Sur les difféomorphismes d'Anosov affines.

Yves Benoist, Centre de Mathématiques
Université Paris VII

François Labourie, Centre de Mathématiques
URA D.0169 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique

Introduction

0.1 Soit V une variété C^∞ compacte que l'on munit d'une métrique riemannienne auxiliaire. Rappelons la

Définition : ([An]) un difféomorphisme C^∞ $\varphi : V \to V$ est dit *d'Anosov* si il existe une décomposition invariante par φ, du fibré tangent : $TV = E^+ \oplus E^-$ et des réels a, b strictement positifs tel que

$$\forall Z^+ \in E^+ \quad \forall n > 0 \quad \text{on a} \quad ||T\varphi^{-n}(Z^+)|| \leq a||Z^+||e^{-bn}$$
$$\forall Z^- \in E^- \quad \forall n > 0 \quad \text{on a} \quad ||T\varphi^{n}(Z^-)|| \leq a||Z^-||e^{-bn}$$

Les distributions E^+ (et E^-) sont appelées les distributions instables (et stables) de φ. Elles sont automatiquement continues et intégrables. Les variétés intégrales, appelées feuilles instables (et stables), sont de classe C^∞. En général, ces distributions sont transversalement peu différentiables.

0.2 L'exemple des automorphismes hyperboliques d'une infranilvariété - ou infranilautomorphismes hyperboliques - est bien connu. Rappelons en la construction.

Soient N un groupe de Lie (réel) nilpotent connexe et simplement connexe, $\mathfrak{n}$ son algèbre de Lie, $\mathrm{Aut}(N) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ le groupe des automorphismes de N ou, ce qui est équivalent, de $\mathfrak{n}$, $\mathrm{Aff}(N)$ le groupe produit semi-direct $\mathrm{Aut}(N) \ltimes N$ qui agit naturellement sur N : l'action de N sur lui-même est la translation à gauche.

Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aff}(N)$ qui agit sans point fixe sur N tel que

- le quotient $\Gamma/\Gamma \cap N$ est fini

- la variété $V_0 := \Gamma \setminus N$ est compacte ; la variété V_0 est appelée une *infranilvariété*.

Soit Φ_0 un automorphisme de $\mathfrak{n}$ (ou N) tel que

- $\Phi_0 \Gamma \Phi_0^{-1} = \Gamma$

- les valeurs propres de Φ_0 ont un module différent de 1 ; le difféomorphisme φ_0 de V_0, déduit de Φ_0, est d'Anosov et ses distributions stables et instables sont C^∞ ; ce difféomorphisme est appelé un *infranilautomorphisme hyperbolique* de V_0.

Remarques :

1) Si N est abelien et si Γ est inclus dans N, V_0 est un tore $\mathbf{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et φ_0 un automorphisme linéaire hyperbolique de ce tore.

2) Remarquons qu'il existe toujours une connexion affine C^∞ sur V_0 invariante par φ_0 (*cf.* 4.3.2.) et que la mesure sur V_0, localement égale à la mesure de Haar de N est invariante par φ_0 (car $\det_n(\Phi_0) = \pm 1$). En particulier φ_0 est topologiquement transitif.

0.3 Une vieille conjecture attribuée à Franks affirme que tout difféomorphisme d'Anosov sur une variété compacte est C^0 conjugué à un infranilautomorphisme hyperbolique. Une extension naturelle et classique de cette conjecture est la suivante

Conjecture. *Sur une variété compacte, tout difféomorphisme d'Anosov, dont les feuilletages stable ou instable sont de classe C^∞, est C^∞ conjugué à un infranilautomorphisme hyperbolique.*

Etienne Ghys nous a un jour expliqué une démonstration de cette conjecture dans le cas du tore T^2, reposant sur le théorème d'Herman sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle.

0.4 Nous donnons une réponse affirmative à cette conjecture lorsque φ préserve une connexion affine C^∞ sur V

Théorème. *Soit V une variété C^∞ munie d'une connexion affine C^∞. Soit φ un difféomorphisme d'Anosov topologiquement transitif qui préserve cette connexion et tel que E^+ et E^- soient C^∞. Alors φ est C^∞ conjugué à un infranilautomorphisme hyperbolique.*

Nous en déduisons le

Corollaire. *Soient V une variété symplectique C^∞ et φ un difféomorphisme d'Anosov symplectique tel que E^+ et E^- sont C^∞. Alors φ est C^∞ conjugué à un infranilautomorphisme hyperbolique.*

Voici quelques remarques :

1) La conjugaison C^∞ transforme la connexion (resp. la 2-forme symplectique) en une connexion (resp. une 2-forme) sur l'infranilvariété $V_0 = \Gamma \setminus N$, dont le relevé à N est invariant par translation à gauche : ceci résultera de la démonstration (voir aussi théorème 1).

2) Le point de départ est le théorème 3 de [B-F-L] qui affirme que, sous ces hypothèses, V_0 est un espace localement homogène complet ; ici nous précisons les groupes susceptibles d'apparaître (et apparaissant effectivement, *cf.* 4.3.5.).

3) Lorsque $V = T^2$, le résultat est dû à Avez [Av], lorque $V = T^4$ il est dû à Flaminio et Katok [Fl-Ka]. Lorsque V est de dimension 4, il a été annoncé indépendamment par Flaminio.

4) Pour un résultat analogue pour les flots d'Anosov contact voir [B-F-L].

0.5 Signalons enfin que dans le cours de la démonstration, nous sommes amenés à nous intéresser aux sous-groupes Zariski denses des groupes réductifs. En particulier, grâce à des résultats de Guivarc'h - Raugi et Gol'dsheid - Margulis, nous précisons un résultat classique de Tits (Corollaire A.6).

Nous tenons à remercier Patrick Foulon et Yves Guivarc'h pour de fructueuses conversations.

1. La structure de la démonstration.

La démonstration se fait en trois étapes. Tous d'abord, nous montrons que sur $\widetilde{V}$, le revêtement universel de V, le groupe des difféomorphismes G de $\widetilde{V}$ qui préservent la connexion et les distributions stable et instable est un groupe de Lie qui agit transitivement. Ceci avait été essentiellement démontré dans [B-F-L] et notre section 2 consiste en des rappels de cet article.

Ensuite, nous montrons dans la section 3, qu'un sous-groupe nilpotent simplement connexe et distingué U de G agit transitivement sur $\widetilde{V}$. Cette démonstration fait un moment appel au théorème A.1.

Dans la section 4, nous concluons en montrant le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit (V, ∇) une variété compacte munie d'une connexion, φ un difféomorphisme d'Anosov topologiquement transitif de V qui préserve ∇ et dont les distributions stables et instables sont C^∞. Il existe alors un sous-groupe nilpotent simplement connexe N du groupe des difféomorphismes de $\widetilde{V}$ tel que*

(i) N *préserve* ∇ *ainsi que les distributions stable et instable de* φ.

(ii) N *agit transitivement et librement sur* $\widetilde{V}$.

(iii) N *est normalisé par le groupe fondamental* Γ *de* V *ainsi que par un relevé de* φ.

(iv) $N \cap \Gamma$ *est d'indice fini dans* Γ *et cocompact dans* N.

En corollaire, nous obtenons bien sûr le résultat cité dans l'introduction.

En conclusion, nous rappelons pourquoi nous obtenons ainsi tous les infranilautomorphismes hyperboliques.

En appendice, nous montrons le théorème A.1 et précisons, avec son aide, un résultat de Tits sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie.

Une notation importante : dans toute la suite

Si F est un groupe de Lie, on note $\mathfrak{f}$ son algèbre de Lie et $(F)_e$ la composante connexe de l'identité de F. L'expression "groupe algébrique" signifiera "points réels d'un groupe algébrique défini sur R".

2. Présentation du problème.

Le but essentiel de cette section est de montrer la proposition 2.1.2 qui décrit $\widetilde{V}$ comme un espace homogène. Nous précisons alors nos notations et nous nous intéressons tout particulièrement aux stabilisateurs d'un point et d'une feuille. La proposition 2.2.3 et les remarques qui suivent seront utilisées très souvent dans la suite. L'un des objets fondamentaux est, comme dans [B-F-L], le logarithme de la partie hyperbolique d'une "application premier retour".

Enfin en 2.3, nous précisons en quoi nous pouvons considérer le groupe des transformations affines de $\widetilde{V}$ qui préservent les distributions stable et instable comme un groupe algébrique.

2.1 La variété $\widetilde{V}$ comme espace homogène.

2.1.1. Soit (V, ∇) une variété compacte munie d'une connexion et φ un difféomorphisme d'Anosov affine topologiquement transitif de V dont les distributions stable E^- et instable E^+ sont de classe C^∞.

Soit v_0 un point périodique de φ de période k, un tel point existe toujours ([An], th. 3).

Soit $\widetilde{V}$ le revêtement universel de V, $\tilde{v}_0$ un point de $\widetilde{V}$ relevant v_0, $\widetilde{\varphi}$ un difféomorphisme de $\widetilde{V}$ relevant φ.

On notera $\widetilde{\nabla}$ et $\widetilde{E}^\pm$ les relevés de ∇ et $E^\pm$.

2.1.2. Notre point de départ est la proposition.

Proposition. *Le groupe G des difféomorphismes affines de $\widetilde{V}$ qui préservent $\widetilde{E}^\pm$ est un groupe de Lie qui agit transitivement sur $\widetilde{V}$.*

Cette proposition est une généralisation facile du théorème 3 de [B-F-L]. Nous n'en reproduisons pas la démonstration. Voici la principale modification :

Rappelons que le théorème 3 de [B-F-L] est énoncé pour un difféomorphisme symplectique au lieu de affine : cette situation est plus restrictive car le difféomorphisme est alors automatiquement affine par la connexion de Kanai ([B-F-L], 3.4.4.).

