Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Sur les difféomorphismes d'Anosov à feuilletages stable et instable différentiables

Yves Benoist et François Labourie

Résumé – Nous étudions les difféomorphismes d'Anosov φ sur une variété compacte dont les feuilletages stable et instable sont de classe C^∞. Nous montrons que si φ préserve une forme symplectique ou, plus généralement, une connexion affine, alors φ est C^∞-conjugué à un infranilautomorphisme hyperbolique.

On the Anosov diffeomorphisms whose foliations are differentiable

Abstract – *We prove that every symplectic (resp. affine) diffeomorphism on a compact symplectic (resp. affine) manifold whose stable and unstable foliations are C^∞, is an hyperbolic infranilautomorphism on an infranilmanifold.*

I. Introduction. – Soit V une variété compacte (connexe) C^∞. On munit V d'une métrique auxiliaire. Un difféomorphisme C^∞ φ est dit d'Anosov [1] s'il existe une décomposition invariante par φ du fibré tangent à V : $TV = E^+ \oplus E^-$ et des constantes a, b strictement positives telles que :

(i) $\forall Z^+ \in E^+, \forall n \geqq 0, \|T\varphi^{-n}(Z^+)\| \leqq a \|Z^+\| e^{-bn}$.

(ii) $\forall Z^- \in E^-, \forall n \geqq 0, \|T\varphi^{n}(Z^-)\| \leqq a \|Z^-\| e^{-bn}$.

Cette notion ne dépend pas du choix de la métrique. La distribution E^+ (resp. E^-) est appelée la distribution instable (resp. stable). Elle est intégrable et les feuilles intégrales sont de classe C^∞; mais la distribution est en général transversalement peu différentiable.

Exemple. – *Les infranilautomorphismes hyperboliques.*

Soient N un groupe de Lie (réel) nilpotent connexe et simplement connexe, $\mathfrak{n}$ son algèbre de Lie, $\operatorname{Aut}(N) = \operatorname{Aut}(\mathfrak{n})$ le groupe des automorphismes de N ou, ce qui est équivalent, de $\mathfrak{n}$, et $\operatorname{Aff}(N)$ le groupe produit semi-direct $\operatorname{Aut}(N) \ltimes N$, qui agit naturellement sur N.

Soit Γ un sous-groupe discret de $\operatorname{Aff}(N)$ qui agit sans point fixe sur N, tel que le quotient $\Gamma/\Gamma \cap N$ soit fini et tel que la variété $V_0 := \Gamma \backslash N$ soit compacte; cette variété V_0 est appelée une infranilvariété.

Soit Φ_0 un automorphisme de N (ou $\mathfrak{n}$) tel que $\Phi_0 \Gamma \Phi_0^{-1} = \Gamma$ et dont les valeurs propres ont toutes un module différent de 1. Le difféomorphisme φ_0 de V_0 déduit de Φ_0 est d'Anosov et ses distributions stable et instable sont C^∞; ce difféomorphisme est appelé un infranilautomorphisme hyperbolique.

Remarquons qu'il existe une connexion affine sur V_0 invariante par φ_0 (car $\mathfrak{n}$ a une dérivation inversible invariante par Φ_0) et que la mesure de Haar de N induit sur V_0 une mesure invariante par φ_0.

Nous montrons que, réciproquement, on obtient ainsi tous les difféomorphismes d'Anosov qui préservent une connexion affine et une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue, et dont les distributions stable et instable sont C^∞ :

Théorème. – *Soit* V *une variété* C^∞ *munie d'une connexion affine* C^∞. *Soit* φ *un difféomorphisme d'Anosov qui préserve cette connexion, qui préserve une mesure équivalente*

Note présentée par Marcel Berger.

0764-4442/91/03130045 $ 2.00 © Académie des Sciences

à la mesure de Lebesgue, et tel que E^+ *et* E^- *sont* C^∞.

Alors φ *est* C^∞*-conjugué à un infranilautomorphisme hyperbolique.*

COROLLAIRE. — *Soient* V *une variété symplectique* C^∞ *et* φ *un difféomorphisme d'Anosov symplectique tel que* E^+ *et* E^- *sont* C^∞. *Alors* φ *est* C^∞*-conjugué à un infranilautomorphisme hyperbolique.*

Remarques. — 1. La conjugaison C^∞ transforme la connexion affine (resp. la 2-forme symplectique) en une connexion (resp. 2-forme) sur $V_0 = \Gamma \backslash N$ dont la relevée à N est invariante par translation à gauche.

2. L'outil crucial est le théorème 3 de [3] qui affirme que, sous ces hypothèses, V est un espace localement homogène complet. Ici, nous précisons quels sont les espaces homogènes susceptibles d'apparaître.

3. Lorsque $V = \mathbb{T}^2$, le corollaire est dû à Avez [2]. Lorsque $V = \mathbb{T}^4$, il est dû à Flaminio et Katok [4]. Lorsque V est de dimension 4, il a été annoncé indépendamment par Flaminio.

Donnons les principales étapes de la démonstration du théorème.

II. UNE STRUCTURE D'ESPACE HOMOGÈNE SUR $\tilde{V}$. — La proposition suivante est une généralisation facile du théorème 3 de [3].

PROPOSITION. — *Sous les hypothèses du théorème, le groupe* G' *des difféomorphismes affines du revêtement universel* $\tilde{V}$ *préservant les distributions stable et instable (plus précisément leur relèvement* $\tilde{E}^\pm$ *à* $\tilde{V}$) *est un groupe de Lie qui agit transitivement.*

Remarque. — La démonstration de cette proposition est basée sur un théorème de Gromov [5]. L'hypothèse « affine » permet d'avoir une « structure géométrique rigide » au sens de Gromov.

