Géométrie/*Geometry*

Une nilvariété non affine

Yves Benoist

Résumé – Nous construisons des nilvariétés compactes sur lesquelles il n'existe pas de structures affines complètes (plates et sans torsion). Pour cela, on construit des algèbres de Lie nilpotentes de dimension n qui n'admettent pas de représentations linéaires fidèles de dimension $n+1$.

A nilvariety which is not affine

Abstract – *We construct compact nilvarieties which carry no complete affine structures. For that, we construct n-dimensional nilpotent Lie algebras with no faithful* $(n+1)$*-dimensional linear representations.*

1. Introduction. – 1.1. Une structure affine sur une variété compacte C^∞ W est la donnée d'un atlas maximal de cartes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont les changements de cartes sont localement des transformations affines de $\mathbb{R}^n$. Il est équivalent de se donner sur W une connexion ∇ plate et sans torsion. Il est aussi équivalent de se donner un difféomorphisme local D du revêtement universel $\tilde{W}$ de W dans $\mathbb{R}^n$, appelé développante, tel qu'il existe une représentation h du groupe fondamental $\pi_1(W)$, dans le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des transformations affines de $\mathbb{R}^n$, appelée holonomie, avec, pour w dans $\tilde{W}$ et γ dans $\pi_1(W)$, $D(\gamma w)=h(\gamma)D(w)$; si g est dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, les développantes D et $g\circ D$ sont considérées comme équivalentes.

Une structure affine est dite complète si D est un difféomorphisme, ou, ce qui est équivalent, si la connexion ∇ est complète.

Les exemples les plus simples sont les tores $\mathbb{T}^n$ dont le revêtement universel est l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Ces exemples ont été généralisés à de nombreuses nilvariétés (resp. solvariétés) : quotients de groupes de Lie nilpotents (resp. résolubles) par des sous-groupes discrets cocompacts (*voir* par exemple [9], [1], [7], [11], [5]). Ceci a conduit Scheuneman [9] et Milnor [7] à poser la question suivante (*voir* aussi [6], [3]) : Toute nilvariété compacte admet-elle une structure affine complète? Nous montrons qu'il n'en est rien :

Théorème 1. – *Il existe une nilvariété compacte* W *qui ne porte aucune structure affine complète.*

Les exemples que nous donnons sont de dimension 11. Nous conjecturons qu'il existe de tels exemples en toute dimension supérieure à 11. Nous vérifions que, en dimension inférieure ou égale à 7, une telle structure affine complète existe toujours.

1.2. Le point de départ du raisonnement est le suivant : Soient N le groupe de Lie nilpotent, revêtement universel de W et $n=\dim(N)$. L'holonomie est une représentation affine fidèle du groupe fondamental $\pi_1(W)$. Elle induit donc une représentation affine fidèle de N (*cf.* [4]). Or $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{n+1})$. On obtient ainsi une représentation linéaire fidèle de dimension $n+1$ de N et de son algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Le théorème 1 sera une conséquence du :

Théorème 2. – *Il existe une algèbre de Lie nilpotente* $\mathfrak{n}$ *de dimension* $n(=11)$ *qui n'admet aucune représentation linéaire fidèle de dimension* $n+1$.

Rappelons que le théorème d'Ado affirme que $\mathfrak{n}$ admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie.

Note présentée par Marcel Berger.

0764-4442/92/03150983 $ 2.00

1.3. Soit $\bar{\mathfrak{n}}$ une algèbre de Lie positivement graduée, *i.e.* $\bar{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{i>0} \bar{\mathfrak{n}}_i$ avec $[\bar{\mathfrak{n}}_i, \bar{\mathfrak{n}}_j] \subset \bar{\mathfrak{n}}_{i+j}$. Soit $M^{\nabla} = \mathbb{R} \oplus \bar{\mathfrak{n}}$, le $\bar{\mathfrak{n}}$-module défini par, pour X_i dans $\bar{\mathfrak{n}}_i$, X dans $\bar{\mathfrak{n}}$ et t dans $\mathbb{R}$:

$$X_i . (t, X) = (0, it X_i + [X_i, X]).$$

C'est un $\bar{\mathfrak{n}}$-module fidèle. En outre, il est gradué par $d^0(1, 0) = 0$ et $d^0(0, X_i) = i$. Cette remarque prouve que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ ne doit pas être positivement graduée.