Dans notre nouvelle situation, on montre facilement, en utilisant φ, que les feuilles instables F_v^+ sont totalement géodésiques (*i.e.* $\nabla_{E^+}E^+ \subset E^+$).

Ceci permet de reprendre le même raisonnement bien que l'on ne sache pas si les feuilles F_v^+ sont plates.

La démonstration du théorème 3 de [B-F-L] utilise un théorème de Gromov [Gr] sur les structures rigides. Elle s'appuie sur quelques lemmes préliminaires que nous rappelons dans le paragraphe suivant car nous en ferons un usage constant.

2.2. Le stabilisateur d'un point et d'une feuille.

2.2.1. On notera H le stabilisateur de $\tilde{v}_0$ dans G :

$$H = \{g \in G / g\tilde{v}_o = \tilde{v}_0\}.$$

Par construction, ce groupe contient $\widetilde{\varphi}_k$, le relevé de φ^k ayant $\tilde{v}_0$ comme point fixe. D'après 2.1.2, la variété $\widetilde{V}$ s'identifie à G/H.

Par ailleurs, une transformation affine étant fixée par son 1-jet, l'application de H dans $GL(T_{\tilde{v}_0}\widetilde{V})$, donnée par

$$h \mapsto T_{\tilde{v}_0}h,$$

est injective. Nous identifierons ainsi souvent par la suite H à son image dans $GL(T_{\tilde{v}_0}\widetilde{V})$. Enfin le morphisme de H dans $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ obtenu à l'aide du précédent et de l'identification de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ avec $T_{\tilde{v}_0}\widetilde{V}_0$ est celui obtenu à l'aide de la restriction de la représentation adjointe de G à H.

2.2.2. Notons $\widetilde{F}_{\tilde{v}}$, la feuille instable passant par $\tilde{v}$ dans $\widetilde{V}$ et P^+ le stabilisateur de la feuille $\widetilde{F}^+_{\tilde{v}_0}$. De même, $P^-, \widetilde{F}^-_{\tilde{v}}$.

$$P^{\pm} = \{g \in G,\ g\widetilde{F}^{\pm}_{\tilde{v}_0} = \widetilde{F}^{\pm}_{\tilde{v}_0}\}.$$

Puisque G préserve les distributions $\widetilde{E}^{\pm}$, le groupe H est inclus dans $P^{\pm}$, et $\mathfrak{p}^+/\mathfrak{h}$ s'identifie à $\widetilde{E}^+_{\tilde{v}_0}$.

2.2.3. La proposition suivante, issue de ([B-F-L] 3.4.) résume les propriétés importantes de ces différents groupes et de leurs algèbres de Lie.

Proposition.

(a) Le groupe H vu comme sous-groupe de $GL(T_{\tilde{v}_0}\widetilde{V})$ est un sous-groupe algébrique.

(b) Soit L_0 le logarithme de la partie hyperbolique de la décomposition de Jordan de $T_{\tilde{v}_0}\widetilde{\varphi}_k$ dans $GL(T_{\tilde{v}_0}\widetilde{V})$. Alors L_0 appartient à $\mathfrak{h}$.

(c) Les valeurs propres de L_0 dans $\widetilde{E}^+_{\tilde{v}_0}$ resp. $\widetilde{E}^-_{\tilde{v}_0}$) sont strictement positives (resp. négatives).

(d) On a l'égalité $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{p}^-$ et en particulier, le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de L_0 est inclus dans $\mathfrak{h}$.

(e) Le centre de $\mathfrak{g}$ est nul, et donc le centre Z de G est discret.

2.2.4. Nous utiliserons très souvent un corollaire de (a) et de 2.2.1.

Corollaire. *Soit* Ad *la représentation adjointe de* G *dans* $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$. *Sa restriction à* H *est injective, et* Ad (H) *est un sous-groupe algébrique de* $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

Démonstration : Dans [B-F-L] 2.4.1., on a vu que $\mathfrak{g}$ s'identifie en tant que H-module à un sous espace vectoriel que $T_{\tilde{v}_0}\widetilde{V} \times \ \mathrm{End}(T_{\tilde{v}_0}\widetilde{V})$. On en déduit le corollaire. ▷

2.2.5. Enfin G/H étant simplement connexe H et G ont le même nombre (fini, *cf.* 2.2.4.) de composantes et on a donc $H_e = G_e \cap H$. Pour des raisons analogues $P_e^{\pm} = G_e \cap P^{\pm}$.

2.2.6. Soit $\Gamma = \pi_1(V)$ le groupe fondamental de V que nous voyons agir sur $\widetilde{V}$. Bien sûr, Γ est inclus dans G et

$$V = \Gamma \backslash G/H$$

Nous considérerons également $\Delta =< \widetilde{\varphi}, \Gamma >$, le groupe engendré par $\widetilde{\varphi}$ et Γ, géométriquement c'est le groupe fondamental de la variété obtenue par suspension de φ sur V.

2.3. Des groupes algébriques.

2.3.1. Nous voulons démontrer dans cette section que le groupe $\mathrm{Ad}(G_e)$, l'image de G_e par la représentation adjointe dans $GL(\mathfrak{g})$ est une composante connexe d'un groupe algébrique.

2.3.2. Ce paragraphe est constitué par des rappels de [Ch] § 14.

Soient W un espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{k} \subset \ \mathrm{End}(W)$ une sous-algèbre de Lie.

Proposition, définition. *La sous-algèbre* $\mathfrak{k}$ *est dite* algébrique *si l'une des deux affirmations suivantes équivalentes est satisfaite.*

(i) Il existe un sous-groupe algébrique K *de* $GL(W)$ *dont* $\mathfrak{k}$ *est l'algèbre de Lie.*

(ii) Il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ *de* $\mathfrak{k}$ *telle que pour* $i = 1, \cdots, n$, *soit* X_i *est nilpotent soit* X_i *est semi-simple et les valeurs propres de* X_i *engendrent un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel de dimension un.*

2.3.3. On en déduit alors la

Proposition. *La sous-algèbre ad* $(\mathfrak{g})$ *est algébrique.*

Démonstration : En effet nous pouvons écrire

$$\mathfrak{g} = \underset{i}{\oplus}\, \mathfrak{g}_i$$

où

$$\mathfrak{g}_i = \{X \in \mathfrak{g} / [L_0, X] = iX\}$$

Si i est différent de 0, $\mathrm{ad}(X_i)$ est nilpotent : en effet $\mathrm{ad}(X_i)\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}_{j+i}$.

Par ailleurs, $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}$ (*cf.* (d) de 2.2.3.).

On a donc

$$\mathrm{ad}\ (\mathfrak{g}) = \ \mathrm{ad}\ (\mathfrak{h}) + \sum_{i \neq 0}\ \mathrm{ad}\ (\mathfrak{g}_i)$$

D'après la proposition précédente, on en déduit donc qu'il suffit de montrer que ad $(\mathfrak{h})$ est algébrique. Ce qui provient de 2.2.4. ▷

2.3.4. Il sera par contre difficile de faire comme si G lui-même était algébrique : la présence éventuelle d'un centre infini compliquant sérieusement les choses.

3. Existence d'une structure produit.

Le but de ce chapitre est de montrer la proposition

Proposition 3. *Il existe un sous-groupe distingué nilpotent simplement connexe U de G qui agit transitivement sur $\widetilde{V}$*

Le groupe va apparaître comme (l'image inverse) du radical unipotent de $\mathrm{Ad}(G_e)$. Nous commencerons donc par présenter la décomposition de Levi réductive du groupe $\mathrm{Ad}(G_e)$ (*cf.* 3.1.) et l'on montre que la proposition 3 se ramène à prouver qu'un "petit" espace des feuilles, sur lequel fibre le véritable espace des feuilles, est réduit à un point (3.1.6).

L'esprit de la démonstration est alors très proche de celui de [B-F-L] : les points fixes d'un élément de Δ sur $\widetilde{V}$ se projettent maintenant en des points fixes tous attracteurs (ou tous répulseurs) de cet espace des feuilles (3.2.1). Le but est alors de construire un élément de δ qui va avoir trop de points fixes sur le petit espace des feuilles si celui-ci n'est pas réduit à un point. La construction d'un tel élément, d'un "bon" élément selon 3.4.1, est délicate et repose sur une application du théorème A.1. Signalons à ce stade que l'utilisation du théorème A.1, que nous ignorions à l'époque, permet d'alléger considérablement la démonstration de [B-F-L].

Dans toute cette démonstration apparaît de façon cruciale la caractérisation du petit espace des feuilles comme une variété de drapeaux.

La proposition 3 entraîne l'existence d'une structure produit sur $\widetilde{V}$ ce qui explique le titre mais n'intervient pas dans la démonstration...

3.1. La décomposition de Levi et le petit espace des feuilles.

3.1.1. Nous utiliserons à partir de maintenant la décomposition de Levi-réductive du groupe $\mathrm{Ad}(G_e)$, c'est-à-dire la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathrm{Ad}\ (G_e) = R \ltimes U_0$$

où U_0 est le radical unipotent du groupe (presque) algébrique $\mathrm{Ad}(G_e)$ et R sa partie réductive. Nous choisissons cette décomposition de façon à ce $\mathrm{ad}(L_0)$, qui est un élément hyperbolique, appartienne à $\mathfrak{r}$. Nous noterons enfin π la projection de $\mathrm{Ad}(G_e)$ sur $R =$ Ad $(Ge)/U_0$, et par abus de langage π également la projection de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$ qui s'en déduit.

3.1.2. En anticipant sur la suite révèlons que dans la proposition 3, U sera égal à $(\mathrm{Ad}^{-1}(U_0))_e$.

3.1.3. Considérons maintenant les sous-algèbres $\mathfrak{q}^{\pm} = \pi(\mathfrak{p}^{\pm})$ de $\mathfrak{r}$. Comme dans [B-F-L], un point clef est alors le

Lemme.

