NILVARIETES PROJECTIVES.

Yves BENOIST

Plan.

1. Introduction

1.1 Une *variété affine* est une variété C^∞ munie d'un atlas maximal de cartes à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^n$ et dont les changements de cartes sont localement des éléments du groupe $G := \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des transformations affines de $X := \mathbb{R}^n$.

On définit de la même façon les *variétés projectives* à l'aide de l'espace
$X := \mathbb{S}^n = \{$demi-droites de $\mathbb{R}^{n+1}\}$ sur lequel agit naturellement le groupe
$G := Sl^{\pm}(n+1, \mathbb{R})$ des matrices de déterminant ± 1 .

Toute variété affine a une structure projective naturelle obtenue en identifiant $\mathbb{R}^n$ à un hémisphère de $\mathbb{S}^n$.

La donnée d'une structure affine ou projective sur une variété C^∞ connexe W équivaut à la donnée d'un difféomorphisme local D du revêtement universel $\widetilde{W}$ de W dans l'espace X, appelé *développante*, tel qu'il existe un morphisme du groupe fondamental $\Gamma := \Pi_1(W)$ dans G, appelé *holonomie*, avec, pour w dans W et γ dans Γ, $D(\gamma w) = h(\gamma) D(w)$. Si g est un élément de G, les développantes D et $g \circ D$ sont considérées comme équivalentes. Nous supposerons désormais W connexe.

On dit que W est *complète* si D est un revêtement sur X.

On dit que W est *à holonomie nilpotente* si le groupe d'holonomie $H := h(\Gamma)$ est un groupe nilpotent; c'est toujours le cas lorsque Γ est un groupe nilpotent.

On note $Is(\widetilde{W})$ le groupe (de Lie) des *transformations affines* ou *projectives* de $\widetilde{W}$. Par définition, une transformation ϕ de $\widetilde{W}$ est dans $Is(\widetilde{W})$ si il existe un élément de G, que l'on note encore $h(\phi)$, tel que $D \circ \phi = h(\phi) \circ D$. On note $\widehat{I}$ la composante connexe de $Is(\widetilde{W})$, $K := \{\phi \in Is(\widetilde{W}) / h(\phi) = 1\}$, $K_0 := K \cap \widehat{I}$ et $I := h(\widehat{I}) \simeq \widehat{I}/K_0$.

Soit Δ le sous-groupe de G formé des matrices diagonales de G à coefficients positifs. On appelle *octants*, les orbites de Δ dans X.

Nous dirons que W est *octantisable* si, pour un choix convenable de la base de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a $\Delta \subset I$. Plus généralement, nous dirons que W est *quasi-homogène* si le groupe $Is(\widetilde{W})$ a une orbite ouverte dans $\widetilde{W}$.

1.2 On appelle *nilvariété* une variété compacte difféomorphe au quotient d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N_0 par un sous-groupe discret Γ.

Le but de ce papier est l'étude des structures affines ou projectives sur une nilvariété $W_0 \simeq \Gamma \backslash N_0$ de dimension n. Le cas du tore $\mathbb{T}^2$ est dû à Nagano et Yagi ([N-Y]) et à Goldman ([Go]) . Bien sûr, la nilvariété est à holonomie nilpotente. Le point de départ est la proposition suivante.

Proposition 1 : *Toute variété affine ou projective compacte à holonomie nilpotente est octantisable.*

Proposition 2 : *Soient W une variété affine ou projective octantisable et $\widehat{\Omega}$ une orbite de $\widehat{I}$ dans $\widetilde{W}$.*

i) La restriction de D à l'adhérence $\overline{\widehat{\Omega}}$ de $\widehat{\Omega}$ est un revêtement sur son image, de groupe de Galois K_0 .

ii) Soient $\Gamma' := \Gamma \cap K.\widehat{I}$ *et* $\Gamma_0 := \Gamma \cap \widehat{I}$. *La variété à coins* $\Gamma_0\backslash\overline{\widehat{\Omega}}$ *s'identifie, par la projection naturelle, à une sous-variété fermée à coins du revêtement fini* $W' := \Gamma'\backslash\widetilde{W}$ *de* W. *En particulier, si* W *est compacte,* $\Gamma_0\backslash\overline{\widehat{\Omega}}$ *l'est aussi.*

Remarques : 1) Les quotients $\Gamma_0\backslash\overline{\widehat{\Omega}}$ sont, heuristiquement, les "briques" qui servent à construire W. Même lorsque W est connexe, ces "briques" ne sont pas, en général, deux à deux difféomorphes.