Pour tout groupe de Lie K, on note K_e sa composante connexe et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie.

Écrivons donc $V = G'/H'$. Soient $\Gamma \subset G'$ le groupe d'holonomie de V et $\tilde{\varphi} \in G'$ un relèvement de φ à $\tilde{V}$. Quitte à remplacer V par un revêtement fini, φ par une puissance φ^{n_0} et à bien choisir le point base $\tilde{v}_0$ de $\tilde{V}$, on peut supposer que $\Gamma \subset G'_e$ et que $\tilde{\varphi} \in H'_e$. On a l'égalité $\tilde{\varphi}\,\Gamma\,\tilde{\varphi}^{-1} = \Gamma$.

Soit $\mathscr{F}^+$ l'espace des feuilles intégrales de $\tilde{E}^+$. C'est un espace homogène : $\mathscr{F}^+ = G'/P'$.

III. UNE STRUCTURE DE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE. — Soient $\mathrm{Ad} : G'_e \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ l'action adjointe. Pour $\tilde{v}$ dans $\tilde{V}$, on note $S(\tilde{v})$ l'algèbre de Lie de son stabilisateur :

$$S(\tilde{v}) = \mathrm{Lie}(\{g \in G' \mid g\tilde{v} = \tilde{v}\});$$

pour f dans $\mathscr{F}^+$, et on note $\Sigma(f)$ l'algèbre de Lie de son stabilisateur : $\Sigma(f) = \mathrm{Lie}(\{g \in G' \mid gf = f\})$. Ce sont des éléments de la grassmannienne de $\mathfrak{g}'$.

PROPOSITION 1. — *Les applications* Ad, S *et* Σ *sont des revêtements sur leurs images. Ces images sont des composantes connexes de sous-variétés algébriques (localement fermées).*

Soit Δ le sous-groupe de G'_e engendré par $\tilde{\varphi}$ et Γ. On note par « $\overline{}$ » l'adhérence de Zariski dans $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g}')$. Soient $G_1 = \mathrm{Ad}^{-1}(\overline{\mathrm{Ad}\,\Gamma})$ et $G = \mathrm{Ad}^{-1}(\overline{\mathrm{Ad}\,\Delta})$.

PROPOSITION 2. — *Le groupe* G_1 *agit transitivement sur* $\tilde{V}$.

IV. EXISTENCE D'UNE « STRUCTURE PRODUIT » SUR $\tilde{V}$. — Soit $H = G \cap H'$. On peut écrire G_e et H_e sous forme de produits semi-directs $G_e = R \ltimes U$ et $H_e = R' \ltimes U'$ de sorte que $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$ soient des sous-algèbres réductives, et que $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ soient des idéaux unipotents et $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$.

PROPOSITION 3. — $\mathfrak{r}'=\mathfrak{r}$.

Cette proposition permet d'identifier $\tilde{V}$ à l'espace homogène nilpotent U/U' et R à un sous-groupe des automorphismes de $\mathfrak{u}$ qui préservent $\mathfrak{u}'$. D'un point de vue dynamique, cette proposition signifie que la « structure locale de produits » sur $\tilde{V}$ donnée par les feuilletages stable et instable est globale.

Un outil important dans la démonstration de la proposition 3 est [6] qui permet de construire des orbites périodiques du difféomorphisme φ dont les applications de premier retour ont de bonnes propriétés.

PROPOSITION 4. — *Le groupe* G_{1e} *est unipotent.*

La démonstration de cette proposition est basée sur la remarque suivante :

Soit $\Gamma_1=\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma\tilde{\varphi}$ a un point fixe dans $\tilde{V}\}$.

D'une part, le complémentaire de Γ_1 est inclus dans un fermé de Zariski propre de G_{1e}. En effet, pour γ dans ce complémentaire, l'image de $\gamma\tilde{\varphi}$ dans $Gl(\mathfrak{u}/\mathfrak{u}')$ admet 1 comme valeur propre.

D'autre part, Γ_1 est la réunion d'un nombre fini de classes de conjugaison de Δ, car φ n'a qu'un nombre fini de points fixes dans V.

Note remise le 23 avril 1991, acceptée le 14 mai 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. V. ANOSOV, Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature, *Proc. Stek. Inst. Math.*, 90, 1967.

[2] A. AVEZ, Anosov diffeomorphisms, *Proc. Int. Symp. on Topological Dynamics*, Benjamin, 1968, p. 17-51.

[3] Y. BENOIST, P. FOULON et F. LABOURIE, *Flots d'Anosov à distributions stable et instable differentiables*, Preprint, 1990 et *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série I, 1990, p. 351-354.

[4] I. FLAMINIO et A. KATOK, *Rigidity of symplectic Anosov diffeomorphisms on low dimensional tori*, Preprint, 1989.

[5] M. GROMOV, Rigid transformation groups, dans *Géométrie différentielle*, D. BERNARD, Y. CHOQUET-BRUHAT éd., Travaux en cours, 33, p. 65-139, Hermann, Paris, 1988.

[6] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Propriétés de contraction d'un semigroupe de matrices..., *Israel J. Math.*, 65, 1989, p. 165-196.

Y. B. : *U.A.* 748 *du C.N.R.S.*,
Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématiques, 75251 *Paris;*
F. L. : *U.R.A. D.* 0169 *du C.N.R.S.*,
École polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 *Palaiseau.*