_n l'algèbre de Weyl sur F : elle est définie par générateurs $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ et relations $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$ $[p_i, q_j] = \delta_{ij}$; pour $n = 1$, on pose $p = p_1$ et $q = q_1$.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur F de dimension finie et $U = U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Par propriété universelle de U , les $\mathfrak{g}$ -modules s'identifient naturellement aux U -modules. On note $\Sigma(\mathfrak{g})$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathfrak{g}$ -modules simples (on identifiera un module et sa classe) et $\text{Prim}(U)$ l'ensemble des idéaux primitifs de U (i.e. les noyaux de U -modules simples; dans notre situation ce sont des idéaux bilatères maximaux). Pour M dans $\Sigma(\mathfrak{g})$, on note I_M l'annulateur de M dans U : $I_M \in \text{Prim}(U)$. On note $u \rightarrow j(u)$ l'antiautomorphisme principal de U (défini par $\forall X \in \mathfrak{g} \ j(X) = -X$). Soient G le groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et $G \backslash \mathfrak{g}^*$ l'ensemble des orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ pour l'action coadjointe.

Soit σ un automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que $\sigma^2 = Id$; σ se prolonge en un automorphisme de U (noté σ) et définit un automorphisme de G (encore noté σ). Soient $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}/X^\sigma = X\}$, $\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g}/X^\sigma = -X\}$, $\mathfrak{h}^\perp = \{f \in \mathfrak{g}^*/f(\mathfrak{h}) = \{0\}\} = \{f \in \mathfrak{g}^*/f = -{}^t\sigma(f)\}$, $H = \{g \in G/g^\sigma = g\}$, $P = \{g \in G/g^\sigma = g^{-1}\}$, $H \setminus \mathfrak{h}^\perp$ l'ensemble des orbites de H dans $\mathfrak{h}^\perp$, $\text{Prim}_\sigma(U) = \{I \in \text{Prim}(U)/I^j = I^\sigma\}$ et

$\Sigma_\sigma(\mathfrak{g})$ = l'ensemble des modules sphériques simples

$$= \{M \in \Sigma(\mathfrak{g})/\exists v \in M - \{0\} \text{ tel que } \mathfrak{h}.v = \{0\}\}.$$

Pour M un $\mathfrak{g}$ -module, on note $M^\mathfrak{h} = \{v \in M/\mathfrak{h}.v = \{0\}\}$.

Pour $f \in \mathfrak{g}^*$, on note B_f la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$: $B_f(X, Y) = f([X, Y])$ et $\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}/\forall Y \in \mathfrak{g} f([X, Y]) = 0\}$ le stabilisateur de f dans $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre subordonnée à f (i.e. $f([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) = \{0\}$) et K le groupe correspondant; on note $\mathfrak{k}^f = \{X - f(X)/X \in \mathfrak{k}\} \subset U$, $M^{\mathfrak{k}, f} = \{v \in M/\mathfrak{k}^f.v = \{0\}\}$ et $\Gamma_f^0(\mathfrak{k}, M) = \{v \in M/\exists n > 0 \text{ tel que } (\mathfrak{k}^f)^n.v = \{0\}\}$. On dit que $\mathfrak{k}$ est lagrangienne en f si on a $2 \dim(\mathfrak{k} + \mathfrak{g}(f)) = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)$, et est une polarisation en f si en outre $\mathfrak{k}$ contient $\mathfrak{g}(f)$. Par exemple, si $f \in \mathfrak{h}^\perp$ alors $\mathfrak{h}$ est lagrangienne en f (les espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^\perp$ sont isotropes pour B_f).

I. Modules simples sphériques et idéaux primitifs

Le but de cette partie est de montrer le:

THEOREME 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une involution σ .

(a) Soit $I \in \text{Prim}(U)$.

(i) Si $I^j \neq I^\sigma$, alors $U/(I + U\mathfrak{h})$ est nul.

(ii) Si $I^j = I^\sigma$, alors $U/(I + U\mathfrak{h})$ est un module sphérique simple.

(b) Soit $M \in \Sigma_\sigma(\mathfrak{g})$, on a $\dim M^\mathfrak{h} = 1$ et $I_M^j = I_M^\sigma$.

(c) Les applications

$$\Phi: \text{Prim}_\sigma(U) \rightarrow \Sigma_\sigma(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \Psi: \Sigma_\sigma(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Prim}_\sigma(U)$$

$$I \mapsto U/I + U\mathfrak{h} \quad M \mapsto I_M$$

sont des bijections réciproques.

REMARQUE: La propriété $\dim M^\mathfrak{h} = 1$ pour M dans $\Sigma_\sigma(\mathfrak{g})$ rend notre définition de module simple sphérique équivalente à celle de [Di] 9.5.4.

Ce théorème est une conséquence de la:

PROPOSITION 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une involution σ . Soit $I \in \text{Prim}(U)$, alors il existe $d \in \mathbb{N}$ et un isomorphisme d'algèbres de U/I sur

l'algèbre de Weyl A_d tel que

- (i) si $I^j \neq I^\sigma$ l'image de $I + U\hbar/I$ est A_d ,
- (ii) si $I^j = I^\sigma$ l'image de $I + U\hbar/I$ est $A_dp_1 + \dots + A_dp_d$.

Démonstration du Théorème 1. (a) La Proposition 1 prouve que si $I^j \neq I^\sigma$ le module $U/I + U\hbar$ est nul et que si $I^j = I^\sigma$ ce module s'identifie au A_d -module $A_d/A_dp_1 + \dots + A_dp_d \simeq F[q_1, \dots, q_d]$. Or l'espace des polynômes considéré comme module sur l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux est simple; il en est de même du U -module $U/I + U\hbar$. L'image de $1 \in U$ dans $U/I + U\hbar$ est annulé par $\hbar$ donc ce module est sphérique.

(b) Soit $M \in \Sigma_\sigma(\mathcal{g})$ et soit $v \in M^\hbar - \{0\}$. On a $M = Uv$ car M est simple et on a $(I_M + U\hbar)v = 0$. On en déduit que M est isomorphe à un quotient de $U/I_M + U\hbar$. La partie (a) prouve que $I_M^j = I_M^\sigma$ et que M est isomorphe à $U/I_M + U\hbar$. En temps que $U/I_M \simeq A_d$ -module, M s'identifie à $F[q_1, \dots, q_d]$; les vecteurs de M annulés par $\hbar$ s'identifient aux vecteurs de $F[q_1, \dots, q_d]$ annulés par $p_1, \dots, p_d$ (i.e. aux polynômes constants). Donc $\dim M^\hbar = 1$.

(c) D'après (a) et (b) les applications Φ et Ψ sont bien définies. Soit $M \in \Sigma_\sigma(\mathcal{g})$ on a vu en (b) que M est isomorphe à $U/I_M + U\hbar = \Phi \circ \Psi(M)$; donc $\Phi \circ \Psi = \text{Id}$. Soit $I \in \text{Prim}_\sigma(U)$ alors I est inclus dans l'annulateur de $U/I + U\hbar$. Or l'idéal I est maximal (car $U/I \simeq A_d$ est une algèbre simple), on en déduit l'égalité $I = \Psi \circ \Phi(I)$; donc $\Psi \circ \Phi = \text{Id}$.

Démonstration de la Proposition 1: On procède par récurrence sur $\dim \mathcal{g}$.

Si $\dim \mathcal{g} = 1$: $\mathcal{g} = FT$, les idéaux primitifs de U sont de la forme $I_a = F[T](T - a)$ pour $a \in F$ et $U/I_a \simeq F = A_0$. On vérifie alors aisément la proposition: si $\sigma = \text{Id}$, on a l'équivalence $I_a^\sigma = I_a^j \Leftrightarrow a = 0$ et lorsque $a = 0$ (resp. $a \neq 0$) l'image de $U\hbar = T F[T]$ dans U/I_a est nulle (resp. U/I_a); si $\sigma = -\text{Id}$, pour tout a , on a $I_a^\sigma = I_a^j$ et l'image de $U\hbar = \{0\}$ dans U/I_a est nulle.

Supposons donc $\dim \mathcal{g} \geq 2$ et soit I un idéal primitif de U . Distinguons quatre cas; notons $\mathcal{z}$ le centre de $\mathcal{g}$.

1^{er} cas. $I \cap \mathcal{z}$ contient une droite vectorielle stable par σ .

Soit ℓ une telle droite, on quotiente par celle-ci: soit $\bar{\mathcal{g}} = \mathcal{g}/\ell$ et $p: \mathcal{g} \rightarrow \bar{\mathcal{g}}$ la projection canonique que l'on prolonge en un morphisme de U dans $\bar{U} = U(\bar{\mathcal{g}})$ encore notée p . Soient $\bar{\sigma}$ l'involution de $\bar{\mathcal{g}}$ telle que $\bar{\sigma} \circ p = p \circ \sigma$ et $\bar{\hbar} = p(\hbar)$ l'ensemble de ses points fixes. Soit $\bar{I} = p(I)$, on a $I = p^{-1}(\bar{I})$ et $I + U\hbar = p^{-1}(\bar{I} + \bar{U}\bar{\hbar})$; on en déduit que le $U/I \simeq \bar{U}/\bar{I}$ -module $U/I + U\hbar$ est isomorphe à $\bar{U}/\bar{I} + \bar{U}\bar{\hbar}$; en outre, on a l'équivalence $I^\sigma = I^j \Leftrightarrow \bar{I}^{\bar{\sigma}} = \bar{I}^j$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $\bar{\mathcal{g}}$ donne le résultat voulu pour $\mathcal{g}$.

2^{ème} cas. $I \cap \mathcal{z} \neq \{0\}$ et $I \cap \mathcal{z}$ ne contient pas de droites σ -stables.

Soit $z \in I \cap \mathcal{z} - \{0\}$, on a $z^\sigma \in I^\sigma \cap \mathcal{z}$ et $z^\sigma \notin I \cap \mathcal{z} = I^j \cap \mathcal{z}$; on en déduit $I^\sigma \neq I^j$. On est dans la situation (ii); vérifions l'égalité $U = I + U\hbar$. Comme le centre de U/I est réduit aux scalaires, il existe $a \in F - \{0\}$ tel que $z^\sigma - a \in I$. L'égalité

$1 = a^{-1}((a - z^\sigma) - z + (z + z^\sigma)) \in I + U\mathfrak{h}$ prouve bien que $U = I + U\mathfrak{h}$.

3^{ème} cas. $I \cap \mathfrak{x} = \{0\}$ et $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{h}$.

Soit $z \in \mathfrak{x} - \{0\}$, il existe $a \in F - \{0\}$ tel que $z - a \in I$. On a $(z - a)^j = -z - a \in I^j$ et $(z - a)^\sigma = z - a \in I^\sigma$. L'égalité $1 = (2a)^{-1}((a - z) + (a - z)) \in I^\sigma + I^j$ prouve que $U = I^\sigma + I^j$ et donc que $I^\sigma \neq I^j$. On est dans la situation (ii); vérifions l'égalité $U = I + U\mathfrak{h}$: c'est une conséquence de l'égalité $1 = a^{-1}((a - z) + z) \in I + U\mathfrak{h}$.

4^{ème} cas. $I \cap \mathfrak{x} = \{0\}$ et $\mathfrak{x} \not\subset \mathfrak{h}$.

C'est le cas crucial. Comme $I \cap \mathfrak{x} = \{0\}$ on a $\dim \mathfrak{x} = 1$ et comme $\mathfrak{x}$ est stable par σ , on a $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{h}$. Soit $z \in \mathfrak{x} - \{0\}$ on a $z^\sigma = -z$. Il existe $a \in F - \{0\}$ tel que $z - a \in I$. Quitte à remplacer z par $a^{-1}z$, on peut supposer $a = 1$. Pour poursuivre, nous avons besoin de quelques définitions et lemmes.

Supposons désormais que $\mathfrak{g}$ a un centre $\mathfrak{z} = Fz$ de dimension 1. Soit y un élément du deuxième terme $C_2(\mathfrak{g})$ de la suite centrale ascendante qui n'est pas dans $\mathfrak{z}$, il existe alors une forme linéaire μ sur $\mathfrak{g}$ telle que $\forall x \in \mathfrak{g} [x, y] = \mu(x)z$. Soit $\mathfrak{g}' = \text{Ker } \mu$, $\mathfrak{g}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on choisit x dans $\mathfrak{g}$ tel que $\mu(x) = 1$.

DEFINITION ([Di]§4.7.7). Un tel quadruplet $(x, y, z, \mathfrak{g}')$ est appelé un quadruplet réduisant de $\mathfrak{g}$.

On peut dans la construction précédente s'arranger pour que Fx, Fy et $\mathfrak{g}'$ soient stables par σ .

DEFINITION. Un tel quadruplet $(x, y, z, \mathfrak{g}')$ est appelé un quadruplet réduisant de $(\mathfrak{g}, \sigma)$.

On note U_z le localisé de U pour la famille multiplicative $S = \{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\}$ ([Di] 3.6.3). Pour V un idéal de U , on note $V_z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} z^{-n}V \subset U_z$.

LEMME 1. Soient $(x, y, z, \mathfrak{g}')$ un quadruplet réduisant de $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}'/Fy$, $U' = U(\mathfrak{g}')$, $\bar{U} = U(\bar{\mathfrak{g}})$, $u \rightarrow \bar{u}$ l'homomorphisme canonique de U' sur $\bar{U}$, ad x l'action adjointe de x .

(i) Il existe un unique homomorphisme d'algèbres ψ de U dans $A_1 \otimes \bar{U}$ tel que $\psi(x) = p \otimes 1$ et $\forall u \in U'$

$$\psi(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} q^n \otimes \overline{(\text{ad } x)^n u}. \quad (*)$$

Il se prolonge en un unique homomorphisme d'algèbres, encore noté ψ , de U_z dans $A_1 \otimes \bar{U}_z$; celui-ci est un isomorphisme. On a

$$\psi^{-1}(p \otimes 1) = x, \quad \psi^{-1}(q \otimes 1) = yz^{-1}, \quad \psi^{-1}(1 \otimes \bar{z}) = z \quad \text{et } \forall u \in U'$$

$$\psi^{-1}(1 \otimes \bar{u}) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} ((\text{ad } x)^m u) y^m z^{-m} \quad (**)$$

(ii) L'égalité $\psi(I_z) = A_1 \otimes (\bar{I})_z$ définit une bijection $I \rightarrow \bar{I}$ entre les idéaux bilatères I de U tels que $z - 1 \in I$ et les idéaux bilatères $\bar{I}$ de $\bar{U}$ tels que $\bar{z} - 1 \in \bar{I}$. Les morphismes canoniques $U/I \rightarrow U_z/I_z$ et $\bar{U}/\bar{I} \rightarrow \bar{U}_z/\bar{I}_z$ sont des isomorphismes; d'où les isomorphismes d'algèbres: $U/I \simeq U_z/I_z \simeq A_1 \otimes \bar{U}_z/\bar{I}_z \simeq A_1 \otimes \bar{U}/\bar{I}$.