(a) les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{q}^{\pm}$ sont paraboliques.

(b) Nous avons l'égalité

$$\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{q}^+ \cap \mathfrak{q}^-$$

Démonstration : identifions $\mathfrak{g}$ et ad $(\mathfrak{g})$ et considérons $\mathfrak{r}$ l'algèbre de Lie de R qui contient L_0.

Notons maintenant pour toute sous-algèbre $\mathfrak{k}$

$$\mathfrak{k}_i = \{X \in \mathfrak{k},\ [L_0, X] = iX\}.$$

Nous avons donc

$$\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{p}^+ \text{ si } i \leq 0$$

$$\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_i$$

Ceci nous permet d'affirmer que la sous-algèbre $\mathfrak{q}^+ = \pi(\mathfrak{p}^+)$ contient la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{r}^+ = \sum_{i\leq 0} \mathfrak{r}_i$. Elle est donc également parabolique [Bo, ch VIII, § 3 n° 4].

Comme $\mathfrak{h}$ est inclus dans $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{p}^-$ on en déduit que $\pi(\mathfrak{h})$ est inclus dans $\pi(\mathfrak{p}^+)\cap\pi(\mathfrak{p}^-)$. Réciproquement, nous savons que $\pi(\mathfrak{p}^+) \cap \pi(\mathfrak{p}^-) = \mathfrak{k}$ contient L_0.

Montrons que $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{h}$.

Considérons donc $\mathfrak{k}_i$ tel que $\mathfrak{k}_i \neq \{0\}$. La sous-algèbre $\pi^{-1}\mathfrak{k}_i$ est stable par l'action adjointe de L_0. Comme $\pi^{-1}(\mathfrak{k}_i) \cap \mathfrak{p}^+ \neq \{0\}$, on en déduit $i \leq 0$, de même $i \geq 0$ et donc $i = 0$. ▷

3.1.4. On est ainsi amené à considérer les normalisateurs Q^+ de $\mathfrak{q}^+$ dans R c'est-à-dire

$$Q^{\pm} = \{g \in R,\ \mathrm{Ad}\ (g)\mathfrak{q}^{\pm} = \mathfrak{q}^{\pm}\}.$$

Les sous-algèbres $\mathfrak{q}^{\pm}$ étant paraboliques, elles sont égales à leurs normalisateurs et donc $Q^{\pm}$ est d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}^{\pm}$. Le groupe $\pi \circ \mathrm{Ad}\ (P_e^+)$ est alors la composante connexe de l'identité de Q^+.

3.1.5. Le lemme 3.1.3 entraîne donc que l'espace R/Q^+ est une variété de drapeaux que nous appellerons *petit espace des feuilles*, petit car le véritable espace des feuilles G/P^+, qui d'après 2.2.6 s'identifie à G_e/P_e^+, fibre au dessus de R/Q^+ d'après 3.1.4...

Par abus de notations, nous noterons π la projection de $\widetilde{V} = G/H$ dans R/Q^+. Elle est par construction G-équivariante.

3.1.6. Nous voulons donc maintenant montrer que les petits espaces des feuilles sont réduits à un point. En effet, ceci entraîne la proposition 3 d'après la

Proposition. *Si les petits espaces des feuilles R/Q^+ et R/Q^- sont réduits à un point alors le sous-groupe nilpotent simplement connexe et distingué $U = (\mathrm{Ad}^{-1}(U_0))_e$, agit transitivement sur $\widetilde{V}$.*

Démonstration : en effet les hypothèses entraînent que $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^+ = \mathfrak{q}^-$. D'après 3.1.(b) on a $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{r}$ et donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{u}$. Ceci entraîne le résultat en remarquant que puisque le centre Z de G est discret, le morphisme Ad de U dans U_0 est un revêtement et donc une bijection. ▷

3.2. Points fixes d'un élément de Δ.

3.2.1. Rappelons, que Δ est le sous-groupe de G engendré par Γ et $\tilde{\varphi}$. Notons par abus de langage π la projection de $\widetilde{V}$ sur le petit espace des feuilles R/Q^+.

Nous voulons démontrer la

Proposition. *Soit δ un élément de Δ relevant une puissance positive de φ et v un point fixe de δ dans $\widetilde{V}$. La projection $\pi(v)$ de v sur R/Q^+ est un point fixe attracteur de δ dont le bassin d'attraction est un ouvert dense.*

DÉMONSTRATION : mettons l'origine de $\widetilde{V}$ en v. Pour n suffisamment grand δ^n est une application contractante de $\widetilde{F}_v^-$ dans elle-même. En particulier, comme la projection de $\widetilde{F}_v^-$ dans R/Q^+ est ouverte, nous en déduisons que $\pi(v)$ est un point fixe attracteur pour δ et que son bassin d'attraction contient $\pi(\widetilde{F}_v^-)$ et en particulier l'orbite de $\pi(v)$ sous Q^-. Ce dernier groupe étant parabolique, nous en déduisons que le bassin d'attraction est dense d'après le lemme de Bruhat. $\triangleright$

3.2.2. Nous avons le

Corollaire. *Soit δ un élément de $\Delta \setminus \{1\}$ et F l'ensemble des points fixes de δ dans $\widetilde{V}$. L'ensemble $\pi(F)$ a alors zéro ou un élément.*

DÉMONSTRATION : en effet, un difféomorphisme ne peut avoir plus d'un point fixe attracteur dont le bassin est dense. $\triangleright$

3.3. L'adhérence de Zariski de $\pi \circ \ \mathrm{Ad}\ (\Delta)$.

3.3.1. Soit $R_1 = \overline{\pi \circ \ \mathrm{Ad}\ (\Delta)}_e$, la composante connexe de l'adhérence de Zariski de $\pi \circ$ Ad (Δ) dans R. Nous avons donc alors comme dans [B-F-L], la proposition

Proposition. *Le groupe R_1 est un groupe réductif qui agit transitivement sur R/Q^+.*

DÉMONSTRATION : en effet, de la densité des feuilles instables pour un difféomorphisme d'Anosov topologiquement transitif, on en déduit que chaque orbite de $\overline{\pi \circ \ \mathrm{Ad}\ (\Delta)}$ sur R/Q^+ est dense. Dès lors comme dans [B-F-L], ceci montre que $\overline{\pi \circ \ \mathrm{Ad}\ (\Delta)}$ agit transitivement et est donc réductif. Ce qui entraîne le résultat pour R_1. $\triangleright$

3.3.2. Soit alors $Q_1^+ = R_1 \cap Q^+$, on en déduit le

Corollaire. *Les deux variétés R_1/Q_1^+ et R/Q^+ sont isomorphes. En particulier $\mathfrak{q}_1^+$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{r}_1$.*

3.3.3. Remarquons que $\mathfrak{r}_1$ contient nécessairement L_0 et que le groupe $G_1 = R_1 \ltimes U$ est la composante connexe d'un groupe algébrique et contient un sous-groupe d'indice fini de Ad (Δ).

3.3.4. Rappelons que nous voulons montrer que $R_1/Q_1^+ = R/Q^+$ est réduit a un point (*cf.* 3.1.6.). Nous supposerons dans la suite que R_1 n'est pas commutatif, puisque dans ce cas le résultat est trivial.

3.4. A la recherche de bons éléments de Δ.

3.4.1. Soit $\mathfrak{r}_1$ l'algèbre de Lie de R_1 que nous voyons comme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ identifiée à ad $(\mathfrak{g})$.

Soit $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{r}_1$ contenant L_0 et la plus déployée (c'est-à-dire contenant un sous-espace de Cartan) et considérons J le centralisateur de $\mathfrak{c}$ dans G :

$$J = \{x \in G / \ \forall Y \in C, \ \text{Ad } (x)Y = Y\}$$

Nous posons alors la

Définition : un élément de G est dit *bon* si il est conjugué à un élément de J_e et différent de l'identité.

Remarquons que puisque $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{h}$, on a toujours $J_e \subset H$ et dès lors, un bon élément a toujours un point fixe dans $\widetilde{V}$. Le but de cette section est de montrer la

Proposition. *Il existe un bon élément dans Δ.*

3.4.2. Posons nous tout d'abord un problème analogue de G_1. Soit I le centralisateur de $\mathfrak{c}$ dans G_1 :

$$I = \{x \in G_1 / \ \forall Y \in \mathfrak{c}, \ \text{Ad } (x)Y = Y\}.$$

Par ailleurs, pour tout x de G_1, notons G_1^x son centralisateur et posons

$$d = \inf_{x \in R_1} \ \dim \mathfrak{g}_1^x$$

Considérons alors

$$R_1^{\text{reg}} = \{x \in R_1 / \ \dim \mathfrak{g}_1^x = d\}$$

Remarquons que si R_1 n'est pas commutatif (ce que nous supposerons, *cf.* 3.3.4.), R_1^{reg} ne contient pas l'identité.

Notre but est de montrer le lemme suivant dont la démonstration n'utilise que la Zariski densité de $\pi \circ$ Ad (Δ).

Lemme. *Il existe un élément δ de Δ tel que* Ad (δ) *soit conjugué à un élément g de I_e vérifiant de plus $\mathfrak{g}_1^g \subset \mathfrak{i}$*

3.4.3. Nous avons besoin du lemme préparatoire :

Lemme. *Soit g un élément de G_1 tel que $\pi(g) \in I \cap R_1^{\mathrm{reg}}$, alors g est conjugué à un élément g_1 de I tel que $\mathfrak{g}_1^{g_1} \subset \mathfrak{i}$.*

Démonstration : remarquons tout d'abord que si $h \in I \cap R_1^{\mathrm{reg}}$, alors $\mathfrak{g}_1^h = \mathfrak{i}$. Ceci suit d'un raisonnement élémentaire. En effet considérons $C = I \cap R_1$, c'est un groupe commutatif (car R_1 est linéaire) d'algèbre de Lie $\mathfrak{c}$ et dont tous les éléments agissent de façon semi-simple sur $\mathfrak{g}_1$ par la représentation adjointe.