Le point clef de la démonstration du théorème 2 est l'étude des représentations graduées d'une algèbre de Lie nilpotente graduée $\bar{\mathfrak{n}}$ naturellement associée à $\mathfrak{n}$. En particulier, nous montrerons le :

THÉORÈME 3. — *Il existe une algèbre de Lie nilpotente $\bar{\mathfrak{n}}$ de dimension $n(=11)$, positivement graduée dont les seules représentations linéaires fidèles graduées de dimension $n+1$ sont M^{∇} et son dual $(M^{\nabla})^*$.*

Les démonstrations de ces théorèmes sont données dans [2]. En voici les grandes lignes :

2. MODULES FIDÈLES SUR LES ALGÈBRES DE LIE FILIFORMES. — 2.1. Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n sur un corps K de caractéristique nulle et $\mathfrak{n}^i$ la suite centrale descendante : $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^{i+1} = [\mathfrak{n}^1, \mathfrak{n}^i]$ pour $i \geqq 1$. Soient $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}_i = \mathfrak{n}^i/\mathfrak{n}^{i+1}$ et $\bar{\bar{\mathfrak{n}}} = \bigoplus_{i \geqq 1} \bar{\bar{\mathfrak{n}}}_i$: c'est une algèbre de Lie graduée sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$; elle est engendrée par ses éléments de degré 1.

DÉFINITION [10]. — $\mathfrak{n}$ est dite filiforme si $n \geqq 2$ et, pour $i = 2, \ldots, n$, on a codim $\mathfrak{n}^i = i$.

Exemples. — Si $\mathfrak{n}$ est filiforme, alors $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}$ aussi; et réciproquement.

— F_n : l'algèbre de Lie graduée de base T, $X = X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, avec $n \geqq 2$, telle que $d^0 T = d^0 X = 1$ et

$$[T, X_i] = X_{i+1}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n-1$$
$$[X_i, X_j] = 0, \qquad \forall i, j \geqq 1.$$

2.2. Soit M un $\mathfrak{n}$-module nilpotent de dimension m, ce qui signifie que, pour tout X dans $\mathfrak{n}$, l'action de X dans M est nilpotente. Le module M est naturellement muni d'une filtration décroissante (M^i) définie par $M^1 = M$ et, pour $i \geqq 1$, $M^{i+1} = \mathfrak{n} . M^i$. Soient $\bar{M}_i = M^i/M^{i+1}$ et $\bar{M} = \bigoplus_{i \geqq 1} \bar{M}_i$: c'est un $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}$-module gradué de dimension m (*i.e.* $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}_i \bar{M}_j \subset \bar{M}_{i+j}$, $\forall i, j$); il est engendré par ses éléments de degré 1.

DÉFINITION. — La forme d'un module gradué $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ est la suite (nulle pour $|i|$ suffisamment grand) $p_i := \dim V_i$.

Le module gradué est dit fil si $p_i \leqq 1$ pour tout i.

Il est dit doublé si $p_i \leqq 1$ sauf pour exactement une valeur i_0 pour laquelle $p_{i_0} = 2$.

LEMME. — *Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension n et M un $\mathfrak{n}$-module fidèle nilpotent de dimension minimale m. On suppose $m \leqq n+1$. Alors on est dans un des trois cas suivants :*

(α) *$m = n$ et $\bar{M}$ est un $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}$-module fil fidèle.*

(β) *$m = n+1$ et $\bar{M}$ est un $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}$-module fil non fidèle.*

(γ) *$m = n+1$ et $\bar{M}$ est un $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}$-module doublé fidèle.*