Démonstration. c.f. [Di] Lemme 4.7.8.

LEMME 2: Soit (x, y, z, g') un quadruplet réduisant de (g, σ) . Supposons que $z \in \mu$. Reprenons les notations du lemme 1. Notons $\bar{j}$ l'antiautomorphisme principal de $\bar{U}$, $\bar{\sigma}$ l'involution de $\bar{U}$ déduite de σ ($\bar{\sigma}(\bar{u}) = \overline{\sigma(u)} \forall u \in U'$) et $\bar{\mathcal{H}}$ l'ensemble des points fixes de $\bar{\sigma}$ dans $\bar{g}$. Soient I un idéal bilatère de U contenant $z - 1$ et $\bar{I}$ l'idéal correspondant de $\bar{U}$ qui contient $\bar{z} - 1$.

(1) On a l'équivalence $I = (I^\sigma)^j \Leftrightarrow \bar{I} = (\bar{I}^\sigma)^{\bar{j}}$.

(2) (a) Si $x \in \mathcal{H}$ et $y \in \mu$, on a l'égalité

$$\psi(U_z \mathcal{H}) = A_1 \otimes (\bar{U}_z \bar{\mathcal{H}}) + A_1 p \otimes \bar{U}_z$$

et l'isomorphisme d'algèbres $\psi_I: U/I \xrightarrow{\sim} A_1 \otimes \bar{U}/\bar{I}$ du Lemme 1 induit un isomorphisme de $(U/I \simeq A_1 \otimes \bar{U}/\bar{I})$ -modules entre $U/I + U\mathcal{H}$ et $A_1/A_1 p \otimes (\bar{U}/\bar{I} + \bar{U}\bar{\mathcal{H}})$.

(b) Si $x \in \mu$ et $y \in \mathcal{H}$, on a l'égalité

$$\psi(U_z \mathcal{H}) = A_1 \otimes (\bar{U}_z \bar{\mathcal{H}}) + A_1 q \otimes \bar{U}_z$$

et l'isomorphisme d'algèbres ψ_I induit un isomorphisme de $(U/I \simeq A_1 \otimes \bar{U}/\bar{I})$ -modules entre $U/I + U\mathcal{H}$ et $A_1/A_1 q \otimes (\bar{U}/\bar{I} + \bar{U}\bar{\mathcal{H}})$.

REMARQUE. L'égalité $[x, y] = z$ et les inclusions $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$, $[\mathcal{H}, \mu] \subset \mu$, $[\mu, \mu] \subset \mathcal{H}$ prouvent que l'on est soit dans le cas (a), soit dans le cas (b).

Démonstration. (1) Notons encore σ et $\bar{\sigma}$ les involutions de U_z et $\bar{U}_z$ obtenues par prolongement de σ et $\bar{\sigma}$. Notons σ_1 l'automorphisme de A_1 donné par $\sigma_1(p) = -p$, $\sigma_1(q) = -q$ et j_1 l'antiautomorphisme de A_1 donné par $j_1(p) = -p$, $j_1(q) = q$. On a alors les égalités:

$$\text{Si } x \in \mathcal{H} \quad \psi \circ (j \circ \sigma) \circ \psi^{-1} = j_1 \otimes (\bar{j} \circ \bar{\sigma}).$$

$$\text{Si } x \in \mu \quad \psi \circ (j \circ \sigma) \circ \psi^{-1} = (j_1 \circ \sigma_1) \otimes (\bar{j} \circ \bar{\sigma}).$$

Pour montrer ces égalités, on les vérifie sur les générateurs $p \otimes 1$, $q \otimes 1$ et $1 \otimes \bar{u}$ (pour $u \in U'$) de $A_1 \otimes \bar{U}_z$ en utilisant les formules explicites de ψ^{-1} du Lemme 1.

Dans tous les cas, on a l'égalité $\psi((I^{\sigma \circ j})_z) = A_1 \otimes (\bar{I}^{\bar{\sigma} \circ \bar{j}})_z$ d'où on déduit $\bar{I}^{\sigma \circ j} = \bar{I}^{\bar{\sigma} \circ \bar{j}}$. Ce qui prouve (1).

(2) (a) Soit $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap g': \mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus Fx$. On a $\psi(x) = p \otimes 1 \in A_1 p \otimes \bar{U}_z$ et $\forall u \in \mathcal{H}' \quad \psi(u) \in A_1 \otimes \bar{U}_z \bar{\mathcal{H}}$ (utiliser $(*)$ et remarquer que $\forall n \geq 0 \quad (\text{ad } x)^n u \in \mathcal{H}'$ car

$x \in \mathfrak{h}$). D'autre part, on a $\psi^{-1}(p \otimes 1) = x \in U_z$ et $\forall u \in U' \ \psi^{-1}(\bar{u}) \in U_z \mathfrak{h}$ (utiliser (**)) et la même remarque). On en déduit l'égalité:

$$\begin{aligned}\psi(U_z \mathfrak{h}) &= (A_1 \otimes \bar{U}_z)(1 \otimes \bar{\mathfrak{h}} + p \otimes 1) \\ &= A_1 \otimes \bar{U}_z \bar{\mathfrak{h}} + A_1 p \otimes \bar{U}_z.\end{aligned}$$

Donc

$$\psi(U_z \mathfrak{h} + I) = A_1 \otimes (\bar{U}_z \bar{\mathfrak{h}} + \bar{I}_z) + A_1 p \otimes \bar{U}_z$$

et

$$\psi_I((U \mathfrak{h} + I)/I) = A_1 \otimes ((\bar{U} \bar{\mathfrak{h}} + \bar{I})/\bar{I}) + A_1 p \otimes \bar{U}/I.$$

Finalement, le U/I -module

$$\begin{aligned}U/U \mathfrak{h} + I &\simeq (U/I)/((U \mathfrak{h} + I)/I) \text{ s'identifie au } A_1 \circ \bar{U}/\bar{I}\text{-module} \\ &\simeq (A_1 \otimes \bar{U}/\bar{I})/(A_1 \otimes (\bar{U} \bar{\mathfrak{h}} + \bar{I})/\bar{I} + A_1 p \otimes \bar{U}/\bar{I}) \\ &\simeq (A_1/A_1 p) \otimes ((\bar{U}/\bar{I})/(\bar{U} \bar{\mathfrak{h}} + \bar{I})/\bar{I}) \\ &\simeq A_1/A_1 p \otimes \bar{U}/\bar{U} \bar{\mathfrak{h}} + \bar{I}.\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait montrer.

(b) Soit $u \in \mathfrak{h}$, on a $u \in \mathfrak{g}'$ et d'après (*)

$$\psi(u) = 1 \otimes \bar{u} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} q^n \otimes \overline{(\text{ad } x)^n u} \in A_1 \otimes \bar{\mathfrak{h}} + A_1 q \otimes \bar{U}_z.$$

D'autre part, on a $\psi^{-1}(q \otimes 1) = z^{-1}y \in U_z \mathfrak{h}$ (car $y \in \mathfrak{h}$) et, d'après (**),

$$\psi^{-1}(1 \otimes \bar{u}) = u + \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m!} ((\text{ad } x)^m u) y^m z^{-m} \in U_z \mathfrak{h} \text{ (car } y \in \mathfrak{h}).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\psi(U_z \mathfrak{h}) &= (A_1 \otimes \bar{U}_z)(1 \otimes \bar{\mathfrak{h}} + q \otimes 1) \\ &= A_1 \otimes \bar{U}_z \bar{\mathfrak{h}} + A_1 q \otimes \bar{U}_z.\end{aligned}$$

On termine le raisonnement comme en (a).

Fin de la démonstration de la Proposition 1. Reprenons les notations et les

hypothèses du 4^{ème} cas et choisissons un quadruplet réduisant (x, y, z, g') de (g, σ) . Appliquons l'hypothèse de récurrence à l'idéal primitif $\bar{I}$ de $\bar{U}$: on obtient un isomorphisme entre $\bar{U}/\bar{I}$ et A_d ; d'où des isomorphismes:

$$U/I \xrightarrow{\Psi_I} A_1 \otimes \bar{U}/\bar{I} \simeq A_1 \otimes A_d \simeq A_{d+1}.$$

Pour cette dernière identification, on prend:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, d \quad 1 \otimes p_i &\simeq p_i \quad \text{et} \quad 1 \otimes q_i \simeq q_i, \\ \text{si } x \in \mathfrak{h} \quad p \otimes 1 &\simeq p_{d+1} \quad \text{et} \quad q \otimes 1 \simeq q_{d+1}, \\ \text{si } x \in \mathfrak{p} \quad p \otimes 1 &\simeq q_{d+1} \quad \text{et} \quad q \otimes 1 \simeq -p_{d+1}. \end{aligned}$$

Si $I^\sigma \neq I^j$ alors $\bar{I}^\sigma \neq \bar{I}^j$ (Lemme 2) et $\bar{U} = \bar{I} + \bar{U}\bar{\mathfrak{h}}$ (hypothèse de récurrence); donc $U = I + U\mathfrak{h}$ (Lemme 2) et l'image de $(I + U\mathfrak{h})/I$ dans A_{d+1} est A_{d+1} .

Si $I^\sigma = I^j$ alors $\bar{I}^\sigma = \bar{I}^j$ (Lemme 2) et $\bar{U}/\bar{I} + \bar{U}\bar{\mathfrak{h}}$ s'identifie à $A_d/A_d p_1 + \dots + A_d p_d$ comme $(\bar{U}/\bar{I} \simeq A_d)$ -module (hypothèse de récurrence). On en déduit grâce au Lemme 2, en distinguant les deux cas $x \in \mathfrak{h}$ et $x \in \mathfrak{p}$, que $U/I + U\mathfrak{h}$ s'identifie à $A_{d+1}/A_{d+1} p_1 + \dots + A_{d+1} p_{d+1}$ comme $U/I \simeq A_{d+1}$ -module. Ceci termine la démonstration.

II. Paramétrisation des modules simples sphériques

Notons $\Omega \rightarrow I(\Omega) = I_\Omega$ la bijection de Dixmier de $G \backslash \mathfrak{g}^*$ sur $\text{Prim}(U)$ ([Di]Th. 6.2.4). On vérifie aisément que $I(-\Omega) = I(\Omega)^j$ et $I({}^t\sigma(\Omega)) = I(\Omega)^\sigma$. Donc $I(\Omega) \in \text{Prim}_\sigma(U)$ si et seulement si $\Omega = -{}^t\sigma(\Omega)$. Ces orbites sont décrites dans [Be 1]:

PROPOSITION 2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une involution σ .

(1) Notons $\exp$ l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ sur G . On a

$$\exp(\mathfrak{h}) = H \quad \text{et} \quad \exp(\mathfrak{p}) = P.$$

(2) La multiplication $m: H \times P \rightarrow G$ est bijective.

(3) Soit $\Omega \in G \backslash \mathfrak{g}^*$, on a l'équivalence $\Omega = -{}^t\sigma(\Omega) \Leftrightarrow \Omega \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$.

(4) Soit $f \in \mathfrak{h}^\perp$, on a $Hf = Gf \cap \mathfrak{h}^\perp$.

Démonstration. (1), (2) et (4): c.f. [Be 1] Prop. 2.1 et Lemme 4.3.1, les démonstrations s'adaptent facilement.

(3) Procéder par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$: Soit $\Omega = Gf$, on distingue les cas:

(i) $\mathfrak{x} \cap \text{Ker } f$ contient une droite stable par σ .

(ii) $\mathfrak{x} \cap \text{Ker } f$ est une droite non stable par σ .

(iii) $\mathfrak{z} \cap \text{Ker } f = \{0\}$ et $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{k}$.

(iv) $\mathfrak{z} \cap \text{Ker } f = \{0\}$ et $\mathfrak{z} \not\subset \mathfrak{k}$.

Le cas (i) est facile. Dans les cas (ii) et (iii), on a $\Omega \neq -{}^t\sigma(\Omega)$. Dans le dernier cas, on a $\dim \mathfrak{z} = 1$ et on peut introduire un quadruplet réduisant $(x, y, z, \mathfrak{g}')$ de $(\mathfrak{g}, \sigma)$. On a $z \notin \mathfrak{k}$. On peut supposer $f(z) = 1$ et quitte à remplacer f par $(\exp tx)f$ avec $t = f(y)$, on peut supposer que $f(y) = 0$. On note G' le groupe associé à $\mathfrak{g}'$, $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$, et π la projection canonique de $\mathfrak{g}^*$ sur $(\mathfrak{g}')^*$. On a $Gf = \bigcup_{t \in F} \pi^{-1}(G'(\exp(tx)f'))$ (réunion disjointe). Si $Gf = -{}^t\sigma(Gf)$ on a alors $G'f' = -{}^t\sigma(G'f')$ (évaluer la valeur de ces G' -orbites en y). L'hypothèse de récurrence permet de supposer que $f' \in (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k})^\perp$. On a alors $Gf \cap \mathfrak{k}^\perp \neq \emptyset$.

COROLLAIRE: L'application $\omega \rightarrow I_\omega =: I(G\omega)$ déduite de l'application de Dixmier est une bijection de $H \backslash \mathfrak{k}^\perp$ sur $\text{Prim}_\sigma(U)$.

Cela résulte de ce qui précède. On en déduit, grâce au Théorème 1, le:

THÉORÈME 2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une involution σ . L'application $\omega \rightarrow M_\omega =: U/(I_\omega + U\mathfrak{k})$ est une bijection de l'ensemble $H \backslash \mathfrak{k}^\perp$ des orbites de H dans l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ sur l'ensemble $\Sigma_\sigma(\mathfrak{g})$ des modules simples sphériques.