Pour tout caractère α de C on peut écrire

$$(\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}}^{\alpha} = \{X \in (\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}} / \ \forall c \in C \ ; \ \mathrm{Ad}(c)X = \alpha(c)X\}.$$

et considérer l'ensemble des poids

$$P = \{\alpha \text{ caractères non triviaux de } C / \ (\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}}^{\alpha} \neq \{0\}\}$$

On a alors

$$(\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{i}_{\mathbb{C}} \underset{\alpha \in P}{\oplus} (\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}}^{\alpha}.$$

L'ensemble R_1^{reg} étant un ouvert de Zariski (et donc un ouvert dense pour la topologie usuelle) invariant par conjugaison, on en déduit que $I \cap R_1^{\mathrm{reg}}$, est non vide (l'ensemble des éléments conjugués à I contenant un ouvert) et que $I \cap R_1^{\mathrm{reg}}$ est égal au complémentaire de la réunion du noyau des poids :

$$I \cap R_1^{\mathrm{reg}} = \{x \in C / \ \forall \alpha \in P, \ \alpha(x) \neq 1\}$$

Ce qui prouve notre assertion. Soit maintenant g un élément de G_1 vu comme sous-groupe de $GL(\mathfrak{g})$. Ecrivons sa décomposition de Jordan

$$g = g^s g^u$$

où g^s est semi-simple et $g^u = \exp(X)$ où $\mathrm{ad}(X)$ est nilpotent.

Comme G_1 est la composante connexe d'un groupe algébrique, on en déduit que g^s et g^u appartiennent tous deux à G_1.

On peut maintenant conjuguer g par un élément de U de façon à obtenir un élément g_1 de décomposition de Jordan

$$g_1 = g_1^s \exp{(X_1)}$$

tel que g_1^s appartienne à R_1. Remarquons que $\pi(g) = \pi(g_1)$.

Par ailleurs, nous savons que $\mathrm{ad}(g_1)(X_1) = X_1$ c'est-à-dire que $X_1 \in \mathfrak{g}_1^{g_1}$. De même nous savons que $\mathfrak{g}_1^{g_1} \subset \mathfrak{g}_1^{g_1^s}$.

En projetant, nous obtenons donc que $D\pi(X_1)$ appartient à $\mathfrak{g}_1^{\pi(g_1)} \cap \mathfrak{r}_1$.

Si maintenant $\pi(g)$ $(= \pi(g_1))$ appartient à $I \cap R_1^{\mathrm{reg}}$, notre remarque initiale entraîne que $D\pi(X_1)$ appartient à $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{c}$. Or $\mathfrak{c}$ ne contient que des éléments semi-simples, ce qui entraîne $D\pi(X_1) = 0$.

En particulier, $g_1^s = \pi(g_1)$ appartient à $I \cap R_1^{\mathrm{reg}}$ et donc $\mathfrak{g}_1^g \subset \mathfrak{g}_1^{g_s} = \mathfrak{i}$. Enfin $X_1 \in \mathfrak{g}_1^g \subset \mathfrak{i}$ et donc $g_1 = \exp(X_1) g_1^s$ appartient à I. $\triangleright$

3.4.4. Démonstration du lemme 3.4.2.

Grâce au lemme précédent c'est une application du théorème A.1. En effet par construction $R_1 = \overline{\pi \circ \mathrm{Ad}\ (\Delta)}_e$, il existe donc un sous-groupe D_1 d'indice fini dans $\pi \circ \mathrm{Ad}\ (\Delta)$ tel que

(i) $D_1 \subset R_1$

(ii) $R_1 = (\overline{D_1})_e$.

Soit p le nombre de composantes connexes de I. D'après A-1, l'ensemble des éléments h-réguliers de D_1 (qui sont automatiquement conjugués à $C = I \cap R_1$) est Zariski dense. Par ailleurs, R_1^{reg} est un ouvert de Zariski. Il existe donc un élément x de D_1 conjugué à un élément de I tel que x^p (et donc aussi x) appartient à R_1^{reg}.

Soit δ' tel que $\pi(\delta') = x$, alors d'après le lemme précédent (appliqué à δ' et δ'^p) on en déduit que $\delta = \delta'^p$ appartient à I_e et vérifie $\mathfrak{g}_1^\delta \subset \mathfrak{i}$. $\triangleright$

3.4.5. Il nous faut maintenant montrer que le lemme 3.4.2 entraîne la proposition 3.4.1. A cause de la présence éventuelle d'un centre infini dans G, cela ne suit pas d'une démarche directe. Soit δ_1 un élément produit par le lemme 3.4.2. Nous allons construire un bon élément de δ_2 en cherchant un élément commutant avec δ_1 et ayant un point fixe.

Comme G/Z s'identifie à $\mathrm{Ad}(G)$ on en déduit qu'il existe un élément z du centre de G tel que $z\delta_1$ soit conjugué à un élément de J_e. c'est-à-dire

$$z\delta_1 \in xJ_ex^{-1}$$

et donc

$$z\delta_1 \in xH_ex^{-1}$$

Le difféomorphisme $z\delta_1$ de $\widetilde{V}$ a donc $\tilde{v}_1 = x\tilde{v}_0$ comme point fixe. Puisque $z\delta_1$ normalise $\pi_1(\Gamma)$, il donne naissance a un difféomorphisme ψ de V. Soit v_1 la projection de $\tilde{v}_1$, montrons alors le

Lemme. *Le point v_1 est périodique pour φ.*

DÉMONSTRATION : remarquons tout d'abord que si g a comme point fixe $x\tilde{v}_0$ dans $\widetilde{V}$, les valeurs propres de la différentielle de g en $x\tilde{v}_0$ sont celles de $\mathrm{Ad}(g)$ sur $\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{h}$ (*cf.* 2.2.1.).

En particulier, les valeurs propres de la différentielle de g en $x\tilde{v}_0$ et en $z^p x\tilde{v}_0$ sont identiques ($z^p x\tilde{v}_0$ étant bien évidemment un point fixe de g).

Par ailleurs, comme $\mathfrak{g}^{z\delta_1} \subset x\mathfrak{j}x^{-1} \subset x\mathfrak{h}x_1^{-1}$ on en déduit que les valeurs propres de $z\delta_1$ en $x\tilde{v}_0$ sont toutes différentes de 1.

En conclusion, les valeurs propres de ψ en v_1 sont identiques à celle de ψ en $z^p v_1$ et sont toutes différentes de 1.

Le point v_1 est donc périodique pour l'action de z (sur V) et donc pour φ. Dans le cas contraire, soit $v_2 = \lim_{i\to\infty} z^{p_i}v_1$, où $z^{p_i}v_1 \neq v_2$ pour tout i. Le point v_2 est alors un point fixe par ψ et, par continuité, les valeurs propres de $D\psi$ en v_2 sont toutes différentes de 1, on obtient ainsi que v_2 est un point fixe isolé et la contradiction. $\triangleright$

3.4.6. Remarquons maintenant que puisque v_1 est périodique par φ, il existe donc δ_2 appartenant à Δ, relevant une puissance non nulle de φ tel que $\delta_2\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1$.

Nous avons alors la

Proposition. *Les éléments δ_1 et δ_2 commutent.*

DÉMONSTRATION : en effet, considérons $\delta_1\delta_2\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}$. Tout d'abord c'est un élément de Γ, puisque $\Delta =< \tilde{\varphi}, \Gamma >$ où $\tilde{\varphi}$ normalise Γ. Ensuite, v_1 est un point fixe de $\delta_1\delta_2\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}$. On en déduit donc que $\delta_1\delta_2\delta_1^{-1}\delta_2^{-1} = Id$. $\triangleright$

3.4.7. Nous sommes en mesure enfin de montrer le corollaire suivant qui achève la démonstration de 3.4.1.

Corollaire. *Il existe $n > 0$ tel que δ_2^n soit un bon élément.*

DÉMONSTRATION : changeons de point base pour simplifier de façon à ce que $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_0$. L'élément δ_2 appartient à H. Considérons comme toujours le morphisme Ad de G dans $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Ad}(H)$ l'image de H.

Puisque δ_1 et δ_2 commutent, $\mathrm{Ad}(\delta_2)$ appartient à $G_1^{\mathrm{Ad}(\delta_1)} \cap \mathrm{Ad}(H) = G_2$. Ce groupe est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ (*cf.* 2.2.4. et 2.3.5.) qui a donc un nombre fini de composantes connexes.

Nous en déduisons donc qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{Ad}(\delta_2^r)$ appartienne à $(G_2)_e$. Par ailleurs $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_1^{\mathrm{Ad}(\delta_1)} \subset J$ (*cf.* 3.4.2).

Ceci entraîne que $\mathrm{Ad}(\delta_2^r)$ appartient à $(I \cap \mathrm{Ad}(H))_e$. La restriction de Ad à H est injective (*cf.* 2.2.4), On en déduit donc que δ_2^r appartient à $(J \cap H)_e \subset J_e$. Enfin δ_2^r relevant une puissance non nulle de φ est différent de l'identité. ▷

3.5. Conclusion

3.5.1. Nous savons depuis 3.1.6 qu'il nous faut montrer que R/Q^+ (et R/Q^-) sont réduits à un point pour obtenir la proposition 3. Comme $R_1/Q_1^+ = R/Q^+$ (*cf.* 3.3.2.), nous allons montrer en exhibant trop de points fixes d'un bon élément la

Proposition. *Les variétés R_1/Q_1^+ et R_1/Q_1^- sont réduites à un point.*

Démonstration : Nous allons faire le raisonnement sur R_1/Q_1^+, le cas de R_1/Q_1^- s'en déduisant par symétrie.