2) Le cas particulier des variétés à holonomie diagonale a été étudié par J.Smillie [Sm]. Dans ce cas, les "briques" sont associées à des "éventails simpliciaux complets".

3) Pour des résultats antérieurs sur les variétés affines à holonomie nilpotente, voir [F-G-H], [G-H1] §2.10 et [G-H2] proposition N.

1.3 Une nilvariété W_0 de dimension n est dite *filiforme* (ou de classe maximale) si le $(n-1)^{ème}$ terme de la suite centrale descendante de N_0 est non trivial et si $n \geq 3$. Par exemple, les nilvariétés de Heisenberg de dimension 3 sont filiformes.

Théorème 1 : *Toute structure affine ou projective sur une nilvariété filiforme est invariante à gauche.*

Ceci signifie que, pour une identification convenable $W_0 \simeq \Gamma\backslash N_0$, la multiplication à gauche sur N_0 préserve la relevée à $\widetilde{W_0} \simeq N_0$ de cette structure.

Un tel énoncé serait faux pour le tore $\mathbb{T}^2$ (c.f. [N-Y]) ou pour les nilvariétés de Heisenberg de dimension 5 (c.f. §5.5).

Théorème 2 : *Il existe des nilvariétés qui n'admettent aucune structure projective.*

Ce théorème précise et utilise les résultats de [Be] où nous montrions que certaines nilvariétés n'admettent pas de structures affines complètes.

1.4 Les propositions 1 et 2 permettent aussi de classifier les structures affines ou projectives sur le tore $\mathbb{T}^3$.

Elles permettent aussi de décrire les variétés compactes de dimension $n \leq 4$ qui admettent une structure projective à holonomie nilpotente: ce sont, à revêtement fini près, les nilvariétés, les sphères $\mathbb{S}^n$, les produits $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ et $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \Sigma_g$ où Σ_g est une surface de genre $g \geq 2$.

Ces résultats feront l'objet d'un autre article.

1.5 Notations : Si V est une variété, on note $\widetilde{V}$ son revêtement universel. Si L est un groupe de Lie, on note L_e sa composante connexe et $\mathfrak{l} = Lie(L)$ son algèbre de Lie. Si A est une partie de V, et B une partie de A, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A et $A-B$ le complémentaire de B dans A.

En outre, on utilisera librement dans tout cet article les notations introduites ci-dessus: X,G,D,Γ,h,H,$\widehat{I}$,K,I,K_0,Γ_0,Δ ,$\cdots$. Si L est un sous-groupe connexe de I, on notera $Is_L(\widetilde{W}) := \{\phi \in Is(\widetilde{W}) \ / \ h(\phi) \in L\}$, $\widehat{L}$ la composante connexe de $Is_L(\widetilde{W})$,

$K_L := K \cap \widehat{L}$ et $\Gamma_L := \Gamma \cap \widehat{L}$.

Je remercie Y. Carrière, D. Fried et J. Smillie pour d'intéressantes discussions sur ce sujet.

2. Variétés projectives à holonomie nilpotente.

Le but de cette partie est de démontrer la proposition 1.

Soit W une variété affine ou projective compacte à holonomie nilpotente. On choisit un sous-groupe nilpotent connexe maximal N de G tel que $[H : H \cap N] < \infty$. C'est possible: il suffit que N contienne la composante connexe de l'adhérence de Zariski de H.

On montre que l'action de N sur X se relè ve en une action de $\widetilde{N}$ sur $\widetilde{W}$ (§2.1). Deux paragraphes (§2.2 et 2.3) sont alors consacrés à la description des groupes N et de leurs orbites dans X. On montre alors que W est octantisable (§2.4).

2.1 L'action de $\widetilde{N}$ sur $\widetilde{W}$.

Le lemme suivant est crucial. Il généralise une idée de [N-Y].

Lemme : *On suppose W compacte et à holonomie nilpotente. Alors, on a l'inclusion $N \subset I$.*

Démonstration : Montrons par récurrence que, pour tout sous-groupe distingué connexe J de N, l'action de J sur X se relève en une action de $\widetilde{J}$ sur $\widetilde{W}$. Soient $J' \subset J$ un sous-groupe distingué connexe de N et Y dans $\mathfrak{j}$ tels que $\mathfrak{j} = \mathbb{R}Y \oplus \mathfrak{j}'$. Notons $exp : \mathfrak{n} \to N$ et $\widetilde{exp} : \mathfrak{n} \to \widetilde{N}$ les applications exponentielles. L'élément Y induit un champ de vecteurs sur X que l'on relève en un champ de vecteurs $\widetilde{Y} := D^*(Y)$ sur $\widetilde{W}$. Il suffit de montrer que $\widetilde{Y}$ est complet. Car alors, si $\widetilde{\phi_t}$ désigne le flot de $\widetilde{Y}$, l'action de $\widetilde{J}$ sur $\widetilde{W}$ sera donnée par l'égalité, pour $\widetilde{j}$ dans $\widetilde{J'}$,

$$(\widetilde{exp}(tY)\widetilde{j})\widetilde{w} = \widetilde{\phi_t}(\widetilde{j}\widetilde{w}).$$