III. Modules simples sphériques et inductions

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre subordonnée à f , $\omega = Kf \subset f + \mathfrak{k}^\perp$, $\Omega = Gf$ et I_Ω l'idéal primitif associé à Ω . On considère le procédé de construction suivant:

“On choisit une polarisation ℓ en f et une suite $\mathfrak{g}_*$ de sous-algèbres $\ell = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$ telle que $\dim(\mathfrak{g}_i/\ell) = i$. On pose $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_i$, $U_i = U(\mathfrak{g}_i)$ et on construit par récurrence un $\mathfrak{g}_i$ -module M_i : $M_0 = C_f$ est le ℓ -module de dimension 1 donné par $f|_\ell$; M_i se déduit de M_{i-1} de la façon suivante:

1^{er} cas. Si $\mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{g}_{i-1}$, alors M_i est l'induite de M_{i-1} :

$$M_i = U_i \bigotimes_{U_{i-1}} M_{i-1}.$$

2^{ème} cas. Si $\mathfrak{k}_i \not\subset \mathfrak{g}_{i-1}$, alors M_i est la “coinduite $\mathfrak{k}_i^f$ -nilpotente” de M_{i-1} : $M_i = \Gamma_f^0(\mathfrak{k}_i, \text{Hom}_{U_{i-1}}(U_i, M_{i-1}))$.

On pose alors $M_\omega = M_\omega(f, \ell, \mathfrak{g}_*) =: M_r$.

PROPOSITION 3. Avec les notations ci-dessus

(i) M_ω est un module simple d'annulateur I_Ω .

(ii) $(M_\omega)^{\mathfrak{k}, f} \neq \{0\}$.

Démonstration. Par récurrence sur i , on montre en utilisant le lemme

ci-dessous que M_i est un module simple dont l'annulateur est l'idéal primitif associé à $f_i = f|_{\mathfrak{g}_i}$ et tel que $(M_i)^{\mathfrak{k}_i, f_i} \neq \{0\}$ (remarquer que ℓ est une polarisation en f_i , donc $\mathfrak{g}_i(f_i) \subset \ell \subset \mathfrak{g}_{i-1}$).

REMARQUES. Nous verrons (Proposition 4) que le module M_ω ne dépend pas de la suite $\mathfrak{g}_*$ choisie. Par contre M_ω peut dépendre de ℓ (par exemple, si $\mathfrak{k} = \{0\}$).

Si $\mathfrak{k}$ est lagrangienne en f , nous verrons ([Be3]§5) que M_ω ne dépend pas du choix de ℓ , la notation M_ω est alors justifiée car M_ω ne dépend pas non plus de f dans ω .

THEOREME 3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une involution σ . Soient $f \in \mathfrak{k}^\perp$, $\omega = Hf$, ℓ une polarisation en f , $\ell = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$ une suite de sous-algèbres telle que $\dim(\mathfrak{g}_i/\ell) = i$, $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_i$, $U_i = U(\mathfrak{g}_i)$ et $M_0 = C_f =$ le ℓ -module de dimension 1 donné par $f|_\ell$. On construit par récurrence le $\mathfrak{g}_i$ -module M_i : Si $\mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{g}_{i-1}$, on prend $M_i = U_i \otimes_{U_{i-1}} M_{i-1}$ et si $\mathfrak{k}_i \not\subset \mathfrak{g}_{i-1}$ on prend $M_i = \Gamma_0^0(\mathfrak{k}_i, \text{Hom}_{U_{i-1}}(U_i, M_i))$.

Alors M_r est le module simple sphérique M_ω associé à ω .

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 3 et de l'unicité du module sphérique simple d'annulateur I_{G_f} (Théorème 1).

LEMME. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}(f)$, $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$, I (resp. I') l'idéal primitif de U (resp. de $U' = U(\mathfrak{g}')$) associé à f (resp. f').

Soient $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f , $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'$ et M' un $\mathfrak{g}'$ -module simple d'annulateur I' tel que $(M')^{\mathfrak{k}', f'} \neq \{0\}$. Si $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}'$ on pose $M = U \otimes_{U'} M'$ et si $\mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{g}'$ on pose $M = \Gamma_f^0(\mathfrak{k}, \text{Hom}_{U'}(U, M'))$.

Alors M est un $\mathfrak{g}$ -module simple d'annulateur I tel que $M^{\mathfrak{k}, f} \neq \{0\}$.

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$; d'après le Corollaire de A3, $\exists u_0 \in I'$ tel que $\text{ad } X(u_0) \in 1 + I'$ et $\forall k \geq 2$ $(\text{ad } X)^k u_0 \in I'$.

1^{er} cas. $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}'$.

On a $M = F[X] \otimes M'$ (identifier M' et $1 \otimes M'$) et l'action de $\mathfrak{g}$ est donnée par: $\forall P \in F[X], \forall m \in M', \forall u \in U'$

$$u(P \otimes m) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} (\partial_X^n P) \otimes ((\text{ad } X)^n u) m \quad (\text{somme finie})$$

et

$$X(P \otimes m) = (XP) \otimes m$$

donc

$$u_0(P \otimes m) = -(\partial_X P) \otimes m.$$

On en déduit facilement que M est simple: tout sous- $\mathcal{g}$ -module non nul rencontre M' donc contient M' donc égale M (on peut aussi utiliser ([Di] Th. 5.3.6). On a $M^{\ell, f} = M'^{\ell, f'} \neq \{0\}$.

2^{ème} cas. $\ell \notin \mathcal{g}'$.

Dans ce cas, on choisit X dans ℓ et on pose $a = f(X)$. Soient $\forall k \geq 0$ $m_k \in M'$; on note $\sum_{k \geq 0} x^k \otimes m_k$ l'élément de $V = \text{Hom}_{U'}(U, M')$ tel que

$$\left(\sum_{k \geq 0} x^k \otimes m_k \right) (X^l) = k! \delta_{k,l}.$$

L'action de $\mathcal{g}$ dans V est donnée par: $\forall u \in U'$

$$u \left(\sum_{k \geq 0} x^k \otimes m_k \right) = \sum_{k,n} \frac{1}{n!} x^{k+n} \otimes ((\text{ad } X)^n u) m_k$$

et

$$X \left(\sum_{k \geq 0} x^k \otimes m_k \right) = \sum_{k \geq 0} k x^{k-1} \otimes m_k.$$

On en déduit: $\Gamma_f^0(FX, V) = F[x] e^{ax} \otimes M'$. Comme ℓ^f est une sous-algèbre de Lie de U , l'action de $\ell'^{f'}$ dans $F[x] e^{ax} \otimes M'$ est nilpotente et on a $M^{\ell, f} = e^{ax} \otimes M^{k', f'} \neq \{0\}$. On a donc $M = F[x] e^{ax} \otimes M'$ avec pour action de $\mathcal{g}$, $\forall P \in F[x]$, $\forall m \in M'$ et $\forall u \in U'$:

$$u(P e^{ax} \otimes m) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n P e^{ax} \otimes ((\text{ad } X)^n u) m$$

et

$$X(P e^{ax} \otimes m) = ((\partial_x + a)P) e^{ax} \otimes m$$

donc

$$u_0(P e^{ax} \otimes m) = x P e^{ax} \otimes m.$$

Pour $u \in U'$, on pose $u' = \sum_{k \geq 0} ((-1)^k / k!) u_0^k (\text{ad } X)^k(u)$. Remarquons que $u' - u \in I'$ et que $\forall n \geq 1$ $(\text{ad } X)^n(u') \in I'$: en effet,

$$(\text{ad } X)^n(u') \in \sum_{k \leq n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} (\text{ad } X)^n(u) + I' = (1-1)^n (\text{ad } X)^n(u) + I'.$$

On a donc l'égalité:

$$u'(Pe^{ax} \otimes m) = Pe^{ax} \otimes um.$$

On en déduit facilement que M est simple: tout sous- $\mathcal{g}$ -module non nul rencontre $e^{ax} \otimes M'$ donc contient $e^{ax} \otimes M'$ donc égale M .

Dans les deux cas, on vérifie aisément sur les formules que

$$I_M = \{v = \sum_{p \geq 0} X^p v_p \text{ tel que } p, n \geq 0 \text{ (ad } X)^n v_p \in I'\}.$$

Or cet idéal est égal à I (c.f. dém. du Th. A3 b).

IV. Modules simples sphériques et foncteurs Γ_f^p

Soient $\mathcal{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathcal{g}^*$, $\mathcal{k}$ une sous-algèbre subordonnée à f , $\omega = Kf \subset f + \mathcal{k}^\perp$, $\Omega = Gf$ et I_Ω l'idéal primitif associé à Ω . On note $\Gamma_f^p(\mathcal{k}, \cdot)$ le $p^{\text{ème}}$ foncteur dérivé du foncteur $\Gamma_f^0(\mathcal{k}, \cdot)$ (c.f. B1; on a écrit f pour $f|_{\mathcal{k}}$).

PROPOSITION 4. Avec les notations ci-dessus; soient $f_1 \in \mathcal{g}^*$, ℓ une polarisation en f_1 , $M = U \otimes_{U(\ell)} C_{f_1}$ le module induit à partir du caractère de ℓ donné par f_1 et $d = \dim(\mathcal{k}/\mathcal{k} \cap \ell)$. Alors

- (a) $\forall p \neq d \quad \Gamma_f^p(\mathcal{k}, M) = 0$.
- (b) (i) Si $f = f_1$ (on se ramène faiblement à ce cas dès que f et f_1 coïncident sur $\mathcal{k} \cap \ell$), $\Gamma_f^d(\mathcal{k}, M)$ est le module M_ω construit dans la Proposition 3; en particulier, ce module est simple, d'annulateur I et admet un vecteur non nul annulé par $\mathcal{k}^f$.
- (ii) Si $(f - f_1)|_{\mathcal{k} \cap \ell} \neq 0$, on a $\Gamma_f^d(\mathcal{k}, M) = 0$.

REMARQUE. Ceci prouve que le module M_ω construit dans la Proposition 3 ne dépend pas de la suite $\mathcal{g}_*$ de sous-algèbre choisie.

Le corollaire suivant m'a été suggéré par F. du Cloux.

COROLLAIRE. Soient $\mathcal{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f_1, f_2 \in \mathcal{g}^*$, ℓ_1 et ℓ_2 deux polarisations en f_1 et f_2 respectivement et $d = \dim(\ell_2/\ell_1 \cap \ell_2)$. Alors

- (a) $\forall p \neq d \quad \Gamma_{f_2}^p(\ell_2, U \otimes_{U(\ell_1)} C_{f_1}) = 0$.
- (b) Pour $p = d \quad \Gamma_{f_2}^d(\ell_2, U \otimes_{U(\ell_1)} C_{f_1}) = U \otimes_{U(\ell_2)} C_{f_2} \quad \text{si } (f_1 - f_2)|_{\ell_1 \cap \ell_2} = 0$
 $\quad \quad \quad = 0 \quad \quad \quad \text{sinon.}$

Démonstration. Un module simple admettant un vecteur non nul annulé par $\ell_2^{f_2}$ est un quotient non nul de $U/U\ell_2^{f_2} = U \otimes_{U(\ell_2)} C_{f_2}$ qui est aussi simple ([Di] Prop. 6.2.9).

THEOREME 4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une involution σ . Soient $f \in \mathfrak{h}^\perp$, $\omega = Hf$ et M_ω le module simple sphérique correspondant. Soient ℓ une polarisation en f et $d = \dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \ell)$. Alors:

- (a) $\forall p \neq d \quad \Gamma_0^p(\mathfrak{h}, U \otimes_{U(\ell)} C_f) = 0$.
- (b) Pour $p = d \quad \Gamma_0^d(\mathfrak{h}, U \otimes_{U(\ell)} C_f) = M_\omega$.

REMARQUE. Le même résultat est vrai, si on prend $f \in \mathfrak{g}^*$ et ℓ polarisation en f tels que $f|_{\mathfrak{h} \cap \ell} = 0$, avec l'orbite $\omega = Gf \cap \mathfrak{h}^\perp$ (non vide car elle contient $(f + \ell^\perp) \cap \mathfrak{h}^\perp$).

Par contre si $f|_{\mathfrak{h} \cap \ell} \neq 0$ alors $\forall p \geq 0 \quad \Gamma_0^p(\mathfrak{h}, U \otimes_{U(\ell)} C_f) = 0$.

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 4 et du Théorème 1.

Démonstration de la Proposition 4. On reprend les notations de la Proposition 3 et on procède par récurrence sur $r = \dim(\mathfrak{g}/\ell)$. Si $r = 0$, le résultat est clair (corollaire de C1). Si $r > 0$, soient $\mathfrak{g}'$ l'idéal de codimension 1 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{r-1}$, $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$, $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}'$, $d' = \dim(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}' \cap \ell)$, $U' = U(\mathfrak{g}')$ et $M' = U' \otimes_{U(\ell)} C_{f'}$.

1^{er} cas. Si $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}'$, on a alors $d = d'$ et $\forall p \geq 0$

$$\Gamma_f^p(\mathfrak{k}, M) = U \bigotimes_{U'} (\Gamma_{f'}^p(\mathfrak{k}', M')) \quad (\text{Th. B3}).$$

2^{ème} cas. Si $\mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{g}'$, on a alors $d = d' + 1$ et $\forall p \geq 0$

$$\Gamma_f^p(\mathfrak{k}, M) = \Gamma_f^0(\mathfrak{k}, \text{Hom}_{U'}(U, \Gamma_{f'}^{p-1}(\mathfrak{k}', M'))) \quad (\text{Th. C3}).$$

Dans ces deux cas, l'hypothèse de récurrence donne les résultats annoncés.

V. Modules simples sphériques et vecteurs distribution

Dans cette partie $F = \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ est la complexifiée d'une algèbre de Lie nilpotente réelle $\mathfrak{g}_0$ et σ est le prolongement à $\mathfrak{g}$ d'une involution de $\mathfrak{g}_0$; on note $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$, G_0 et H_0 les sous-groupes de Lie connexes de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{h}_0$. Soient $f \in \sqrt{-1} \mathfrak{g}_0^*$, π_f la (classe de) représentation unitaire irréductible de G_0 associée à f par la bijection de Kirillov, $\mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty}$ l'espace des vecteurs distributions de cette représentation: c'est un U -module annulé par $I(Gf)$. Dans [Be] nous avons étudié le sous-espace $(\mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty})^f = \{v \in \mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty} / \forall X \in \mathfrak{h} \quad Xv = 0\}$.

PROPOSITION ([Be] Prop. 2.3). $(\mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty})^f$ est de dimension 1 ou 0 selon que l'orbite $\Omega_0 = G_0 f$ (de f sous l'action coadjointe de G_0) rencontre ou ne rencontre pas $\mathfrak{h}^\perp$.