Soit donc δ un bon élément dans Δ (*cf.* 3.4.1) et soit x tel que $x\delta x^{-1} \in J_e$. Comme $J_e \subset H$, δ fixe le point $\tilde{v}_1 = x\tilde{v}_0$.

Soit ensuite N le normalisateur de $\mathfrak{c}$ dans G.

$$N = \{g \in G/ \ \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\}.$$

le sous groupe J étant le centralisateur de $\mathfrak{c}$, N normalise J et donc J_e.

Autrement dit, pour tout n dans N, δ fixe le point $n.\tilde{v}_1$. Considérons donc π la projection de $\widetilde{V}$ sur R_1/Q_1^+. Nous en déduisons (*cf.* 3.2.1) que l'orbite de $\pi(\tilde{v}_1)$ sous $\pi \circ \mathrm{Ad}(N)$ est réduite à un point.

Or $\pi \circ \mathrm{Ad}(N) \cap R_1$ contient le groupe W défini par

$$W = \{w \in R_1/\mathrm{Ad}(w)\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\}.$$

Maintenant le lemme de Bruhat (*cf.* [Wa] prop. 1.2.1.10) entraîne que $W/W \cap Q_1^+$ a au moins deux éléments si $Q_1^+ \neq R_1$.

Dès lors l'orbite de W sur R_1/Q_1^+ a au moins deux éléments ce qui amène la contradiction. ▷

4. Le groupe fondamental est virtuellement nilpotent.

Nous allons dans cette section achever la démonstration du théorème 1. Pour cela il nous faut essentiellement montrer que Γ est virtuellement nilpotent. Remarquons que le problème se pose déjà, lorsque V est une variété affine plate compacte et complète. Conjecturalement, une telle variété a un groupe fondamental virtuellement polycyclique [Mi] [To]. Dans notre cas, nous allons exploiter l'hypothèse donnée par l'existence d'un difféomorphisme d'Anosov.

En 4.1., nous précisons quelques faits concernant les espaces homogènes, et tout particulièrement aux homogènes sous un groupe nilpotent U.

En particulier, nous montrons qu'un spectre est associé à tout difféomorphisme d'un tel espace normalisant l'action de U. L'existence d'un point fixe se manifeste alors au niveau de ce spectre.

En 4.2., nous exploitons l'existence d'un difféomorphisme d'Anosov (en fait un difféomorphisme affine ayant un nombre fini non nul de points fixes suffirait) sous la forme d'une alternative (4.2.2.).

Grâce à cette alternative, nous concluons finalement en 4.3.

4.1. Le cadre du problème

4.1.1. Commençons par quelques faits élémentaires concernant les espaces homogènes. Soit $\widetilde{V}$ une variété sur laquelle agit transitivement et fidèlement un groupe U. Modulo le choix d'un point barre $m_0, \widetilde{V}$ s'identifie donc à U/U' où U' est le stabilisateur de m_0.

Soit $\text{Aff}(U;\widetilde{V})$ - ou $\text{Aff}(U,U')$ - le groupe des difféomorphismes de $\widetilde{V}$ qui normalisent l'action de U. Le groupe U lui-même en est un sous-groupe distingué et $\text{Aff}(U,\widetilde{V})/U$ s'identifie au groupe $\text{Aut}(U,U')/\text{In}(U')$ où $\text{Aut}(U,U')$ désigne le groupe des automorphismes de U laissant invariant U' et où $\text{In}(U')$ le sous-groupe distingué de $\text{Aut}(U,U')$ provenant des automorphismes intérieurs dus à U'.

4.1.2. Spécialisons nous maintenant au cas où le groupe U est nilpotent simplement connexe. C'est notre cas d'après la proposition 3, et de plus G, et donc Δ, est un sous-groupe de $\text{Aff}(U,\widetilde{V})$. Par ailleurs $\text{Aut}(U,U')$, s'identifie alors au groupe $\text{Aut}(\mathfrak{u},\mathfrak{u}')$ des automorphismes de $\mathfrak{u}$ qui préservent $\mathfrak{u}'$. En particulier $\text{Aut}(U,U')$ s'envoie sur un sous-groupe algébrique de $GL(\mathfrak{u}/\mathfrak{u}')$ tel que l'image de $\text{In}(U')$ en soit un sous-groupe unipotent distingué.

4.1.3. Ceci va nous permettre de définir le spectre d'un élément de $\text{Aff}(U;\widetilde{V})$. Définissons tout d'abord le spectre d'un élément de $\text{Aut}(U,U')$ comme celui de son image dans $GL(\mathfrak{u}/\mathfrak{u}')$. Comme $\text{In}(U')$ est unipotent distingué dans $\text{Aut}(U,U')$, le spectre d'un élément ne dépend que de sa projection dans $\text{Aut}(U,U')/In(U')$. Par définition, *le spectre* d'un élément de $\text{Aff}(U;\widetilde{V})$ est celui de sa projection dans $\text{Aut}(U,U')/\text{In}(U') = \text{ Aff }(U;\widetilde{V})/U$.

4.1.4. On vérifie que cette définition est indépendante du choix d'un point base dans $\widetilde{V}$. De plus le spectre d'un élément est invariant par conjugaison.

En particulier, si un élément g de $\mathrm{Aff}(U;\widetilde{V})$ a un point fixe v, le spectre de g est celui de $T_v g$, la différentielle de g en v.

4.1.5. Comme dans le cas où $\widetilde{V}$ est l'espace affine de dimension n et U est $\mathbf{R}^n$ nous avons le lemme.

Lemme. *Tout élément de* $\mathrm{Aff}(U;\widetilde{V})$ *dont le spectre ne contient pas 1 a un point fixe.*

Démonstration : représentons un tel élément par un élément $g = (a, u)$ de $\mathrm{Aut}(U, U') \ltimes U$ tel que le spectre de a sur $\mathfrak{u}/\mathfrak{u}'$ ne contienne pas 1.

Nous allons le démontrer par récurrence.

Soit $C^i(\mathfrak{u})$ la suite centrale descendante de $\mathfrak{u}$: $C^\circ(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$ et $C^i(\mathfrak{u}) = [\mathfrak{u}, C^{i-1}(\mathfrak{u})]$. Soit $C^i(U)$ le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $C^i(\mathfrak{u})$ et $U_i = U'C^i(U)$: c'est le sous-groupe connexe de U d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_i := \mathfrak{u}' + C^i(\mathfrak{u})$. On a, pour $i > i_0, U_i = U'$.

Remarquons que g est aussi un élément de $\mathrm{Aff}(U, U_i)$. Montrons, par récurrence sur i, que g a un point fixe dans U/U_i : c'est vrai pour $i = 0$; supposons le résultat vrai pour $i - 1$ et montrons le pour i.

Soit v dans U tel que vU_{i-1} est un point fixe de g dans U/U_i. Quitte à remplacer g par $v^{-1}gv \in \mathrm{Aff}(U, U')$, qui a même spectre, on peut supposer que $v = 1$.

Ecrivons $g = \exp(X).a$ avec $X \in U_{i-1}$ et $a \in \mathrm{Aut}(U, U')$ et cherchons Y dans $C^{i-1}(\mathfrak{u})$ tel que le point $\exp(Y)U_i$ de U/U_i est fixé par g, c'est-à-dire tel que $w := \exp(-Y)\exp(X)$ $\exp(a(Y))$ est dans U_i.

Or, on peut écrire

$$w = \exp\,(a(Y) - Y + X + Z) \quad \text{avec} \quad Z \in C^i(U)$$

L'hypothèse sur les valeurs propres de g permet de trouver Y dans $C^{i-1}(U)$ tel que $a(Y) - Y = -X$ modulo $C^i(\mathfrak{u}) + \mathfrak{u}' \cap C^{i-1}(\mathfrak{u})$. Pour un tel Y, W est dans U_i. C'est ce que l'on voulait.

4.2. L'alternative

4.2.1. Soit φ^n une puissance de φ ayant un point fixe sur V, et soit $\{v_0, \cdots, v_p\}$ l'ensemble (fini) de ces points fixes. Pour chaque i, soit $\tilde{v}_i$ un relevé de v_i dans $\widetilde{V}$ et δ_i un relevé de φ^n tel que $\delta_i \tilde{v}_i = \tilde{v}_i$.

4.2.2. Le but de cette section est la démonstration (triviale) de l'alternative suivante.

Lemme. *Soit γ un élément de Γ, on a alors l'alternative*

(i) le spectre de $\delta_0\gamma$ contient 1.

(ii) $\delta_0\gamma$ est conjugué à l'un des δ_i

DÉMONSTRATION : Nous avons l'alternative suivante

(a) soit $\delta_0\gamma$ n'a pas de point fixe.

(b) soit $\delta_0\gamma$ a un point fixe.

Pour la démonstration, nous renvoyons à [C].

D'après 4.1.5., (a) entraîne (i). Ensuite si $\delta_0\gamma$ a un point fixe, celui-ci est de la forme $\gamma_0\tilde{v}_i$ pour γ_0 appartenant à Γ. Dès lors $\gamma_0^{-1}\delta_0\gamma\ \gamma_0^{-1}$ a $\tilde{v}_i$ comme point fixe et relève φ. On a donc $\gamma_0^{-1}\delta_0\gamma\ \gamma_0 = \delta_i$, c'est-à-dire (b) entraîne (ii).