3. MODULES FIDÈLES SUR LES ALGÈBRES DE LIE $\mathfrak{a}_{r,s,t}$. — 3.1. Soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_{r,s,t}$ l'algèbre de Lie définie par les générateurs e_1, e_2 et les relations $[e_2, e_3] = e_5$ et $[e_2, e_5] = re_7 + se_8 + te_9$

où on a posé pour $i \geqq 2$, $e_{i+1}=[e_1, e_i]$. Cette algèbre de Lie nilpotente est filiforme et de dimension 11, lorsque $r \neq 0$, 9/10, 1, 2 et 3, ce que l'on suppose désormais. Elle admet une deuxième filtration décroissante, la filtration par le degré : $\mathfrak{n}^{\geqq i}$ est engendré par $e_i, e_{i+1}, \ldots$ pour $i \geqq 1$. Soient $\bar{\mathfrak{n}}_i=\mathfrak{n}^{\geqq i}/\mathfrak{n}^{\geqq i+1}$ et $\bar{\mathfrak{n}}=\oplus \bar{\mathfrak{n}}_i$: c'est encore une algèbre de Lie graduée sur $\mathbb{N}^*$. On a les égalités : $\bar{\mathfrak{n}}=\mathfrak{a}_{r,0,0}$ et $\bar{\bar{\mathfrak{n}}}=F_{11}$.

3.2. Soit M un $\mathfrak{n}$-module nilpotent de dimension m. On pose $M^{\geqq 0}=M^{\geqq 1}=M$ et, pour $i \geqq 2$, $M^{\geqq i}=e_1 M^{\geqq i-1}+e_2 M^{\geqq i-2}$. Soient $\bar{M}_i=M^{\geqq i}/M^{\geqq i+1}$ et $\bar{M}=\bigoplus_{i \geqq 1} \bar{M}_i$. $\bar{M}$ est un $\bar{\mathfrak{n}}$-module de dimension m gradué.

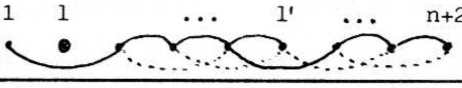
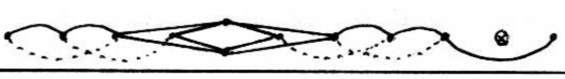
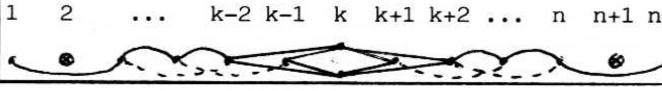
Proposition. — *Supposons $r \neq 0$, 9/10, 1, 2 et 3. Soient $\mathfrak{n}=\mathfrak{a}_{r,s,t}$, $n=\dim \mathfrak{n}=11$ et M un $\mathfrak{n}$-module fidèle nilpotent de dimension minimale $m=n$ ou $n+1$. Alors, on est dans un des deux cas suivants :*

(*a*) *$\bar{M}$ est d'un des huit types définis dans le tableau : module Fil (Troué, Bitroué, Cousu, Décousu, Reprisé et Troué-Décousu) et module Doublé (Doublé-Troué et Doublé-Bitroué).*

Tableau

Types possibles pour les modules $\bar{M}$.

Possible types for the modules $\bar{M}$.

TYPE	m	PARAMETRES	DIAGRAMME
Troué	n	$2 \leqslant k \leqslant n$	1 2 ... k ... n+1 
Bitroué	n		1 2 3 ... n+1 n+2 
Cousu	n+1		1 2 3 ... n n+1 
Décousu	n+1	$1 \leqslant k \leqslant n$	1 2 ... k ... n n+1 
Reprisé	n+1	$1 \leqslant k \leqslant n-1$	1 2 ... k ... n n+1 
Troué-Décousu	n+1	(l,l') = (2,n-1), (2,n), (n+1,2) ou (n+1,3)	1 l ... l' ... n+2 
Doublé-Troué	n+1	l=2 , $5 \leqslant k \leqslant n-1$ ou l=n , $3 \leqslant k \leqslant n-3$	1 ... k-2 k-1 k k+1 k+2 ... l n+1 
Doublé-Bitroué	n+1	k impair $5 \leqslant k \leqslant n-2$	1 2 ... k-2 k-1 k k+1 k+2 ... n n+1 n+2 