Soit $\Gamma_0^0(\mathfrak{h}, \mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty})$ le sous- $\mathfrak{g}$ -module formé des vecteurs distributions $\mathfrak{h}$ -nil-

potents. D'après le théorème d'Engel ([Di] Prop. 1.3.17), cet espace est non nul si et seulement si $(\mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty})^\ell \neq \{0\}$ et, donc, si et seulement si $\Omega_0 \cap \mathcal{H}^\perp \neq \emptyset$.

THEOREME 5: *Avec les notations ci-dessus, on suppose que $f \in \mathcal{H}^\perp$ et on note $\omega = Hf$, alors $\Gamma_0^0(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty})$ est isomorphe au module simple sphérique M_ω .*

Démonstration. Il suffit de voir, grâce au Théorème 1, que $\tilde{M} = \Gamma_0^0(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty})$ est simple. Ce module est un $A_d \simeq U/I_{Gf}$ -module. La Proposition 1(ii) permet d'identifier dans un tel module les vecteurs annulés par $\mathcal{H}$ et ceux annulés par $p_1, \dots, p_d$. Soient $v \in (\mathcal{H}_{\pi_f}^{-\infty})^\ell \setminus \{0\}$ et $N = Uv \simeq A_d v$. N s'identifie à un quotient du A_d -module $O_d = \mathbb{C}[q_1, \dots, q_d]$; ce dernier est simple, donc $N \simeq O_d$.

Supposons par l'absurde que $M \neq N$, alors $M' = M/N$ a un vecteur $\mathcal{H}$ -invariant non nul et donc un sous-module N' isomorphe à O_d . Le lemme suivant prouve que N' se relève en un sous-module de M ce qui contredit l'égalité $\dim M^\ell = 1$.

LEMME. *Soient A_d l'algèbre de Weyl, $O_d = \mathbb{C}[q_1, \dots, q_d] = A_d/A_d p_1 + \dots + A_d p_d$ et $O \rightarrow O_d \rightarrow V \rightarrow O_d \rightarrow 0$ une suite exacte de A_d -modules. Alors cette suite exacte est scindée.*

Démonstration. Soit $v \in V$ un vecteur dont l'image dans O_d est le polynôme constant 1. Posons $H_i = p_i v \in O_d$, $i = 1, \dots, d$. On a $\partial_{q_i} H_j = \partial_{q_j} H_i \forall i, j$. Donc il existe $H \in O_d$ tel que $\partial_{q_i} H = H_i \forall i$. Le vecteur $v_0 = v - H$ est annulé par $p_i, \forall i$; donc $A_d v_0$ est isomorphe à O_d et la suite exacte est scindée.

REMARQUE. Ce lemme est un cas particulier (pour $i = 1$) d'un résultat bien connu: $\text{Ext}_{A_d}^i(O_d, O_d) = 0 \forall i > 0$.

Appendices

A. Opérateurs différentiels sur G/B

Les résultats de cet appendice ne sont pas nouveaux. La présentation qui en est faite est inspirée par [B–B]. Les variétés algébriques considérées ici sont toutes affines, nous pouvons donc ne pas parler de faisceaux.

Soient $\mathcal{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur F , $U = U(\mathcal{g})$ son algèbre enveloppante et G le groupe unipotent correspondant. Soient D_G l'algèbre des opérateurs différentiels (à coefficients polynômiaux) sur G et O_G la sous-algèbre des fonctions polynômiales. On note $u \rightarrow L_u$ le morphisme d'algèbres de U dans D_G tel que $\forall X \in \mathcal{g} \forall \varphi \in O_G \forall g \in G (L_X \varphi)(g) = d/ds(\varphi(\exp(-sX)g))|_{s=0}$. On en déduit une identification $D_G = O_G \otimes_F U$ où la structure d'algèbre est donnée par la relation de commutation: $\forall X \in \mathcal{g} \forall \varphi \in O_G [1 \otimes X, \varphi \otimes 1] = L_X \varphi \otimes 1$.

A1. Idéal de codimension 1

Soit $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$; on a les notations évidentes: $U', G', D_{G'}, O_{G'}, L'$. Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = FX \oplus \mathfrak{g}'$. On a alors un isomorphisme de variétés algébriques $F \times G' \rightarrow G$ donné par $(t, g') \rightarrow \exp(tX)g'$. La séparation des variables donne alors un isomorphisme d'algèbres $A_1 \otimes D_{G'} \simeq D_G$ où $A_1 = F\langle x, X \rangle$ est une algèbre de Weyl sur F ($x \in O_G$ est donné par $x(\exp(tX)g') = t$ et X est le champ de vecteurs $L_X = -\partial_X$). On a alors un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & U \\ L' \downarrow & & \downarrow L \\ D_{G'} & \xrightarrow{1 \otimes Id} & D_G \end{array}$$

dont la non-commutativité est régie par le lemme suivant:

LEMME A1. Avec les notations ci-dessus, on a $\forall u \in U'$

$$(a) \quad L_u = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} \otimes L'_{(\text{ad } X)^n(u)}$$

$$(b) \quad 1 \otimes L'_u = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} L_{(\text{ad } X)^n(u)}$$

Démonstration. (a) Les deux formules définissent des morphismes d'algèbres de U' dans D_G . Il suffit donc de vérifier l'égalité pour $u = Y \in \mathfrak{g}'$. On a $\forall \varphi \in O_G, \forall t \in F, \forall g' \in G'$:

$$\begin{aligned} (L_Y \varphi)(\exp(tX)g') &= \frac{d}{ds} (\varphi(\exp(-sY) \exp(tX)g'))|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} (\varphi(\exp(tX) \exp(-s e^{-\text{ad } tX} Y)g'))|_{s=0} \\ &= (L'_{(e^{-\text{ad } tX} Y)})(\exp(tX)g') \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} (L'_{(\text{ad } X)^n Y}) \varphi(\exp(tX)g') \end{aligned}$$

D'où
$$L_Y = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} \otimes L'_{(\text{ad } X)^n Y}.$$

(b) se déduit facilement de (a).

A2. L'algèbre D_f

Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, ℓ une sous-algèbre subordonnée à f , B le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie ℓ , $P = G/B$, O_P l'algèbre des fonctions polynômes sur P (c'est une sous-algèbre de O_G) et $U = (D_G)^B = O_P \otimes U$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur G invariants sous l'action à droite de B ; O_P a une structure naturelle de U -module. On définit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= O_P \otimes \mathfrak{g}, \text{ c'est une sous-algèbre de Lie de } U; \\ \ell &= \{ \sum \varphi_i \otimes X_i \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \forall g \in G \text{ } (\text{Ad } g^{-1})(\sum \varphi_i(g)X_i) \in \ell \}, \\ \mathbf{f} : \ell &\rightarrow O_P \text{ par } \forall g \in G \text{ } (\mathbf{f}(\sum \varphi_i \otimes X_i))(g) = f(\text{Ad } g^{-1}(\sum \varphi_i(g)X_i)), \\ \ell^f &= \{ \xi - \mathbf{f}(\xi)/\xi \in \ell \}. \end{aligned}$$

LEMME A2: (a) $\forall \xi \in \ell \ \forall \eta \in \mathfrak{g} \ \forall \varphi \in O_P$ on a $[\xi, \varphi\eta] = \varphi[\xi, \eta]$.

(b) ℓ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

(c) $\mathbf{f}$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$ -modules.

(d) $U\ell^f$ est un idéal de l'algèbre U .

Démonstration. (a) est clair car $L_\xi \varphi = 0$.

(b) Il suffit, grâce à (a), de vérifier que $\forall Y \in \mathfrak{g}, \sum \varphi_i \otimes X_i \in \ell, g \in G$ on a $(\text{Ad } g^{-1})(\sum (L_Y \varphi_i)(g)X_i + \sum \varphi_i(g)[Y, X_i]) \in \ell$. Or cette expression égale:

$$\frac{d}{ds} ((\text{Ad}(\exp(-sY)g)^{-1})(\sum \varphi_i(\exp(-sY)g)X_i))|_{s=0} \in \ell.$$

(c) Il suffit, grâce à (a), de voir que

$$L_Y(g \rightarrow f((\text{Ad } g^{-1})(\sum \varphi_i(g)X_i)) = f((\text{Ad } g^{-1})(\sum (L_Y \varphi_i)(g)X_i + \sum \varphi_i(g)[Y, X_i]))$$

ce qui est clair.

(d) est une conséquence de (c).

Soient D_P l'algèbre des opérateurs différentiels sur P : $D_P = U/U\ell$ et D_f l'algèbre d'opérateurs différentiels tordus $D_f = U/U\ell^f$.

REMARQUE. Soit $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n}$ un drapeau d'idéaux de $\mathfrak{g}$ avec $\dim \mathfrak{g}_i = i$. Soient $i_1 < \dots < i_r$ ($r = \text{codim } \ell$) tels que $\mathfrak{g}_{i_k} \cap \ell \subset \mathfrak{g}_{i_k-1}$ et $j_1 < \dots < j_s$ ($s = \dim \ell$) $\mathfrak{g}_{j_l} \cap \ell \not\subset \mathfrak{g}_{j_l-1}$. Choisissons $X_k \in \mathfrak{g}_{i_k} \setminus \mathfrak{g}_{i_k-1}$ ($k = 1, \dots, r$) et $Y_l \in (\mathfrak{g}_{j_l} \cap \ell) \setminus \mathfrak{g}_{j_l-1}$ ($l = 1, \dots, s$). Soit $V = FX_1 \oplus \dots \oplus FX_r$; il est clair que $\forall g \in G \ V \oplus \text{Ad } \mathfrak{g}\ell = \mathfrak{g}$. Soit Z_l l'élément de ℓ tel que $\forall g \in G \ Z_l(g) \in Y_l + V$; alors $Z_1, \dots, Z_s$ est une base du O_P -module ℓ et on a $\mathfrak{g} = \ell \oplus (O_P \otimes V)$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt prouve que le O_P -module D_f admet pour base $(X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s})_{n_1, \dots, n_s \geq 0}$.

LEMME A3. Gardons les notations ci-dessus. Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{e}$ et $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$. On a les notations évidentes: $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$, $P' = G'/B$, $O_{P'} = O_P \otimes U'$, $\mathfrak{g}' = O_{P'} \otimes \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'$, $f': \mathfrak{e}' \rightarrow O_{P'}$, $\mathfrak{e}'^{f'}$ et $D_{f'} = U'/U'\mathfrak{e}'^{f'}$.

(a) La séparation des variables (c.f. A1 dont on garde les notations) donne une identification $A_1 \otimes D_{f'} \simeq D_f$ où $A_1 = F\langle x, X \rangle$.

(b) Avec cette identification, le morphisme naturel (encore noté) $L: U \rightarrow D_f$ est relié au morphisme $L': U' \rightarrow D_{f'}$ par: $\forall u \in U'$

$$L_X = X \otimes 1$$

$$L_u = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} \otimes L'_{(\text{ad } X)^n u}$$

$$1 \otimes L'_u = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} L_{(\text{ad } X)^n u}.$$

Démonstration. (a) La séparation des variables donne une identification $A_1 \otimes D_{G'} \simeq D_G$ d'où $A_1 \otimes U' \simeq U$. Soit $Z_1, \dots, Z_s$ une base de $\mathfrak{e}'$ comme $O_{P'}$ -module, alors $Z_1, \dots, Z_s$ est une base de $\mathfrak{e}$ comme O_P -module (cf. la remarque). Donc $A_1 \otimes U'\mathfrak{e}'^{f'} \simeq U\mathfrak{e}^f$ et $A_1 \otimes D_{f'} \simeq D_f$.

(b) C'est une conséquence directe du Lemme 1.

A3. Opérateurs différentiels sur G/B

THEOREME A3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathfrak{g}^*$, I l'idéal primitif de U associé à f et $\mathfrak{e}$ une polarisation en f . Gardons les notations précédentes.

Le morphisme $L: U \rightarrow D_f$ induit un isomorphisme $U/I \xrightarrow{\sim} D_f$.

REMARQUE. Ce théorème est une version algébrique du Théorème 3.1 de [C-G-P] dont nous suivons, grosso modo, la démonstration. Voir aussi [Ki].

COROLLAIRE A3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$, $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$ et I' l'idéal primitif de $U(\mathfrak{g}')$ associé à f' . Supposons $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}'$.

Alors il existe $u_0 \in I'$ tel que $(\text{ad } X)u_0 \in 1 + I'$ et $\forall k \geq 2$ $(\text{ad } X)^k u_0 \in I'$.

Démonstration du théorème et du corollaire. Les démonstrations sont imbriquées; on procède par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. C'est clair si $\dim \mathfrak{g} = 1$. Supposons $\dim \mathfrak{g} \geq 2$. Soit $C_i(\mathfrak{g})$ la suite centrale ascendante de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z} = C_1(\mathfrak{g})$ est le centre de $\mathfrak{g}$. On montre tout d'abord le théorème lorsque $\mathfrak{z} \cap \text{Ker } f \neq \{0\}$ (a); puis lorsque $\mathfrak{z} \cap \text{Ker } f = \{0\}$ et $\mathfrak{e} \cap C_2(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{z}$ (b); on montre ensuite le corollaire (c); on montre enfin le théorème lorsque $\mathfrak{z} \cap \text{ker } f = \{0\}$ et $\mathfrak{e} \cap C_2(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}$ (d).

(a) Si $\mathfrak{z} \cap \text{Ker } f \neq \{0\}$.

Soient $\mathcal{k} = \mathcal{z} \cap \text{Ker } f$, $g_1 = g/\mathcal{k}$, $p: g \rightarrow g_1$ la projection qu'on étend à U , f_1 l'élément de g_1^* tel que $f = f_1 \circ p$ et I_1 l'idéal primitif correspondant. On a $I = p^{-1}(I_1)$ ce qui donne le résultat.

(b) Si $\mathcal{z} \cap \text{Ker } f = \{0\}$ et $\mathcal{e} \cap C_2(g) \neq \mathcal{z}$.

On a $\mathcal{z} = FZ$ avec $f(Z) = 1$. Soient $Y \in (\mathcal{e} \cap C_2(g)) - \mathcal{z}$ et $g' = \mathcal{z}_g(Y) = \{T \in g / [T, Y] = 0\}$; g' est un idéal de codimension 1 de g . Soient $X \in g - g'$ tel que $[X, Y] = Z$ et $f' = f|_{g'}$. On a $\mathcal{e} \subset g'$ et $\mathcal{e}$ est une polarisation en f' . Le Lemme A3 (dont on prend les notations) prouve que

$$D_f = A_1 \otimes D_{f'} \text{ et que } x \otimes 1 = L_{-Y}, X \otimes 1 = L_X \text{ et}$$

$$\forall u \in U' \quad 1 \otimes L'_u = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} L_{Y^n(\text{ad } X)^n(u)}.$$

Ceci prouve, grâce à l'hypothèse de récurrence que A_1 et D_f sont dans l'image de U . Donc L est surjective.