Enfin, 1 n'appartient pas au spectre des δ_i puisque δ_i est affine et que ses points fixes sont isolés (car ceux de φ le sont). L'alternative est donc exclusive. $\triangleright$

4.3. Conclusion

4.3.1. Nous allons conclure la démonstration du théorème en montrant la

Proposition. *il existe un sous-groupe N de G agissant transitivement et librement sur $\widetilde{V}$ tel que*

(i) Δ normalise N,

(ii) $N \cap \Gamma$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ, et cocompact dans N.

4.3.2. Le groupe N va apparaître comme une adhérence de Zariski. Le groupe U étant simplement connexe, il admet une représentation unipotente. Le groupe $\mathrm{Aff}(U,U') = (\mathrm{Aut}(U,U')/\mathrm{In}(U')) \ltimes U$ peut alors être muni d'une structure algébrique. Pour cette structure, l'ensemble des éléments dont le spectre contient un réel donné est une sous-variété algébrique.

La proposition 4.3.1 va alors être une conséquence de la

Proposition. *Le groupe $N = (\overline{\Gamma})_e$, composante connexe de l'identité de l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{Aff}(U,U')$ est un groupe nilpotent.*

4.3.3. Démontrons tout d'abord cette dernière affirmation. Soit tout d'abord Z_0 la sous-variété algébrique de $\mathrm{Aff}(U,U')$ composé des éléments ayant 1 dans leur spectre. Soit ensuite $\mathcal{O}$ l'adhérence de Zariski de la réunion des classes de conjugaison des δ_i sous U''

$$\mathcal{O} = \overline{\bigcup_i \{g\delta_i g^{-1}, g \in U''\}}.$$

Les éléments de $\mathcal{O}$ ont comme spectre celui de l'un des δ_i. Comme ces derniers ne contiennent pas 1, on en déduit

$$\mathcal{O} \cap Z_0 = \phi$$

Par ailleurs, d'après l'alternative 4.2.2

$$\delta_0 N \subset \mathcal{O} \cup Z_0$$

Et donc par connexité, $\delta_0 U''$ est inclus soit dans $\mathcal{O}$ soit dans Z_0. Par ailleurs, $\delta_0 N \cap \mathcal{O}$ est non vide (il contient δ_0).

On en déduit donc

$$\delta_0 N \subset \mathcal{O}$$

la proposition va donc être une conséquence du

Lemme. *Soit G un groupe algébrique, δ_0 un élément de G, G_1 un sous-groupe distingué tel que G soit l'adhérence de Zariski du groupe engendré par G_1 et δ_0.*

Supposons de plus qu'il existe des éléments $\delta_1, \cdots, \delta_p$ de G tel que

$$\delta_0 G_1 \subset \overline{\bigcup_i \{g\delta_i g^{-1}, \forall g \in G_1\}}.$$

ou ce dernier ensemble désigne l'adhérence de Zariski de la réunion des orbites des δ_i sous la conjugaison de G_1.

Alors $(G_1)_e$ est unipotent.

Démonstration : soit tout d'abord R le radical résoluble de G et π la projection de G sur G/R. Comme G/R est semi simple et G/G_1 commutatif, on en déduit que $\pi(G) = \pi(G_1)$. L'hypothèse entraîne alors que $\pi(G)$ est l'adhérence de Zariski de la réunion d'un nombre fini de classes de conjugaison, ce qui est impossible.

Le groupe G est donc résoluble, soit U son radical unipotent. G/U est commutatif et l'hypothèse entraîne que G_1/U est discret, et donc que $(G_1)_e$ est inclus dans U. $\triangleright$

4.3.4. Il nous reste à montrer que la proposition 4.3.2 entraîne la proposition 4.3.1.

C'est-à-dire que

(i) $N \cap \Gamma$ est d'indice fini dans Γ et cocompact dans N

(ii) N agit transitivement et librement sur $\widetilde{V}$.

(iii) N est inclus dans G.

Il est clair par ailleurs que Δ normalise N.

Tout d'abord, par construction $N \cap \Gamma$ est d'indice fini dans Γ (un groupe algébrique n'a qu'un nombre fini de composantes connexes). Comme $\overline{N \cap \Gamma} = N$, on en déduit que $N \cap \Gamma$ est cocompact : un sous-groupe discret Zariski dense d'un unipotent est cocompact. Nous avons donc montré (i).

Comme $\Gamma \cap N$ est cocompact dans N et qu'il agit proprement dans U/U' on en déduit que N agit librement sur U/U'.

Ensuite, en remplaçant éventuellement U par le groupe unipotent NU, on peut supposer que N est inclus dans U. Comme $\Gamma \backslash U/U'$ est compact on en déduit que $N \backslash U/U'$ est compact. Comme nous sommes en présence de trois groupes unipotents on en déduit que $N \backslash U/U'$ est réduit à un point et donc que N agit transitivement sur U/U'. On a montré (ii).

Enfin $N \cap G$ contient $N \cap \Gamma$ qui est Zariski dense dans N. Un sous-groupe fermé d'un groupe unipotent étant toujours algébrique on en déduit $N \cap G = N$, c'est à dire (iii).

4.3.5. Remarque finale.

Le lemme suivant est bien connu, il montre que le théorème 0.4 permet d'obtenir tous les infranilautomorphismes hyperboliques, avec en plus une connexion plate.

Lemme. *Soit ϕ_0 un infranilautomorphisme hyperbolique d'une infranilvariété V_0. Alors il existe une connexion ∇ (plate, sans torsion et complète) sur V_0 preservée par ϕ_0.*

DÉMONSTRATION : reprenons les notations de 0.2. Identifions $\mathfrak{n}$ à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur N invariants à gauche. Soit D le logarithme de la partie hyperbolique de Φ_0 ; c'est une dérivation inversible de $\mathfrak{n}$ qui commute à Φ_0.

La formule de Scheuneman, pour X, Y dans N :

$$\nabla_X Y = D^{-1}([X, DY])$$

définit une connexion plate, sans torsion et complète sur N invariante par translation à gauche [Sc]. Cette connexion est préservée par Φ_0 et par Γ (remarquons que l'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(N)$ est un groupe fini normalisé par Φ_0 , il commute donc à D). Elle induit donc une connexion plate sans torsion, complète et invariante par ϕ_0 sur V_o. ▷

Appendice : sur les sous-groupes Zariski denses des groupes réductifs.

Le but de cette appendice est de démontrer une propriété de ces sous-groupes qui est utilisé en 3.4 et dont la démonstration est basée sur des résultats profonds de théorie ergodique : [Go-Ma] et [Gu-Ra].

Cet appendice doit beaucoup à une discussion avec Y. Guivarc'h.

A.1 - Les éléments h-réguliers.

Soient G un groupe algébrique réel réductif et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

A.1.1. Introduisons la

Définition : un élément hyperbolique de G est dit *h-régulier* si son centralisateur est de dimension minimale (parmi les éléments hyperboliques). Un élément g de G est dit *h-régulier* (relativement à G) si sa partie hyperbolique (dans sa décomposition de Jordan) l'est.

Voici quelques exemples :

(i) Si $G = GL(n, \mathbf{R})$ les éléments h-réguliers sont les éléments à valeurs propres réelles distinctes.

(ii) Si $G = SO(n, 1)$ (ou si G est de rang réel 1) les éléments h-réguliers sont les éléments semi-simples non elliptiques.

(iii) Si $[G, G]$ est compact, tout élément de G est h-régulier.

Le théorème suivant est une conséquence de [Gu-Ra] ou de [Go-Ma] (*cf.* [To] lemme 4.1 pour le cas où G est déployé).

Théorème. *Soient G un groupe algébrique réel réductif et Γ un sous-groupe Zariski dense. Alors l'ensemble des éléments h-réguliers de Γ est encore Zariski dense.*

Faute de référence écrite pour ce théorème, détaillons les principales étapes de la démonstration.

L'idée de départ est d'étudier les exposants de Liapounov d'une marche aléatoire sur Γ (A.3) et d'en déduire que cette marche aléatoire passe presque sûrement par des éléments h-réguliers (A.4).

Une fois qu'on dispose d'un élément h-régulier dans Γ, il n'est pas difficile d'en avoir "beaucoup" (A.5).

Dans la dernière partie (A.6), on améliore ce théorème en montrant que, si G n'est pas commutatif, on peut construire un sous-groupe libre à 2 générateurs de Γ qui est encore Zariski dense et dont tous les éléments (sauf l'identité) sont h-réguliers. Ce qui prouve que ce théorème est, en quelque sorte, optimal.

A.2 - Action des éléments h-réguliers sur G/P.

Introduisons quelques notations classiques : soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$, $A = \exp(\mathfrak{a})$, θ une involution de Cartan de G telle que $\theta(a) = a^{-1}$, pour tout a dans A.

Soient également

$$K := \{g \in G/\theta(g) = g\},$$

$$L = Z_G(\mathfrak{a}) := \{g \in G/\forall X \in \mathfrak{a},\ \mathrm{Ad}g(X) = X\}$$

et $M = K \cap L$. On a l'égalité $L = M \times A$.

Pour tout caractère χ de A (ou $\mathfrak{a}$), on note

$$\mathfrak{g}^\chi := \{X \in \mathfrak{g}/\ \forall a \in A\ \mathrm{Ad}a(X) = \chi(a)X\}$$

l'espace de poids correspondant. Soient

- $\Sigma := \{\chi$ caractère de $A/\chi \not\equiv 1$ et $\mathfrak{g}^\chi \neq \{0\}\}$ l'ensemble des racines restreintes,
- Σ^+ un choix de racines positives,
- π la base de Σ^+, $A^+ := \{a \in A/\ \forall\ \chi \in \pi, \chi(a) > 1\}$,
- $L^+ := MA^+$,
- $\mathfrak{a}^+ := \mathrm{Log}(A^+)$ la chambre de Weyl (ouverte) positive,
- $\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\chi \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^{\chi^{\pm 1}}$,
- N^+ le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}^+$,
- $P = MAN^+$ le sous-groupe parabolique minimal de G associé à Σ^+.