(*b*) *$\bar{M}$ est un module Doublé, extension d'un module Troué ou Bitroué de dimension n par le module trivial en degré k, avec $2 \leqq k \leqq n-1$.*

Dans ce tableau, la définition du type se lit sur le diagramme :

Une base du module gradué est formé des vecteurs v_i pour les i tels qu'il existe un point noir à la i-ième place. Un arc relie les i-ième et $(i+1)$-ième points si et seulement si $e_1 v_i \neq 0$ (un arc en pointillé signifie que $e_1 v_i$ peut être nul ou non nul). Et de même avec e_2 pour les arcs qui relient les i-ième et $(i+2)$-ième points.

Le losange symbolise six vecteurs de la base : v_{k-2}, v_{k-1}, u_k, w_k, v_{k+1} et v_{k+2} (le degré de ces vecteurs est donné par leur indice), tels que $e_1 v_{k-2} = v_{k-1}$, $e_1 v_{k-1} = u_k$ et $e_2 v_{k-2} = w_k$ et tel que le module gradué n'est pas une extension d'un module Fil par le module trivial (gradué en $d^0\, k$).

3.3. Une étude de chacun de ces cas, lorsque $r = -2$, ne laisse que deux possibilités : $\bar{\mathrm{M}} = \mathrm{M}^{\nabla}$ ou $(\mathrm{M}^{\nabla})^*$. Cette étude est basée sur des calculs fastidieux : il s'agit de montrer que certaines familles de polynômes n'ont pas de zéros communs. Il s'agit donc de développer des polynômes, de calculer des polynômes résultants et de les factoriser. J'ai utilisé à plusieurs reprises un programme de calcul formel sur microordinateur pour mener à bien ces calculs. Les calculs les plus longs sont pour les modules Cousus : certains de ces polynômes ont une cinquantaine de termes. Le calcul à la main ne semble pas hors de portée, mais quelle économie de temps! Au passage, on a montré le théorème 3 avec $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{a}_{-2,0,0}$ et $n = 11$.

3.4. *Démonstration du théorème* 2 (avec $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_{-2,1,t}$ et $n = 11$). — On vérifie que le $\bar{\mathfrak{n}}$-module M^{∇} ne peut pas se déformer en un $\mathfrak{n}$-module M.

3.5. *Démonstration du théorème* 1. — On remarque que, lorsque t est rationnel (par exemple $t = 0$), le groupe de Lie connexe et simplement connexe N d'algèbre de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_{-2,1,t}$ admet un sous-groupe discret cocompact Γ ([8], chapitre II). La nilvariété quotient $\mathrm{W} = \Gamma \backslash \mathrm{N}$ n'admet pas de structure affine complète.

Note remise le 6 juillet 1992, acceptée le 4 septembre 1992.

Références bibliographiques

[1] L. Auslander, Simply transitive groups of affine motions, *Amer. J. Math.*, 99, 1977, p. 809-826.

[2] Y. Benoist, *Une nilvariété non affine*, preprint, 1992.

[3] N. Boyom, Sur les structures affines homotopes à zéro des groupes de Lie, *J. Differential Geom.*, 31, 1990, p. 859-911.

[4] D. Fried, W. Goldman et M. Hirsch, Affine manifolds with nilpotent holonomy, *Comment. Math. Helv.*, 56, 1981, p. 487-523.

[5] H. Fujiwara, Affine structures of some solvable Lie groups, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 25, 1980, p. 1495-1505.

[6] A. Medina-Perea, Flat left invariant connections adapted to the automorphism structure of a Lie group, *J. Differential Geom.*, 16, 1981, p. 445-474.

[7] J. Milnor, On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, *Adv. in Math.*, 25, 1977, p. 178-187.

[8] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, 1972.

[9] J. Scheuneman, Examples of locally affine spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77, 1971, p. 589-592.

[10] M. Vergne, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, *Bull. Soc. Math. France*, 98, 1970, p. 81-116.

[11] S. Yamaguchi, On complete affinely flat structure of solvable Lie groups, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 33, 1979, p. 209-218.

Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu, 75251 *Paris.*