Déterminons le noyau de L : soit $v = \sum_{p \geq 0} X^p v_p \in U$ (somme finie où $v_p \in U'$); on a les équivalences:

$$\begin{aligned} Lv = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n,p} \frac{1}{n!} X^p (-x)^n \otimes L'_{(\text{ad } X)^n(v_p)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n, p \geq 0 \quad L'_{(\text{ad } X)^n(v_p)} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } L = \{v = \sum_{p \geq 0} X^p v_p \text{ tel que } \forall n, p \geq 0 (\text{ad } X)^n(v_p) \in \text{Ker } L'\}$: $\text{Ker } L$ est le plus grand idéal bilatère de U contenu dans $U \text{ Ker } L'$. Soit I' l'idéal primitif de U' associé à f' . Par définition ([Di] 6.1.5), I est l'annulateur du U -module $N = U \otimes_{U(\mathcal{e})} C_f$ et I' celui du U' -module $N' = U' \otimes_{U(\mathcal{e})} C_{f'}$. Or $N = U \otimes_{U'} N'$; on en déduit que I est le plus grand idéal bilatère de U inclus dans UI' . Par hypothèse de récurrence, on a $\text{Ker } L' = I'$; donc $\text{Ker } L = I$.

(c) Démonstration du corollaire.

Soient $(g_i)_{0 \leq i \leq n}$ un drapeau d'idéaux de g tel que $g_{n-1} = g'$, $f_i = f|_{g_i}$ et $g_i(f_i) = \langle X \in g_i / \forall Y \in g_i f_i([X, Y]) = 0 \rangle$. Soit $\mathcal{e} = \sum_i g_i(f_i)$ la polarisation en f construite par la méthode de M. Vergne. On a $\mathcal{e} \subset g'$. On a soit $\mathcal{z} \cap \text{Ker } f \neq 0$, soit $\mathcal{e} \cap C_2(g) \neq \mathcal{z}$; donc le morphisme $L: U \rightarrow D_f$ est surjectif (d'après (a) et (b)).

De nouveau le Lemme A3 prouve que $D_f = A_1 \otimes D_{f'}$. Soit donc $v \in U$ tel que $L_v = x \otimes 1$. Ecrivons $v = \sum_{p \geq 0} X^p v_p$ avec $v_p \in U'$. On a (Lemme 3(b))

$$L_v = \sum_{n,p} \frac{1}{n!} X^p (-x)^n \otimes L'_{(\text{ad } X)^n(v_p)}.$$

On en déduit: $\forall p \geq 1 \forall n \geq 0 (\text{ad } X)^n v_p \in \text{Ker } L'$, $v_0 \in \text{Ker } L'$, $(\text{ad } X)v_0 + 1 \in \text{Ker } L'$

et $\forall n \geq 2$ $(\text{ad } X)^n v_0 \in \text{Ker } L'$. Par hypothèse de récurrence, on a $I' = \text{Ker } L'$, donc $u_0 = -v_0$ convient.

(d) Démonstration du théorème lorsque $\mathfrak{z} \cap \text{Ker } f = \{0\}$ et $\ell \cap C_2(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}$.

Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant ℓ , $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$ et $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$. Alors ℓ est une polarisation en f' . Soit u_0 l'élément de U' construit en (c). On raisonne alors comme en (b) grâce aux formules:

$$x \otimes 1 = L_{-u_0}, \quad X \otimes 1 = L_X \text{ et } \forall u \in U'$$

$$1 \otimes L'_u = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} L_{u_0^n (\text{ad } X)^n(u)}$$

qui prouvent la surjectivité de L . Le même calcul qu'en (b) prouve que $I = \text{Ker } L$.

REMARQUE. L'étude de ce dernier cas n'est pas inutile, comme le prouve l'exemple suivant: $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de dimension 9 de base $e_1, \dots, e_9$ avec pour crochets non nuls (on note $e_i e_j = [e_i, e_j]$)

$$e_1 e_2 = e_9,$$

$$e_1 e_3 = e_4, \quad e_1 e_4 = e_5, \quad e_1 e_6 = e_7, \quad e_1 e_7 = e_8,$$

$$e_2 e_3 = e_6, \quad e_2 e_4 = e_7, \quad e_2 e_5 = e_8,$$

$$e_3 e_8 = e_9, \quad e_4 e_7 = -e_9, \quad e_5 e_6 = e_9.$$

Pour montrer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on vérifiera que e_1 et e_2 définissent des dérivations qui commutent de l'algèbre de Heisenberg de dimension 7 engendrée par $e_3, \dots, e_9$. Soit $f = e_9^*$. On a $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}(f) = Fe_9$ et $C_2(\mathfrak{g}) = Fe_8 \oplus Fe_9$. Les sous-algèbres ℓ_1 de base e_1, e_3, e_4, e_5, e_9 et ℓ_2 de base e_2, e_3, e_6, e_7, e_9 sont des polarisations en f telles que $\ell_i \cap C_2(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}$, pour $i = 1, 2$.

B. Foncteurs dérivés des vecteurs $\hbar$ -finis

Ces foncteurs ont été introduits par G. Zuckerman (c.f. [Vo] ch.6) et étudiés dans le cas résoluble par F. du Cloux ([dC]).

B1. Généralités

Dans cet appendice, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension n sur un corps F algébriquement clos de caractéristique nulle et $\hbar$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Pour tout $\mathfrak{g}$ -module M , on note $\Gamma^0(\hbar, M) = \{m \in M / \dim U(\hbar)m < \infty\}$. C'est un sous- $\mathfrak{g}$ -module de M . On dit que M est $\hbar$ -localement fini si on a $M = \Gamma^0(\hbar, M)$.

Le foncteur $\Gamma^0(\mathcal{H}, \cdot)$ est exact à gauche. On note $\Gamma^p(\mathcal{H}, \cdot)$ le $p^{\text{ème}}$ foncteur dérivé.

Si l'action adjointe, notée ad , de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{g}$ est nilpotente, on note, $\forall \alpha \in (\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}])^*$:

$$\Gamma_\alpha^0(\mathcal{H}, M) = \{m \in M / \exists n > 0 / \forall X_1, \dots, X_n \in \mathcal{H}, \\ (X_1 - \alpha(X_1)) \dots (X_n - \alpha(X_n))m = 0\}.$$

C'est un sous- $\mathcal{g}$ -module de M . On dit que M est $\mathcal{H}$ -localement nilpotent si on a $M = \Gamma_\alpha^0(\mathcal{H}, M)$. Le foncteur $\Gamma_\alpha^0(\mathcal{H}, \cdot)$ est exact à gauche. On note $\Gamma_\alpha^p(\mathcal{H}, \cdot)$ le $p^{\text{ème}}$ foncteur dérivé. On a $\Gamma^p(\mathcal{H}, M) = \bigoplus_{\alpha \in (\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}])^*} \Gamma_\alpha^p(\mathcal{H}, M)$. Les résultats qui suivent sont énoncés pour les foncteurs Γ^p . Des résultats analogues pour les foncteurs Γ_α^p s'en déduisent facilement lorsque cette hypothèse est satisfaite.

On note $u \rightarrow \Delta(u) = \sum_i u'_i \otimes u''_i$ le coproduit de $U(\mathcal{H})$: c'est l'unique morphisme d'algèbre de $U(\mathcal{H})$ dans $U(\mathcal{H}) \otimes U(\mathcal{H})$ tel que $\forall Y \in \mathcal{H} \Delta(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$. On note $u \rightarrow j(u)$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathcal{H})$: $\forall Y \in \mathcal{H} j(Y) = -Y$.

Soit M un $\mathcal{g}$ -module; on peut munir l'espace vectoriel $\text{Hom}_F(U(\mathcal{H}), M)$ de plusieurs structures de $\mathcal{g}$ et de $\mathcal{H}$ -modules ([D-V], [Wi]):

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Hom}_F(U(\mathcal{H}), M), \forall X \in \mathcal{g}, \forall Y \in \mathcal{H}, \forall u \in U(\mathcal{g}), \\ (a(X)\varphi)(u) &= X(\varphi(u)) \\ (b(X)\varphi)(u) &= \sum_i (\text{ad } j(u'_i)(X))(\varphi(u''_i)) \\ (\rho(Y)\varphi)(u) &= \varphi(uY) \\ (\lambda(Y)\varphi)(u) &= -\varphi(Yu) \\ ((\lambda + a)(Y)\varphi)(u) &= Y(\varphi(u)) - \varphi(Yu) \end{aligned}$$

Les endomorphismes θ et θ' de $\text{Hom}_F(U(\mathcal{H}), M)$ définis par:

$$\begin{aligned} (\theta(\varphi))(u) &= \sum_i j(u'_i)\varphi(u''_i) \\ (\theta'(\varphi))(u) &= \sum_i u'_i\varphi(u''_i) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes inverses et on a

$$\begin{aligned} \theta \circ a(X) &= b(X) \circ \theta \\ \theta \circ \rho(Y) &= (\rho + a)(Y) \circ \theta \\ \theta \circ (\lambda + a)(Y) &= \lambda(Y) \circ \theta. \end{aligned}$$

Posons $R(\mathcal{H}, M) = \{\varphi \in \text{Hom}_F(U(\mathcal{H}), M) / \dim(\lambda + a)(U(\mathcal{H})) < \infty\}$ et $R(\mathcal{H}) =$

$R(\mathfrak{h}, F)$. On a une inclusion naturelle $R(\mathfrak{h}) \otimes M \hookrightarrow \text{Hom}_F(U(\mathfrak{h}), M)$. On en déduit le

LEMME B.1.1 ([dC] Lemme 2.6.1). θ est une bijection de $R(\mathfrak{h}, M)$ sur $R(\mathfrak{h}) \otimes M$ dont l'inverse est θ' .

Considérons la cohomologie $H^p(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}, M))$ du $\mathfrak{h}$ -module $R(\mathfrak{h}, M)$ pour l'action ρ ; elle est munie d'une structure de $\mathfrak{g}$ -module induite par a et d'une structure de $\mathfrak{h}$ -module induite par $\lambda + a$, car a et $\lambda + a$ commutent à ρ .

LEMME B.1.2 ([dC] Corol. 2.6.2, [D - V], [Wi]). $\forall p \geq 0$, on a un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules

$$\Gamma^p(\mathfrak{h}, M) = H^p(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}, M)).$$

Démonstration. C'est vrai pour $p = 0$. On procède alors de façon standard par récurrence sur p à l'aide des suites exactes longues associées à une suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow Q \rightarrow 0$ où I est un $\mathfrak{g}$ -module injectif; en effet le lemme B.1.1 prouve que le foncteur $M \rightarrow R(\mathfrak{h}, M)$ est exact et que $R(\mathfrak{h}, I)$ est un $\mathfrak{h}$ -module injectif (pour ρ) (on rappelle que I est un $\mathfrak{h}$ -module injectif, que $R(\mathfrak{h})$ est un $\mathfrak{h}$ -module localement fini (pour ρ) et que le produit tensoriel d'un $\mathfrak{h}$ -module injectif et d'un $\mathfrak{h}$ -module localement fini est encore injectif).

REMARQUE. Le même argument prouve que l'action a de $\mathfrak{g}$ sur $H^p(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}, M))$ restreinte à $\mathfrak{h}$ coïncide avec $\lambda + a$ (i.e. que l'action λ de $\mathfrak{h}$ sur cet espace est nulle).

On note $\text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M) = \{u \in U(\mathfrak{g}) / \forall m \in M \text{ } um = 0\}$.

LEMME B.1.3. $\forall p \geq 0 \text{ } \text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M) \subset \text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\Gamma^p(\mathfrak{h}, M))$.

Démonstration. C'est bien connu, on raisonne comme en B.1.2.

Soient $m = \dim \mathfrak{h}$ et $\delta = \delta_{\mathfrak{h}}$ le caractère de $\mathfrak{h}$ dans $\Lambda^m(\mathfrak{h})^*$:

$$\forall Y \in \mathfrak{h} \quad \delta(Y) = -\text{tr}(\text{ad}_{\mathfrak{h}}(Y)).$$

DEFINITION: On pose $\forall p \geq 0 \text{ } L_p(\mathfrak{h}, M) = H_p(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}, M) \otimes \Lambda^m(\mathfrak{h})^*)$ où l'homologie est calculée pour l'action $\rho + \delta$. Cet espace est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$ -module induite par a et de $\mathfrak{h}$ -module induite par $\lambda + a$.

LEMME B.1.4. (a) $L_0(\mathfrak{h}, \cdot)$ est un foncteur exact à droite de la catégorie des $\mathfrak{g}$ -modules dans celle des $\mathfrak{g}$ -modules $\mathfrak{h}$ -localement finis.

(b) $L_q(\mathfrak{h}, \cdot)$ est son $q^{\text{ème}}$ foncteur dérivé.

(c) L'action $\lambda + a$ de $\mathfrak{h}$ dans $L_q(\mathfrak{h}, M)$ est la restriction de l'action a de $\mathfrak{g}$.

(d) On a un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules $\forall p \geq 0 \text{ } \Gamma^p(\mathfrak{h}, M) \simeq L_{m-p}(\mathfrak{h}, M)$.

Démonstration. (d) et (c) se déduisent de la dualité de Poincaré.

(a) s'en déduit.

(b) On procède comme en B.1.2 grâce à une suite exacte courte $0 \rightarrow N \rightarrow$

$L \rightarrow M \rightarrow 0$ où L est un $\mathfrak{g}$ -module libre: de nouveau le lemme B.1.1 prouve que $R(\mathfrak{h}, L) \otimes \Lambda^m(\mathfrak{h})^*$ est un $\mathfrak{h}$ -module libre (pour $\rho + \delta$).

REMARQUE. Ce qui précède prouve que $L_0(\mathfrak{h}, M) = R(\mathfrak{h}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} (M \otimes \Lambda^m(\mathfrak{h})^*)$ où:

- le produit tensoriel sur $U(\mathfrak{h})$ est calculé pour l'action à droite $-\rho$ sur $R(\mathfrak{h})$ et l'action à gauche $a + \delta$ sur $M \otimes \Lambda^m(\mathfrak{h})^*$;
- l'action de $\mathfrak{g}$ est obtenue par passage au quotient de l'action b :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall \varphi \in R(\mathfrak{h}), \quad \forall m \in M, \quad \forall \omega \in \Lambda^m(\mathfrak{h})^*$$

$$(b(X)(\varphi \otimes m \otimes \omega))(u) = \sum_i \varphi(u_i') \otimes (\text{ad } j(u_i'')(X))m \otimes \omega;$$

- cette action restreinte à $\mathfrak{h}$ est égale à l'action $\lambda: \forall Y \in \mathfrak{h}$

$$\lambda(Y)(\varphi \otimes m \otimes \omega) = \lambda(Y)\varphi \otimes m \otimes \omega.$$

B2. Annulation pour $p < d$

THEOREME B.2. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n , $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{e}$ deux sous-algèbres de Lie, N un $\mathfrak{e}$ -module et $d = \dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{e})$.