Par définition, un élément g de G est h-régulier s'il est conjugué à un élément de L^+, autrement dit c'est un élément semi-simple dont la partie hyperbolique est conjugué à un élément de A^+. L'ensemble de ces éléments est un ouvert pour la topologie usuelle mais pas pour la topologie de Zariski.

On munit l'espace homogène G/P d'une métrique riemannienne K-invariante.

Critère. *On a l'équivalence, pour g dans G.*

(i) g est h-régulier.

(ii) g a un point fixe attracteur x dans G/P (i.e. $g.x = x$ et il existe un voisinage V_x de n tel que $\lim_{n\to\infty} g^n(V_x) = \{x\}$).

(iii) g a un point fixe attracteur hyperbolique x dans G/P (i.e. $g.x = x$ et il existe $n > 0$ tel que l'application tangente en x à g^n est strictement contractante : $||T_x g^n|| < 1$).

Démonstration :

(i)⇒ (iii) On peut supposer que g est dans L^+. Le point base $x_0 = P$ de G/P est un point fixe de g et l'application tangente en ce point, qui s'identifie à $\mathrm{Ad}g|\mathfrak{n}^-$, a toutes ses valeurs propres en module strictement inférieurs à 1.

(iii)⇒ (i) On peut supposer que $x = x_0$. La décomposotion de Jordan de g permet d'écrire $g = g_e\, g_h\, g_u$ où $g_e,\ g_h,\ g_u$ sont des éléments de P qui commutent deux à deux tels que g_e est elliptique, g_h est hyperbolique et g_u est unipotent. Quitte à conjuguer g par un élément de P, on peut supposer que g_h est dans A. Par hypothèse $\mathrm{Ad}(g_h)|\mathfrak{n}^-$ est une application linéaire dont les valeurs propres sont strictement inférieures à 1. Donc g_h est dans A^+. On en déduit que $g_u = 1$ et que g_e est dans M. Ceci prouve bien que g est un élément de L^+.

L'équivalence (i)⇔ (ii) ne nous sera pas utile : elle est laissée au lecteur. ▹

A.3 - Multiplicité des exposants de Liapounov.

Le but de ce paragraphe et du suivant est de montrer que Γ contient au moins un élément h-régulier. Quitte à remplacer Γ par son adhérence pour la topologie usuelle et G par son quotient par son centre, on peut se restreindre au cas où G est semi-simple et Γ est fermé pour la topologie usuelle.

On suppose donc dans ce paragraphe et le suivant que G est semi-simple et que Γ est fermé pour la topologie usuelle.

Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que Γ est le plus petit sous-groupe fermé contenant le support de μ et telle que on a la condition d'intégrabilité :

$$\int_G \log\,(\sup(||g||, ||g^{-1}||)) < \infty$$

On considère l'espace probabilisé $(\Omega = G^{\mathbb{Z}}, \mathbf{B}, P)$ où $\mathbf{B}$ est la tribu produit et P la mesure produit $\mu^{\otimes\mathbb{Z}}$. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donnée par la $n^{\text{ième}}$ coordonnée est une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω de loi μ. Soit θ le shift de Ω : on a $Y_{n+1} = Y_n \circ \theta$. Soient

$$S_n = Y_0 \cdots Y_{n-1} \text{ et } S_{-n} = Y_{-n}^{-1} \cdots Y_{-1}^{-1} \text{ pour } n \geq 0$$

On a l'égalité, pour tout n, m dans $\mathbb{Z}$, $S_{n+m} = S_n(S_m \circ \theta^n)$.

Le théorème d'Osseledets décrit le comportement asymptotique de S_n. La proposition suivante précise que les multiplicités des exposants de Liapounov sont aussi petites que possible. C'est là le point clef de la démonstration du théorème.

Proposition. *([Go-Ma1] Théorème 3, [Gu-Ra2] p. 171). Il existe un élément λ dans $\mathfrak{a}^+$ (appelé le Liapounov de la marche aléatoire), des variables aléatoires Φ à valeurs dans G, $(M_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ à valeurs dans M et A_n à valeurs dans A telles que, pour presque tout ω,*

(i) $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}$ Log $(A_n) = \lambda$

(ii) $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}$ log $||\Phi^{\pm 1}\circ\theta^n|| = 0$

(iii) pour tout n dans $\mathbf{Z}$, $S_n = \Phi.M_nA_n(\Phi\circ\theta^n)$

Heuristiquement, cela signifie qu'une marche aléatoire sur Γ se comporte asymptotiquement comme les puissances d'un élément $(\exp(\lambda))$ qui est hyperbolique et h-régulier.

A.4 - Existence d'éléments h-réguliers.

Le lemme suivant est une conséquence de l'ergodicité de θ et du lemme de récurrence de Poincaré.

Lemme. *([Gu] lemme 2 p. 487). Pour presque tout ω dans Ω, il existe une suite $n_k(\omega)$ strictement croissante telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^{-1}(\omega)\ \Phi(\theta^{n_k}(\omega)) = e$$

On a alors, pour presque tout ω,

$$\lim_{k\to\infty} (\Phi^{-1}(\omega)\ S_{n_k(\omega)}\ \Phi(\omega))^{-1}\ M_{n_k(\omega)}(\omega)A_{n_k(\omega)}(\omega) = e.$$

Le lemme suivant prouve alors que, pour k suffisamment grand, $S_{n_k}(\omega)$ est h-régulier.

Lemme. *Soit $\ell_n = m_na_n$ une suite d'éléments de $L = MA$ telle que, pour tout χ dans π, on a $\lim_{n\to\infty} \chi(a_n) = +\infty$.*

Soit g_n une suite d'éléments de G telle que $\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}\ell_n = e$. Alors, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, g_n est h-régulier.

Démonstration : Soit $e_n = \ell_n^{-1} g_n$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$. Soit

$$C = \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\sup_{x\in G/P} ||T_x e_n|| \right) < \infty.$$

Par hypothèse, il existe $n_0 \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in B(x_0, \varepsilon) \quad ||T_x \ell_n|| < \frac{1}{2C}$$

où x_0 désigne le point base de G/P et $B(x_0, \varepsilon)$ est la boule de centre x_0 et de rayon ε. On peut choisir n_0 de sorte que

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in G/P \quad d(e_n(x), x) \leq \varepsilon/2.$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$ et tout x dans $B(x_0, \varepsilon/2), e_n(x)$ est dans $B(x_0, \varepsilon)$, donc $g_n(x)$ est dans $B(x_0, \varepsilon/2)$ et $||T_x g_n|| < 1/2$.

Donc g_n est une contraction de la boule $B(x_0, \varepsilon/2)$ et $g_n y$ a un point fixe attracteur hyperbolique. $\triangleright$

A.5 - Zariski densité des éléments h-réguliers.

Nous revenons au cas général : G est un groupe réductif et Γ un sous-groupe Zariski dense.

Nous disposons maintenant d'un élément γ de Γ qui a un point fixe attracteur hyperbolique dans G/P. Montrons maintenant que l'ensemble de ces éléments est Zariski dense. On procède, pour cela, comme dans ([Ti] prop. 3.11)

Notons x_γ le point fixe attracteur de γ dans G/P et B_γ le bassin d'attraction de x_γ : c'est un ouvert de Zariski de G/P. Soit $U := \{u \in G/u.x_\gamma \in B_\gamma\}$, c'est un ouvert de Zariski dense de G. Soient u dans $U \cap \Gamma$ et $C = \sup\limits_{x\in G/P} ||T_x u||$ la constante de Lipschitz de u.

Considérons l'élément de Γ $h_n := \gamma^n u$. Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit de sorte que le compact $V := u(B(x_\gamma, \varepsilon))$ soit inclus dans B_γ. Il existe alors n_0 tel que, pour $n \geq n_0, \gamma^n(V)$ est inclus dans $B(x_\gamma, \varepsilon)$ et $\gamma^n|_V$ est $\frac{1}{2C}$-Lipschitzienne. On en déduit que h_n envoie la boule $B(x_\gamma, \varepsilon)$ sur elle-même et y est 1/2-Lipschitzienne. Elle y a donc un point fixe attracteur hyperbolique.

Soit Γ' l'ensemble des éléments h-réguliers de Γ et $\overline{\Gamma}'$ son adhérence de Zariski. On a vu que, pour tout u dans $U \cap \Gamma$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0, \gamma^n u$ est dans Γ'. On en déduit que, pour tout n dans $\mathbf{Z}, \gamma^n u$ est dans $\overline{\Gamma}'$. En particulier u est dans $\overline{\Gamma}'$. Donc $U \cap \Gamma$ est inclus dans $\overline{\Gamma}'$ et $\overline{\Gamma}' = G$.

Ceci termine la démonstration du théorème.

A.6 Sous-groupes libres des groupes réductifs.

Bien que cela ne soit pas directement utile pour notre étude des difféomorphismes d'Anosov, montrons comment le théorème A.1 permet de préciser le théorème de Tits ([Ti] théorème 3) sur les sous-groupes libres des groupes linéaires.

Corollaire. *Soit G un groupe algébrique réel réductif non commutatif et Γ un sous-groupe Zariski dense. Alors, il existe un sous-groupe libre Γ_1 de Γ engendré par deux générateurs g_1 et g_2, qui est Zariski dense et dont tous les éléments différents de l'identité sont h-réguliers (définition A.1).*

Remarques :

1) L'information supplémentaire, par rapport à [Ti], est le fait que les éléments de $\Gamma_1 \setminus \{1\}$ sont h-réguliers.

2) La démonstration découle du théorème A.1 et des méthodes développées dans [Ti].