Alors $\forall p < d$, on a $\Gamma^p(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N) = 0$.

REMARQUES. (1) Soit $Z(N) = \Gamma^d(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N)$ (Z comme Zuckerman) alors Z est un foncteur exact à gauche.

(2) Il est faux, en général, que comme $\mathfrak{h}$ -module $M =: U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N$ soit induit à partir de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{e}$. Exemple: $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Heisenberg de base X, Y, Z avec $[X, Y] = Z$, $\mathfrak{e} = FX$, $\mathfrak{h} = FX + FZ$ et $N = F$ est le $\mathfrak{e}$ -module trivial; alors un calcul prouve que l'action de Z dans $H_0(\mathfrak{e}, M)$ est triviale; si il existait un $\mathfrak{e} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{e}$ -module V tel que $M \simeq U(\mathfrak{h}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} V$ comme $\mathfrak{h}$ -module, l'action de Z dans $H_0(\mathfrak{e}, M)$ serait libre, ce qui n'est pas.

LEMME B.2.1. Avec les notations du théorème B.2. Soient $M = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{e}$.

Il existe une filtration croissante $M = \bigcup_m M^m$ par des sous- $\mathfrak{h}$ -modules ($M^{-1} = 0$) telle que le gradué associé $\text{gr}(M) =: \bigoplus_{m \geq 0} M^m / M^{m-1}$ soit un $\mathfrak{h}$ -module induit à partir de $\mathfrak{k}$.

Plus précisément, on a un isomorphisme de $\mathfrak{h}$ -modules:

$$\text{gr}(M) \simeq U(\mathfrak{h}) \bigotimes_{U(\mathfrak{k})} (S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \mathfrak{e}) \otimes M)$$

où $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \mathfrak{e})$ est l'algèbre symétrique du $\mathfrak{k}$ -module $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \mathfrak{e}$ et $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \mathfrak{e}) \otimes M$ est muni de l'action de $\mathfrak{k}$ produit tensoriel.

Démonstration du Th. B.2. Il suffit de voir que $\forall m \geq 0 \Gamma^p(\mathcal{L}, M^m) = 0$. La suite exacte $\Gamma^p(\mathcal{L}, M^{m-1}) \rightarrow \Gamma^p(\mathcal{L}, M^m) \rightarrow \Gamma^p(\mathcal{L}, M^m/M^{m-1})$ prouve qu'il suffit de montrer que $\Gamma^p(\mathcal{L}, \text{gr}(M)) = 0$. Or, d'après le lemme, il existe un $\mathcal{L}$ -module V tel que $\text{gr}(M) \simeq U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L})} V$. On a alors

$$\begin{aligned} \Gamma^p(\mathcal{L}, \text{gr}(M)) &= H^p(\mathcal{L}, R(\mathcal{L}, \text{gr}(M))) && \text{(lemme B.1.2)} \\ &= H^p\left(\mathcal{L}, R(\mathcal{L}) \otimes \left(U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L})} V\right)\right) && \text{(lemme B.2.2).} \end{aligned}$$

Soit V' le $\mathcal{L}$ -module produit tensoriel $V' = R(\mathcal{L}) \otimes V$; alors le $\mathcal{L}$ -module produit tensoriel $R(\mathcal{L}) \otimes (U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L})} V)$ est isomorphe au $\mathcal{L}$ -module induit $U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L})} V'$. Donc

$$\begin{aligned} \Gamma^p(\mathcal{L}, \text{gr}(M)) &= H^p\left(\mathcal{L}, U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L})} V'\right) \\ &= H^{p-d}(\mathcal{L}, V' \otimes \Lambda^d(\mathcal{L}/\mathcal{L})^*) \quad \text{(lemme de Shapiro).} \end{aligned}$$

En particulier, $\Gamma^p(\mathcal{L}, \text{gr}(M)) = 0$ dès que $p < d$.

Démonstration du Lemme B.2.1. Soient $U^m(\mathcal{G})$ le sous-espace vectoriel de $U(\mathcal{G})$ engendré par $X_1, \dots, X_k$ avec $X_i \in \mathcal{G}$ et $k \leq m$, M^m l'image de $U(\mathcal{L})U^m(\mathcal{G}) \otimes_F N$ dans M , $S^m = S^m(\mathcal{G}/\mathcal{L} + \mathcal{L})$ l'ensemble des éléments de $S(\mathcal{G}/\mathcal{L} + \mathcal{L})$ homogènes de degré m et $\Sigma^m = U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L})} (S^m \otimes N)$. Pour v dans $U^m(\mathcal{G})$, on note $\bar{v} = \overline{\sigma_m}(v) \in S^m$ son symbole principal modulo $(\mathcal{L} + \mathcal{L})S(\mathcal{G})$.

Montrons que l'application $\pi_m: M^m \rightarrow \Sigma^m$ telle que $\forall u_i \in U(\mathcal{L}), v_i \in U^m(\mathcal{G}), n_i \in N$

$$\pi_m\left(\sum_i u_i v_i \otimes n_i\right) = \sum_i u_i \otimes \bar{v}_i \otimes n_i$$

est bien définie. C'est à dire que l'égalité $\sum_i u_i v_i \otimes n_i = 0$ dans M^m implique l'égalité $\sum_i u_i \otimes \bar{v}_i \otimes n_i$ dans Σ^m .

Pour cela, choisissons une base de $\mathcal{G}$ $(X_1, \dots, X_p, \dots, X_q, \dots, X_r, \dots, X_s)$ ($0 \leq p \leq q \leq r \leq s = \dim \mathcal{G}$) de telle sorte que $(X_1, \dots, X_p, X_{q+1}, \dots, X_r)$ est une base de $\mathcal{L}$, $(X_{q+1}, \dots, X_r)$ une base de $\mathcal{L}$ et $(X_{q+1}, \dots, X_r, \dots, X_s)$ une base de $\mathcal{L}$. On peut supposer v_i de la forme $X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s}$ avec $n_1 + \dots + n_s \leq m$.

Si $v_i = Xv'_i$ avec $X \in \mathcal{L}$, on a les égalités

$$\begin{aligned} u_i v_i \otimes n_i &= (u_i X) v'_i \otimes n_i && \text{dans } M^m, \\ u_i \otimes \bar{v}_i \otimes n_i &= (u_i X) \otimes \bar{v}'_i \otimes n_i \quad (=0) && \text{dans } \Sigma^m. \end{aligned}$$

Si $v_i = v'_i X$ avec $X \in \ell$, on a les égalités

$$\begin{aligned} u_i v_i \otimes n_i &= u_i v'_i \otimes X n_i && \text{dans } M^m, \\ u_i \otimes \bar{v}_i \otimes n_i &= u_i \otimes \bar{v}'_i \otimes X n_i \quad (= 0) && \text{dans } \Sigma^m. \end{aligned}$$

On peut donc supposer v_i de la forme $X_{p+1}^{n_{p+1}} \dots X_q^{n_q}$. On pose $m' = n_{p+1} + \dots + n_q \leq m$. On peut supposer u_i de la forme $u_i = X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p} X_{q+1}^{n_{q+1}} \dots X_r^{n_r}$. On pose $m'' = n_{q+1} + \dots + n_r$.

Si $u_i = u'_i X$ avec $X \in \ell$, on a les égalités

$$\begin{aligned} u_i v_i \otimes n_i &= u'_i (\text{ad } X(v_i)) \otimes n_i + u'_i v_i \otimes X n_i && \text{dans } M^m, \\ u_i \otimes \bar{v}_i \otimes n_i &= u'_i \otimes \overline{\text{ad } X(v_i)} \otimes n_i + u'_i \otimes \bar{v}_i \otimes X n_i && \text{dans } \Sigma^m. \end{aligned}$$

L'élément $\text{ad } X(v_i)$ se décompose sur $X_1^{n'_1} \dots X_s^{n'_s}$ avec des termes pour lesquels soit $n'_{p+1} + \dots + n'_q < m'$, soit $n'_{p+1} + \dots + n'_q = m'$ et

$$n'_1 = \dots = n'_p = n'_{q+1} = \dots = n'_r = \dots = n'_s = 0.$$

Donc si $m'' \neq 0$, on peut remplacer l'élément $u_i v_i \otimes n_i$ par une somme d'éléments ayant soit un m' plus petit, soit le même m' mais un m'' plus petit. On se ramène ainsi au cas où $m'' = 0$.

Les u_i sont alors de la forme $X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p}$ et les v_i de la forme $X_{p+1}^{n_{p+1}} \dots X_q^{n_q}$. Dans ce cas, après avoir regroupé les termes semblables, l'égalité $\sum u_i v_i \otimes n_i = 0$ dans M implique $n_i = 0 \ \forall i$, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Ceci prouve que π_m est bien définie.

La formule pour π_m prouve que π_m est un morphisme de $\hbar$ -modules et que $\pi_m(M^{m-1}) = 0$. Donc π_m est un morphisme de $\hbar$ -modules de M^m/M^{m-1} dans Σ^m . Soit $(n_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base de N ; le raisonnement ci-dessus prouve que la famille $(X_1^{n_1} \dots X_q^{n_q} \otimes n_\alpha)$ pour $n_1, \dots, n_q \geq 0, \alpha \in A$, avec $n_{p+1} + \dots + n_q = m$ engendre M^m/M^{m-1} . L'image de cette famille par π_m est une base de Σ^m ; donc π_m est un isomorphisme de M^m/M^{m-1} sur Σ^m .

B3. Γ^p et induction. Le cas $\hbar \subset \ell$

THEOREME B3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n , $\hbar$ et ℓ deux sous-algèbres de Lie et N un ℓ -module. On suppose que $\hbar \subset \ell$. Alors on a un

isomorphisme de $\mathcal{g}$ -modules

$$\Gamma^p\left(\mathfrak{h}, U(\mathcal{g}) \bigotimes_{U(\mathfrak{g})} N\right) = U(\mathcal{g}) \bigotimes_{U(\mathfrak{g})} \Gamma^p(\mathfrak{h}, N)$$

Montrons tout d'abord deux lemmes.

LEMME B.3.1. Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de dimension finie, P un $\mathfrak{h}$ -module muni d'une filtration croissante $P = \bigcup_{m \geq 0} P^m$ par des $\mathfrak{h}$ -sous-modules ($P^{-1} = 0$) et $\text{gr}(P) = \bigoplus_{m \geq 0} (P^m / P^{m-1})$ le $\mathfrak{h}$ -module gradué associé. Alors

(a) $\text{gr}(\Gamma^0(\mathfrak{h}, P)) \subset \Gamma^0(\mathfrak{h}, \text{gr}(P))$.

(b) On a l'équivalence:

P est $\mathfrak{h}$ -localement fini $\Leftrightarrow \text{gr}(P)$ est $\mathfrak{h}$ -localement fini.

Démonstration. (a) C'est clair.

(b) Si $P = \Gamma^0(\mathfrak{h}, P)$ alors $\text{gr}(P) = \Gamma^0(\mathfrak{h}, \text{gr}(P))$ par (a).

Réciproquement, si $\text{gr}(P) = \Gamma^0(\mathfrak{h}, \text{gr}(P))$, on montre par récurrence sur m que $P^m = \Gamma^0(\mathfrak{h}, P^m)$: soient $v \in P^m$ et $Q = U(\mathfrak{h})v$; on a la suite exacte $0 \rightarrow Q \cap P^{m-1} \rightarrow Q \rightarrow Q/Q \cap P^{m-1} \rightarrow 0$. Le module $Q \cap P^{m-1}$ est de type fini donc de dimension finie par hypothèse de récurrence. Le module $Q/Q \cap P^{m-1}$ est de dimension finie donc Q aussi et $v \in \Gamma^0(\mathfrak{h}, P^m)$. C'est ce que l'on voulait.

LEMME B.3.2. Soient $\mathcal{g}$ une algèbre de Lie de dimension n , $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie et I un $\mathfrak{g}$ -module injectif; alors le $\mathcal{g}$ -module $J = U(\mathcal{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} I$ est un $\mathfrak{g}$ -module injectif.

REMARQUE. J n'est, bien sur, pas un $\mathcal{g}$ -module injectif (si $\mathcal{g} \neq \mathfrak{g}$).

Démonstration. Soit J^m la filtration de J par les $\mathfrak{g}$ -modules images de $U^m(\mathcal{g}) \otimes_{\mathbb{F}} I$. Le $\mathfrak{g}$ -module gradué associé $\text{gr}(J)$ est isomorphe à $S(\mathcal{g}/\mathfrak{g}) \otimes I$. Ce $\mathfrak{g}$ -module est injectif (produit tensoriel d'un $\mathfrak{g}$ -module localement fini et d'un $\mathfrak{g}$ -module injectif). On en déduit par récurrence sur m que J^m est injectif. Donc J est un $\mathfrak{g}$ -module injectif.

Démonstration du théorème B.3. Si $p = 0$. Soit M^m la filtration de $M = U(\mathcal{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} N$ par les $\mathfrak{g}$ -modules images de $U^m(\mathcal{g}) \otimes N$. Le $\mathfrak{g}$ -module gradué associé $\text{gr}(M)$ est isomorphe à $S(\mathcal{g}/\mathfrak{g}) \otimes N$. Soient $N' = \Gamma^0(\mathfrak{h}, N)$ et $M' = U(\mathcal{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} N'$. On a $\text{gr}(N') = S(\mathcal{g}/\mathfrak{g}) \otimes N'$. Donc $M' \subset \Gamma^0(\mathfrak{h}, M)$ (Lemme B.3.1b). Pour montrer que cette inclusion est une égalité, il suffit de le montrer au niveau des gradués. Or

$$\text{gr}(M') \subset \text{gr}(\Gamma^0(\mathfrak{h}, M)) \subset \Gamma^0(\mathfrak{h}, \text{gr}(M)) = S(\mathcal{g}/\mathfrak{g}) \otimes N' = \text{gr}(M').$$

Donc ces inclusions sont des égalités.