3) On peut en déduire qu'il existe un sous-ensemble infini libre F de Γ tel que tous les couples (g_1, g_2) d'éléments distincts de F vérifient la conclusion de notre corollaire. Cela est laissé en exercice (*cf.* [Ti] p. 268).

4) Soient G^r l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G, G_1^r l'ensemble des éléments de G^r dont le centralisateur contient un *sous espace* de Cartan et G_2^r le complémentaire de G_1^r : l'égalité $G^r = G_1^r \cup G_2^r$ est une partition de G^r en deux ouverts disjoints.

Le théorème A.1 montre que $\Gamma \cap G_1^r$ est Zariski dense, et le corollaire montre que $\Gamma \cap G_2^r$ peut-être vide ! Le théorème A.1 est donc optimal.

Démonstration :

1er cas : *Le groupe $[G, G]$ est compact.*

Dans ce cas, tout élément de G est h-régulier et notre corollaire est un cas particulier du théorème 3 de [Ti] (ce théorème est énoncé pour G semi-simple ; la démonstration s'étend sans changement au cas où G est réductif). Remarquons que cette partie de la démonstration utilise de façon cruciale les corps p-adiques.

2ème cas : *Le groupe $[G, G]$ n'est pas compact.*

Dans ce cas la variété G/P n'est pas réduite à un point.

Lemme.

(a) Il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{O}$ de $G \times G$ tel que tout couple (g_1, g_2) d'éléments h-réguliers qui est dans $\mathcal{O}$ vérifie (avec les notations A.5)

et
$$\left.\begin{array}{l} x_{g_1^{\pm 1}} \in B_{g_2} \cap B_{g_2^{-1}} \\ x_{g_2^{\pm 1}} \in B_{g_1} \cap B_{g_1^{-1}} \end{array}\right\} (H)$$

(b) Pour tout couple (g_1, g_2) d'éléments h-réguliers vérifiant (H), il existe $n > 0$ tel que le groupe engendré par g_1^n et g_2^n est libre et tel que tous les éléments non triviaux de ce groupe sont h-réguliers.

Démonstration du lemme :

(a) Soient $G_{\mathbb{C}}^r$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $G_{\mathbb{C}}$, B un Borel de $G_{\mathbb{C}}$ et $B^r := B \cap G_{\mathbb{C}}^r$. L'espace homogène $G_{\mathbb{C}}/B$ s'identifie à l'ensemble des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Soient $Y = \{(g_1, \mathfrak{b}_1) \in G_{\mathbb{C}}^r \times (G_{\mathbb{C}}/B) / \ \mathrm{Ad}\ g_1(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1\}$, c'est une variété algébrique irréductible isomorphe à $G_{\mathbb{C}} \underset{B}{\times} B^r$. La première projection $p_1 \ : \ Y \to G_{\mathbb{C}}^r$ est un revêtement fini galoisien de groupe de Galois W. Soient

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{((g_1, \mathfrak{b}_1), (g_2, \mathfrak{b}_2)) \in Y \times Y \ / \ \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{g}\} \\ \Omega_2 &= \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \ / \ \forall w \in W \ (y_1, wy_2) \in \Omega_1\} \\ \text{et} \quad \mathcal{O} &= (p_1 \times p_1)(\Omega_2) \cap (G \times G). \text{ C'est un ouvert de Zariski non vide.} \end{aligned}$$

Montrons que l'ouvert $\mathcal{O}$ convient. Soient g_1, g_2 deux éléments h-réguliers de G tels que (g_1, g_2) est dans $\mathcal{O}$ et montrons par exemple que $x_{g_2} \in B_{g_1}$. On peut supposer que g_1 est dans L^+. Soient $\mathfrak{p}^{\pm} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^{\pm}$. L'espace homogène G/P s'identifie à l'ensemble des sous-algèbres paraboliques minimales de $\mathfrak{g}$ et on a l'égalité $B_{g_1} = \{\mathfrak{q} \in G/P \ / \ \mathfrak{q} + \mathfrak{p}^- = \mathfrak{g}\}$. Comme (g_1, g_2) est dans $\mathcal{O}$, on en déduit que x_{g_2} est dans B_{g_1}.

(b) Quitte à remplacer g_i par g_i^n, on peut trouver des voisinages compacts disjoints $K_i^{\pm}$ de $x_{g_i^{\pm 1}}$ tels que, en posant $L_i^{\pm} = K_i^{\pm} \cup K_{3-i}^{+} \cup K_{3-i}^{-}$ (pour $i = 1$ ou 2), on a $g_i^{\pm 1}(L_i^{\pm}) \subset K_i^{\pm}$ et tels que la constante de Lipschitz de la restriction de $g_i^{\pm 1}$ à $L_i^{\pm}$ est inférieure à $1/2$. Soit $m = g_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell} \cdots g_{i_1}^{\varepsilon_1}$ un mot (réduit) en g_1, g_2, g_1^{-1} et g_2^{-1} de longueur $\ell \geq 1$. Montrons que m est h-régulier (et donc que $m \neq e$). Quitte à conjuguer ce mot par $g_{i_1}^{\varepsilon_1}$, on peut supposer que $g_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell} \neq g_{i_1}^{\varepsilon_1}$. On a alors $m(K_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}) \subset K_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}$ et la constante de Lipschitz de la restriction de m à $K_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}$ est inférieure à $2^{-\ell}$. Donc m est h-régulier. $\triangleright$

Terminons la démonstration du corollaire. Soit $\mathcal{O}_1$ la projection de $\mathcal{O}$ sur G. D'après le théorème A.1, on peut trouver un élément g_1 h-régulier dans $\Gamma \cap \mathcal{O}_1$. Quitte à remplacer g_1

par une puissance g_1^p, on peut supposer que l'adhérence de Zariski Z_{g_1} du groupe engendré par g_1 est Zariski connexe.

Remarquons que, comme g_1 est semi-simple et régulier, la réunion des sous-groupes propres algébriques et Zariski-connexe de G qui contiennent Z_{g_1} est incluse dans un fermé de Zariski propre F_{g_1} de G ([Ti] prop. 4.4).

D'autre part, il existe un entier positif m tel que, pour tout g dans G, le groupe Z_{g^m} est Zariski-connexe ([Ti] lemme 4.2).

Choisissons donc, grâce au théorème A.1, un élément g_2' h-régulier de Γ tel que $g_2^{'m} \notin F_{g_1}$ et $(g_1, g_2^{'m}) \in \mathcal{O}$, et posons $g_2 = g_2^{'m}$.

Pour tout entier positif n, l'adhérence de Zariski du groupe engendré par g_1^n et g_2^n est Zariski-connexe et contient Z_{g_2}, elle est donc égale à G. D'autre part le lemme ci-dessus prouve que l'on peut, quitte à remplacer g_1 et g_2 par des puissances g_1^n et g_2^n, supposer que le groupe Γ_1 engendré par g_1 et g_2 est libre et que tous ses éléments non triviaux sont h-réguliers. C'est ce que l'on voulait.

Références

[An] D.V. Anosov : *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, Proc. Stek. Inst. Math. **90** (1967).

[Av] A. Avez : *Anosov diffeomorphisms*, dans Topological dynamics, Auslander et Gottschalk éditeurs, Benjamin (1968) 17-52.

[B-F-L] Y. Benoist, F. Foulon, F. Labourie : *Flots d'Anosov à distribution stable et instable différentiables* J. Amer. Math. Soc. (à paraître).

[Bo] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 7 et 8 CCLS Paris (1975).

[C] L. Caroll : *Symbolic Logic*, *Part I Elementary*, Mac Millan, Londres (1896).

[Ch] C. Chevalley : *Théorie des groupes de Lie*, Hermann Paris (1968).

[Fl-Ka] I. Flaminio, A. Katok : *Rigidity of symplectic Anosov diffeomorphism on low dimensional tori*, Erg. Th. Dyn. Syst. **11** (1991) 427-440.

[Go-Ma1] I. Gol'dsheid, G. Margulis : *A condition for simplicity of the spectrum of Lyapounov exponents*, Soviet. Math. Dokl. **35** (1987) 309-313.

[Go-Ma2] I. Gol'dsheid, G. Margulis : *Lyapounov indices of a product of random matrices*, Russian Math Surveys **44** (1989) 11-71.

[Gr] M. Gromov : *Rigid transformation groups*, dans "Géométrie différentielle", D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat éditeurs, travaux en cours **33**, Hermann, Paris (1988) 65-139.

[Gu-Ra1] Y. Guivarc'h, A. Raugi : *Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence*, Z. Wahr. Geb. **69** (1985) 187-242.

[Gu-Ra2] Y. Guivarc'h, A. Raugi : *Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices...*, Israël Journ. Math. **65** (1989) 165-196.

[Gu] Y. Guivarc'h : *Produits de matrice aléatoire et applications...* Erg. Th. Dyn. Syst. **10** (1990) 483-512.

[Mi] S. Milnor : *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. in Math. **25** (1977) 178-187

[Ra] M. Raghanathan : *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer (1972).

[Sc] J. Scheuneman : *Examples of compact locally affine spaces*, Bull. A.M.S. **77** (1971) 589-592.

[Sh] M. Shub : *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque **56** (1978).

[Sm] S. Smale : *Differentiable Dynamical Systems*, Bull A.M.S. **73** (1967) 747-817.

[Ti] J. Tits : *Free subgroups in linear groups*, Journ. of Alg. **20** (1972) 250-270.

[To] G. Tomanov : *on a conjecture of L. Auslander*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sc. **43** (1990) 9-12.

Yves Benoist
Université Paris VII
UFR de Mathématiques
2, place Jussieu
75721 Paris Cedex
FRANCE - URA 748 du CNRS

François Labourie
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex
FRANCE - URA D.0169 du CNRS