Si $p > 0$. Le foncteur $N \rightarrow U(\mathcal{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} N$ est exact et, si I est un $\mathfrak{g}$ -module

injectif, on a $\Gamma^p(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} I) = 0 \ \forall p > 0$ (Lemme B.3.2). Donc le foncteur $\Gamma^p(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \cdot)$ est le $p^{\text{ème}}$ foncteur dérivé du foncteur $\Gamma^0(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \cdot)$. De même, $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \Gamma^p(\mathfrak{h}, \cdot)$ est le $p^{\text{ème}}$ foncteur dérivé du foncteur $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \Gamma^0(\mathfrak{h}, \cdot)$. D'où l'égalité annoncée.

C. Foncteurs dérivés des vecteurs $\mathfrak{h}$ -finis: le cas résoluble

On garde les notations de B.

C1. Injectivité de $R(\mathfrak{h})$

LEMME C.1 ([Do]). *Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie résoluble alors $R(\mathfrak{h})$ est un $\mathfrak{h}$ -module injectif (pour ρ et λ).*

Démonstration. Voir [Do] Proposition 2.2.2 et [dC] Corollaire 3 de 3.2.

COROLLAIRE ([dC] Corollaire 4 de 3.2) *Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie résoluble et M un $\mathfrak{h}$ -module localement fini, alors on a $\forall p > 0 \ \Gamma^p(\mathfrak{h}, M) = 0$.*

Démonstration. Les Lemmes B.1.2 et B.1.1 donnent $\Gamma^p(\mathfrak{h}, M) = H^p(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}, M)) = H^p(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}) \otimes M)$ qui est nul pour $p > 0$ car $R(\mathfrak{h}) \otimes M$ est un $\mathfrak{h}$ -module injectif (produit tensoriel d'un module injectif et d'un module localement fini).

C2. Annulation pour $p > d$

PROPOSITION C.2. *Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie résoluble, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Lie, $d = \dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{k})$ et M un $\mathfrak{h}$ -module $\mathfrak{k}$ -localement fini; alors on a $\forall p > d \ \Gamma^p(\mathfrak{h}, M) = 0$.*

REMARQUE. Lorsque $\mathfrak{k}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$, cela résulte immédiatement de ([dC] Corollaire 1 de 3.4).

Démonstration. Les Lemmes B.1.2 et B.1.1 donnent $\Gamma^p(\mathfrak{h}, M) = H^p(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}) \otimes M)$. La suite spectrale de Hochschild-Serre associée à la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ a pour terme $E_1^{pq} = H^q(\mathfrak{k}, \Lambda^p(\mathfrak{h}/\mathfrak{k})^* \otimes R(\mathfrak{h}) \otimes M)$ et converge vers $E_\infty^{pq} = \text{gr}(H^n(\mathfrak{h}, R(\mathfrak{h}) \otimes M))$ (Corollaire du Théorème 2 de [H-S]). Or $R(\mathfrak{h})$ est un $\mathfrak{k}$ -module injectif (Lemme C.1) et $\Lambda^p(\mathfrak{h}/\mathfrak{k})^* \otimes M$ est un $\mathfrak{k}$ -module localement fini, donc leur produit tensoriel est un $\mathfrak{k}$ -module injectif et $\forall q > 0$ on a $E_1^{pq} = 0$. On en déduit $\forall n > d \ \Gamma^n(\mathfrak{h}, M) = 0$.

THEOREME C.2. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n , $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{e}$ deux sous-algèbres de Lie, $d = \dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{e})$ et N un $\mathfrak{e}$ -module. On suppose que $\mathfrak{h}$ est résoluble et que N est $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{e})$ -localement fini. Alors, $\forall p > d$, on a $\Gamma^p(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N) = 0$.*

Démonstration. Appliquer la proposition à $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{e}$ et $M = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N$.

REMARQUE. Soit $Z(N) = \Gamma^d(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N)$. Ce qui précède prouve que (lorsque $\mathfrak{h}$ est résoluble) le foncteur Z est exact de la catégorie des $\mathfrak{e}$ -modules $\mathfrak{k}$ -localement finis dans la catégorie des $\mathfrak{g}$ -modules $\mathfrak{h}$ -localement finis.

Soient $\hat{\mathfrak{k}} = (\mathfrak{k}/[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}])^*$, $\hat{\mathfrak{k}}_1 = (\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$ et $\hat{\mathfrak{k}}_2 = \hat{\mathfrak{k}} - \hat{\mathfrak{k}}_1$; $\hat{\mathfrak{k}}_1$ est l'ensemble des poids de $\mathfrak{k}$ qui sont restrictions de poids de $\mathfrak{h}$ (par exemple, les poids de l'action adjointe de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{h}$ sont dans $\hat{\mathfrak{k}}_1$); on peut donc écrire $N = N_1 \oplus N_2$ où N_i sont des sous $\mathfrak{e}$ -modules dont les poids, comme $\mathfrak{k}$ -modules, sont dans $\hat{\mathfrak{k}}_i$, $i = 1, 2$.

Le foncteur Z a la propriété de fidélité suivante: $Z(N_2) = 0$ et, si $N_1 \neq 0$, on a $Z(N_1) \neq 0$.

En effet, puisque N est $\mathfrak{k}$ -localement fini, la filtration M^m sur $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{e})} N$ (Lemme B.2.1) induit une filtration sur $Z(N)$ telle que (Théorème B.2 et C.2)

$$\begin{aligned} \text{gr}(Z(N)) &= \Gamma^d\left(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{h}) \bigotimes_{U(\mathfrak{k})} (S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \mathfrak{e}) \otimes N)\right) \\ &= H^0(\mathfrak{k}, R(\mathfrak{h}) \otimes W) \end{aligned}$$

où W est le $\mathfrak{k}$ -module localement fini $W = S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \mathfrak{e}) \otimes N \otimes \Lambda^d(\mathfrak{h}/\mathfrak{k})^*$ (c.f. la démonstration du Théorème B.2). Donc $Z(N)$ est non nul si et seulement si W (ou N) possède un vecteur propre sous $\mathfrak{k}$ dont le poids est dans $\hat{\mathfrak{k}}_1$. Ce qui prouve notre assertion.

C3. Γ^p et induction: le cas $\mathfrak{h} + \mathfrak{e} = \mathfrak{g}$

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n , $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{e}$ deux sous-algèbres de Lie et N un $\mathfrak{e}$ -module; on note $I_{\mathfrak{e}, \mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(N) = \Gamma^0(\mathfrak{h}, \text{Hom}_{U(\mathfrak{e})}(U(\mathfrak{g}), N))$ le $\mathfrak{g}$ -module "coïnduit $\mathfrak{h}$ -fini" à partir de N .

THEOREME C.3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n , $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{e}$ deux sous-algèbres de Lie. On suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{e}$ et que $\mathfrak{h}$ est résoluble. Soient $d = \dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{e})$ et $\Lambda^* = \Lambda^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{e})^*$: c'est un $\mathfrak{e}$ -module de dimension 1.

Alors, pour tout $\mathfrak{e}$ -module N , on a un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules: $\forall p \geq 0$,

$$\Gamma^p\left(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \bigotimes_{U(\mathfrak{e})} N\right) \simeq I_{\mathfrak{e}, \mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\Gamma^{p-d}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{e}, N \otimes \Lambda^*)).$$

REMARQUES. (1) Si $\mathfrak{h}$ n'est pas résoluble, ce résultat n'est plus vrai. Exemple: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2)$ de base H, X, Y avec $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ et $[X, Y] = H$,

ℓ = le Borel de base H , X et $N = F_\lambda$ est le caractère de ℓ qui vaut λ sur H ($\lambda \in F$). Dans ce cas, le $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ -module $R(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\bigoplus_{n \geq 0} V_n \otimes V_n$ où V_n est le $\mathfrak{g}$ -module simple de dimension $n + 1$, $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\ell)} N$ est le module de Verma de plus haut poids λ et $d = 1$. On a

$$\begin{aligned} \Gamma^3\left(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\ell)} N\right) &= \bigoplus_{n \geq 0} H^3\left(\mathfrak{g}, V_n \otimes \left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\ell)} F_\lambda\right)\right) \otimes V_n \\ &\quad \text{(Lemmes B.1.1 et B.1.2)} \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} H_0\left(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\ell)} (V_n \otimes F_\lambda)\right) \otimes V_n \\ &\quad \text{(dualité de Poincaré)} \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} H_0(\ell, V_n \otimes F_\lambda) \otimes V_n \quad \text{(Lemme de Shapiro)} \\ &\begin{cases} = V_\lambda & \text{si } \lambda \in \mathbb{N} \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, $\Gamma^2(\mathfrak{h} \cap \ell, N \otimes \Lambda^*) = 0$ car $\mathfrak{h} \cap \ell$ est résoluble (Corollaire C.1). On n'a donc pas, en général, l'égalité.

(2) Sous les hypothèses du Théorème C.3, on a aussi un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules, $\forall p \geq 0$: $\Gamma^p(\mathfrak{h}, \text{Hom}_{U(\ell)}(U(\mathfrak{g}), N)) \simeq I_{\ell, \mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\Gamma^p(\mathfrak{h}, N))$. Cela résulte du Lemme C.3.1(a) pour $p = 0$ et du Lemme C.3.2 pour $p > 0$.

Démonstration. Grâce au Lemme B.1.4(d), le théorème est une conséquence de la:

PROPOSITION C.3. *Sous les hypothèses du théorème C.3. on a un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ -module, $\forall q \geq 0$:*

$$L_q\left(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\ell)} N\right) \simeq I_{\ell, \mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(L_q(\mathfrak{h} \cap \ell, N \otimes \Lambda^*)).$$

Montrons tout d'abord quelques lemmes. On pose $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \cap \ell$, $M = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\ell)} N$ ($\simeq U(\mathfrak{h}) \otimes_{U(\ell)} N$ comme $\mathfrak{h}$ -module), $N' = N \otimes \Lambda^*$ le ℓ -module produit tensoriel, $m = \dim \mathfrak{h}$ et $k = \dim \ell$. Pour φ dans $R(\mathfrak{h})$, on note $\varphi_{\mathfrak{h}}$ ou $\varphi|_{\mathfrak{h}}$ l'élément de $R(\mathfrak{h})$ restriction de φ à $U(\mathfrak{h})$.

LEMME C.3.1. *Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de dimension m , $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Lie et V un $\mathfrak{k}$ -module.*

(a) *On a l'égalité $I_{\mathfrak{k}, \mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}}(V) = I_{\mathfrak{k}, \mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}}(\Gamma^0(\mathfrak{k}, V))$.*

(b) *On regarde $R(\mathfrak{h})$ (et $R(\mathfrak{k})$) comme un $\mathfrak{h}$ (et $\mathfrak{k}$)-module pour l'action ρ . Alors on a un isomorphisme de $\mathfrak{h}$ -modules $\mu: R(\mathfrak{h}) \simeq I_{\mathfrak{k}, \mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}}(R(\mathfrak{k}))$ donné par $(\mu(\varphi))(u) = (\rho(u)\varphi)_{\mathfrak{k}} \forall u \in U(\mathfrak{h}), \varphi \in R(\mathfrak{h})$.*

Démonstration. (a) Soient $\varphi \in I_{\ell, \hbar}^{\ell}(V)$ et $u \in U(\hbar)$, il faut montrer que $\varphi(u) \in \Gamma^0(\ell, V)$. Soit $m \geq 0$ tel que $u \in U^m(\hbar)$. On a

$$U(\ell)(\varphi(u)) = \varphi(U(\ell)u) \subset \varphi(U(\ell)U^m(\hbar)) = \varphi(U^m(\hbar)U(\ell)) = (U(\ell)\varphi)(U^m(\hbar))$$

qui est de dimension finie car $\dim(U(\ell)\varphi) < \infty$. Donc $\varphi(u) \in \Gamma^0(\ell, V)$.

(b) Le morphisme $\mu': U(\hbar)^* \rightarrow \text{Hom}_{U(\ell)}(U(\hbar), U(\ell)^*)$ donné par $(\mu'(\varphi))(u) = (\rho(u)\varphi)_{\ell}$ est un isomorphisme de $\hbar$ -modules. D'après (a) μ est la restriction de μ' aux vecteurs $\hbar$ -finis. Donc μ est un isomorphisme.

LEMME C.3.2 ([dC] Lemme 3.3.2). *Sous les hypothèses du Théorème C.3, le foncteur $I_{\ell, \hbar}^{\ell}$ est un foncteur exact de la catégorie des ℓ -modules $\hbar$ -localement finis dans celle des $\mathfrak{g}$ -modules $\hbar$ -localement finis.*

Démonstration. L'égalité $U(\mathfrak{g}) = U(\ell) \otimes_{U(\ell)} U(\hbar)$ prouve que, comme $\hbar$ -module, $I_{\ell, \hbar}^{\ell}(N) = I_{\ell, \hbar}^{\ell}(N) = H^0(\ell, R(\hbar) \otimes N)$. Soit $0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0$ une suite exacte de ℓ -modules $\hbar$ -localement finis. Comme $\hbar$ est résoluble, $R(\hbar)$ est un $\hbar$ -module injectif (Lemme C.1) par suite $R(\hbar) \otimes N_1$ est un ℓ -module injectif. Donc la suite exacte de ℓ -modules $0 \rightarrow R(\hbar) \otimes N_1 \rightarrow R(\hbar) \otimes N_2 \rightarrow R(\hbar) \otimes N_3 \rightarrow 0$ est scindée et la suite des ℓ -invariants est encore exacte. C'est ce que l'on voulait.

D'après le lemme B.1.4 et sa remarque, on a

$$L_0(\hbar, M) = R(\hbar) \bigotimes_{U(\hbar)} (M \otimes \Lambda^m(\hbar)^*), \quad \text{l'action de } \mathfrak{g} \text{ est notée } b; \text{ et}$$

$$L_0(\ell, N') = R(\ell) \bigotimes_{U(\ell)} (N' \otimes \Lambda^m(\ell)^*), \quad \text{l'action de } \ell \text{ est aussi notée } b.$$

LEMME C.3.3. *Sous les hypothèses du Théorème C.3 et avec les notations ci-dessus.*

(a) *La formule $\mu_N(\varphi \otimes (1 \otimes n) \otimes \omega) = \varphi_{\ell} \otimes (n \otimes \omega_1) \otimes \omega_2$, $\forall \varphi \in R(\hbar)$, $n \in N$, $\omega = \omega_1 \otimes \omega_2 \in \Lambda^m(\hbar)^*$ où $\omega_1 \in \Lambda^*$, $\omega_2 \in \Lambda^k(\ell)^*$ et 1 est l'unité de $U(\hbar)$, définit un morphisme de ℓ -modules μ_N de $L_0(\hbar, M)$ dans $L_0(\ell, N')$.*

(b) *Le morphisme de $\mathfrak{g}$ -modules ν_N de $L_0(\hbar, M)$ dans $I_{\ell, \hbar}^{\ell}(L_0(\ell, N'))$ qui se déduit de μ_N par propriété universelle est un isomorphisme.*

Démonstration. (a) On note δ le caractère de $\hbar$ dans $\Lambda^m(\hbar)^*$, δ' celui de ℓ dans $\Lambda^k(\ell)^*$ et δ'' celui de ℓ dans $\Lambda^d(\mathfrak{g}/\ell)^*$. Soient $u \in U(\hbar)$ et $u^{\delta} = \sum_i u_i \delta(j(u_i''))$; l'application $u \rightarrow u^{\delta}$ est l'isomorphisme d'algèbre de $U(\hbar)$ sur lui-même tel que $\forall Y \in \hbar \quad Y^{\delta} = Y - \delta(Y)$.

On a dans $L_0(\hbar, M)$:

$$\varphi \otimes (u \otimes n) \otimes \omega = \varphi \otimes u^{\delta}((1 \otimes n) \otimes \omega) = (\rho(j(u^{\delta}))\varphi) \otimes (1 \otimes n) \otimes \omega.$$

Donc

$$\mu_N(\varphi \otimes (u \otimes n) \otimes \omega) = (\rho(j(u^{\delta}))\varphi)_{\ell} \otimes (n \otimes \omega_1) \otimes \omega_2.$$

Cette formule a un sens sur $R(\mathcal{H}) \otimes U(\mathcal{H}) \otimes N \otimes \Lambda^m(\mathcal{H})^*$; on veut montrer qu'elle passe au quotient sur $L_0(\mathcal{H}, M)$, c'est à dire que:

$$(i) \quad \forall Y \in \mathcal{H} \quad \mu_N(\rho(Y)\varphi \otimes u \otimes n \otimes \omega + \varphi \otimes Yu \otimes n \otimes \omega + \varphi \otimes u \otimes n \otimes \delta(Y)\omega) = 0$$

$$(ii) \quad \forall Z \in \mathcal{H} \quad \mu_N(\varphi \otimes uZ \otimes n \otimes \omega - \varphi \otimes u \otimes Zn \otimes \omega) = 0.$$

Or, on a, dans $L_0(\mathcal{H}, N')$

$$\begin{aligned} \mu_N(\varphi \otimes Yu \otimes n \otimes \omega) &= -(\rho(j(u^\delta))(\rho(Y) + \delta(Y))\varphi)|_{\mathcal{H}} \otimes n \otimes \omega_1 \otimes \omega_2 \\ &= -\mu_N(\rho(Y)\varphi \otimes u \otimes n \otimes \omega + \varphi \otimes u \otimes n \otimes \delta(Y)\omega) \\ \mu_N(\varphi \otimes uZ \otimes n \otimes \omega) &= -((\rho(Z) + \delta(Z))(\rho(j(u^\delta))\varphi)|_{\mathcal{H}} \otimes n \otimes \omega_1 \otimes \omega_2 \\ &= (\rho(j(u^\delta))\varphi)|_{\mathcal{H}} \otimes Zn \otimes \omega_1 \otimes \omega_2 \\ &\quad (\text{car } \delta(Z) = \delta'(Z) + \delta''(Z)) \\ &= \mu_N(\varphi \otimes u \otimes Zn \otimes \omega). \end{aligned}$$

Ce qui prouve (i) et (ii). Donc μ_N est bien défini.

Montrons que μ_N est un morphisme de ℓ -modules. Fixons $X \in \mathcal{g}$. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathcal{g}$ telle que $(X_1, \dots, X_l)$ est une base de ℓ et $X_{l+1}, \dots, X_n$ sont dans $\mathcal{H}$; c'est possible car $\mathcal{g} = \mathcal{H} + \ell$. On définit $\alpha_{pq}^r \in F$, $c^p \in R(\mathcal{g})$, $G^p \in R(\mathcal{g}, U(\mathcal{g}))$, $H^p \in R(\mathcal{H}, U(\mathcal{H}))$, $K^p \in R(\mathcal{H}, U(\mathcal{H}))$ par les formules: $\forall v \in U(\mathcal{g})$, $u \in U(\mathcal{H})$, $u' \in U(\mathcal{H})$

$$[X_p, X_q] = \sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_{pq}^r X_r \quad (1)$$

$$\text{ad } v(X) = \sum_{1 \leq p \leq n} c^p(v) X_p \quad (2)$$

$$G^p(v) = \sum_i v'_i c^p(j(v''_i)) \quad (3)$$

$$H^p(u) = G^p(u) \quad (4)$$

$$K^p(u') = G^p(u') \quad (5)$$

On a alors les formules $\forall m \in M$

$$b(X)(\varphi \otimes m \otimes \omega) = \sum_{1 \leq p \leq n} \varphi \circ H^p \otimes X_p m \otimes \omega \quad (6)$$

$$(\varphi \circ H^p)|_{\mathcal{H}} = \varphi_{\mathcal{H}} \circ K^p \quad (7)$$

$$c^q(X_p v) = \sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_{pr}^q c^r(v) \quad (8)$$

$$G^q(v X_p) = G^q(v) X_p - \sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_{pr}^q G^r(v) \quad (9)$$

$$\rho(X_p)(\varphi \circ H^p) = (\rho(X_p)\varphi) \circ H^p - \sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_{pr}^p \varphi \circ H^r \quad \forall p \geq l+1 \quad (10)$$

En outre, si $X \in \ell$, on a $\forall \psi \in R(\mathcal{K}), n' \in N'$

$$K^p = 0 \quad \forall p \geq l+1 \quad (11)$$

$$b(X)(\psi \otimes n' \otimes \omega_2) = \sum_{1 \leq r \leq l} \psi \circ K^r \otimes X_r n' \otimes \omega_2 \quad (12)$$

$$\delta''(X_r) = \sum_{l+1 \leq p \leq n} \alpha_{pr}^p \quad \forall r \leq l \quad (13)$$

(7), (11) et (13) sont clairs; (6) et (12) se déduisent de (2) et (3) et de la remarque du Lemme B.1.4; (8) se déduit de (1) et (2), (9) et (10) s'en déduisent.

On peut alors calculer, pour $X \in \ell$, grâce à (6) et (10),

$$\begin{aligned} b(X)(\varphi \otimes (1 \otimes n) \otimes \omega) &= \sum_{1 \leq p \leq l} \varphi \circ H^p \otimes 1 \otimes X_p n \otimes \omega + \\ &+ \sum_{l+1 \leq p \leq n} \left(-\delta(X_p)\varphi \circ H^p - (\rho(X_p)\varphi) \circ H^p + \right. \\ &\left. + \sum_{1 \leq r \leq n} \alpha_{pr}^r \varphi \circ H^r \right) \otimes 1 \otimes n \otimes \omega \end{aligned}$$

D'où, en utilisant successivement (7) et (11), (13), (12):

$$\begin{aligned} \mu_N(b(X)(\varphi \otimes (1 \otimes n) \otimes \omega)) &= \sum_{1 \leq p \leq l} \varphi \circ K^p \otimes (X_p n \otimes \omega_1) \otimes \omega_2 + \\ &+ \left(\sum_{1 \leq r \leq l} \left(\sum_{l+1 \leq p \leq n} \alpha_{pr}^r \right) \varphi \circ H^r \right) \otimes n \otimes \omega_1 \otimes \omega_2 \\ &= \sum_{1 \leq p \leq l} \varphi \circ K^p \otimes (X_p n \otimes \omega_1 + n \otimes \delta''(X_p)\omega_1) \otimes \omega_2 \\ &= b(X)(\varphi \otimes (n \otimes \omega_1) \otimes \omega_2) = b(X)(\mu_N(\varphi \otimes (1 \otimes n) \otimes \omega)) \end{aligned}$$

Donc, $\forall X \in \ell, \mu_N \circ b(X) = b(X) \circ \mu_N$; μ_N est un morphisme de ℓ -modules.

(b) Comme $L_0(\mathcal{K}, M)$ est un $\mathcal{G}$ -module $\mathcal{K}$ -localement fini, le morphisme μ_N induit, par propriété universelle de la coinduction, un morphisme de $\mathcal{G}$ -modules $v_N: L_0(\mathcal{K}, M) \rightarrow I_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}^{\mathcal{G}}(L_0(\mathcal{K}, N'))$ qui est donné par la formule, $\forall x \in L_0(\mathcal{K}, M), v \in U(\mathcal{G}), (v_N(x))(v) = \mu_N(vx)$. En fait v_N définit un morphisme de foncteurs $v: L_0(\mathcal{K}, U(\mathcal{G}) \otimes_{U(\mathcal{G})} \cdot) \rightarrow I_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}^{\mathcal{G}}(L_0(\mathcal{K}, \cdot \otimes \Lambda^*))$. Montrons que v est un isomorphisme.

Il suffit de voir que v_N est un isomorphisme de $\mathcal{K}$ -modules. On peut supposer

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}$. D'après les Lemmes B.1.4 et C.3.2 les foncteurs $L_0(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{h}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} \cdot)$ et $I_{\mathfrak{h}, \mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}}(L_0(\mathfrak{h}, \cdot \otimes \Lambda^*))$ sont exacts à droite; il suffit donc de le voir pour N un $\mathfrak{k}$ -module libre. Ces foncteurs commutent à la somme directe, il suffit donc de le voir pour $N = U(\mathfrak{k})$.

Dans ce cas, $N' = U(\mathfrak{k}) \otimes \Lambda^d(\mathfrak{h}/\mathfrak{k})^*$, $M = U(\mathfrak{h})$,

$$L_0(\mathfrak{h}, M) = R(\mathfrak{h}) \bigotimes_{U(\mathfrak{k})} (U(\mathfrak{h}) \otimes \Lambda^m(\mathfrak{h})^*) \simeq R(\mathfrak{h}) \otimes \Lambda^m(\mathfrak{h})^*$$

et

$$L_0(\mathfrak{k}, N') = R(\mathfrak{k}) \bigotimes_{U(\mathfrak{k})} (U(\mathfrak{k}) \otimes \Lambda^m(\mathfrak{k})^*) \simeq R(\mathfrak{k}) \otimes \Lambda^m(\mathfrak{k})^*.$$

L'action de $\mathfrak{h}$ dans $L_0(\mathfrak{h}, M)$ (resp. de $\mathfrak{k}$ dans $L_0(\mathfrak{k}, N')$) est donnée par λ (remarque du Lemme B.1.4; on peut voir directement l'égalité $b = \lambda$ à l'aide d'un calcul analogue à celui mené en (a)), le morphisme μ_N est donné par $\forall \varphi \in R(\mathfrak{h})$, $\omega \in \Lambda^m(\mathfrak{h})^*$, $\mu_N(\varphi \otimes \omega) = \varphi_{\mathfrak{k}} \otimes \omega$, et v_N par $\forall u \in U(\mathfrak{h})$, $(v_N(\varphi \otimes \omega))(u) = (\lambda(u)\varphi)_{\mathfrak{k}} \otimes \omega$. Le Lemme C.3.1(b) prouve alors que v_N est un isomorphisme.

Démonstration de la Proposition C.3. Pour $q = 0$. Le Lemme C.3.3 donne un isomorphisme de foncteurs $L_0(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \cdot) \rightarrow I_{\mathfrak{h}, \mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}}(L_0(\mathfrak{h}, \cdot \otimes \Lambda^*))$.

Pour $q > 0$. Le foncteur $L_q(\mathfrak{h}, \cdot)$ est le $q^{\text{ème}}$ foncteur dérivé du foncteur $L_0(\mathfrak{h}, \cdot)$ (Lemme B.1.4). Le foncteur $N \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} N$ est exact et envoie un $\mathfrak{b}$ -module libre sur un $\mathfrak{g}$ -module libre; donc $L_q(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \cdot)$ est le $q^{\text{ème}}$ foncteur dérivé du foncteur $L_0(\mathfrak{h}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \cdot)$. De même, le Lemme C.3.2 prouve que le foncteur $I_{\mathfrak{h}, \mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}}(L_0(\mathfrak{h}, \cdot \otimes \Lambda^*))$ est le $q^{\text{ème}}$ foncteur dérivé du foncteur $I_{\mathfrak{h}, \mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}}(L_0(\mathfrak{h}, \cdot \otimes \Lambda^*))$. D'où le résultat.

References

- [B-B] A. Beilinson and J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$ -modules, *C.R.A.S. Paris* 292 (1981) p. 15–18.
- [Be 1] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, *Mem. Soc. Math. Fr.* 15 (1984) p. 1–37.
- [Be 2] Y. Benoist, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, *Journ. Funct. Anal.* 59 (1984) p. 211–253.
- [Be 3] Y. Benoist, Modules simples sur une algèbre de Lie nilpotente contenant un vecteur propre pour une sous-algèbre, *Ann. Sc. E.N.S.* (à paraître)
- [C-G-P] E. Corwin, F.P. Greenleaf and R. Penney, A general character formula for irreducible projections on L^2 of a nilmanifold, *Math. Ann.* 225 (1977) p. 21–32.
- [Di] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris (1974).
- [Do] S. Donkin, On the Hopf algebra dual of an enveloping algebra, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 91 (1982) p. 215–224.
- [dC] F. du Cloux, Foncteurs dérivés des vecteurs $\mathfrak{g}$ -finis, appendice dans: “Représentations de longueur finie des groupes de Lie résolubles” *Mem. A.M.S.* 407 (1989) p. 66–76.

- [D-V] M. Duflo and M. Vergne, Sur le foncteur de Zuckerman, *C.R.A.S. Paris* 304 (1987) p. 467–469.
- [Gu] A. Guichardet, Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie, Cedric, Paris (1980).
- [H-S] G. Hochschild, J.P. Serre, Cohomology of the Lie algebras, *Ann. Math.* 57 (1953) p. 591–603.
- [Ki] A.A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Usp. Mat. Nauk.* 17 (1962) p. 57–110.
- [Vo] D. Vogan, Representations of real reductive Lie groups, *Progress in Math.* 15 Birkhäuser (1981).
- [Wi] D. Wigner, Sur l'homologie relative des algèbres de Lie et une conjecture de Zuckerman, *C.R.A.S. Paris* 305 (1987) p. 59–62.