Pour $\widetilde{w}$ dans $\widetilde{W}$, on note $t_{\widetilde{w}} > 0$ le temps pendant lequel on peut intégrer le champ de vecteurs $\widetilde{Y}$ à partir du point $\widetilde{w}$. Soit $\Gamma'' := \{\gamma \in \Gamma / h(\gamma) \in N\}$. Montrons que, pour γ dans Γ'' , on a $t_{\gamma\widetilde{w}} = t_{\widetilde{w}}$. Pour cela, notons $\pi : \widetilde{N} \to N$ le revêtement et définissons des applications continues $t \to j_t$ et $t \to \widetilde{j}_t$ de $\mathbb{R}$ dans J' et $\widetilde{J'}$ par les égalités:

$$j_t = exp(tY)h(\gamma)exp(-tY)h(\gamma)^{-1} ,$$

$\pi(\widetilde{j_t}) = j_t$ et $\widetilde{j_0} = 1$. On pose alors, pour $0 \le t < t_{\widetilde{w}}$,

$$\widetilde{w_t} = \widetilde{j_t}\ \gamma\ \widetilde{\phi_t}(\widetilde{w}) .$$

La courbe $t \to \widetilde{w_t}$ est une courbe intégrale de $\widetilde{Y}$ issue de $\gamma\widetilde{w}$ car

$$D(\widetilde{w_t}) = exp(tY)D(\gamma\widetilde{w}) .$$

Donc $t_{\gamma\widetilde{w}} \geq t_{\widetilde{w}}$. Et on a l'égalité $t_{\gamma\widetilde{w}} = t_{\widetilde{w}}$.

Comme la variété $\Gamma''\backslash\widetilde{W}$ est compacte, la fonction semi-continue inférieurement $\widetilde{w} \to t_{\widetilde{w}}$ admet un minorant $\alpha > 0$. On a forcément $\alpha = +\infty$. En procédant de même avec $-Y$, on prouve que $\widetilde{Y}$ est complet. C'est ce que l'on voulait.

2.2 Groupes nilpotents connexes maximaux.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$, $Gl(E)$ le groupe linéaire de E, Z le sous-groupe des homothéties positives et $Sl(E) = \{g \in Gl(E) \ / \ det(g) = 1\}$.

L'application $N \to \check{N} := ZN$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes nilpotents connexes maximaux de $Sl(E)$ dans l'ensemble des sous-groupes nilpotents connexes maximaux de $Gl(E)$. La bijection inverse est donnée par $\check{N} \to N = \check{N} \cap Sl(E)$.

Deux sous-groupes $\check{N}_1 \subset Gl(E_1)$ et $\check{N}_2 \subset Gl(E_2)$ sont dits semblables si il existe un isomorphisme de E_1 sur E_2 qui échange $\check{N}_1$ et $\check{N}_2$.

Soit $\check{N}$ un sous-groupe de $Gl(E)$. On dit que $\check{N}$ est décomposable si on peut écrire $E = E_1 \oplus E_2$ avec E_1 et E_2 non nuls et si $\check{N} \subset Gl(E_1) \times Gl(E_2)$; on a alors $\check{N} = \check{N}_1 \times \check{N}_2$ où $\check{N}_i = Gl(E_i) \cap \check{N}$; en outre, $\check{N}$ est nilpotent connexe maximal si et seulement $\check{N}_1$ et $\check{N}_2$ le sont. Sinon, on dit que $\check{N}$ est indécomposable.

On pose, pour $d \geq 1$,

$$\check{N}_d^{\mathbb{R}} = \{g \in Gl(\mathbb{R}^d) \ / \ \exists \lambda > 0 \ , \ g - \lambda Id \text{ est strictement triangulaire inférieure}\}$$

et

$$\check{N}_d^{\mathbb{C}} = \{g \in Gl(\mathbb{C}^d) \ / \ \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \ , \ g - \lambda Id \text{ est strictement triangulaire inférieure}\} \ .$$

Ce sont respectivement des sous-groupes nilpotents connexes maximaux de $Gl(\mathbb{R}^d)$ et $Gl(\mathbb{R}^{2d})$.

Lemme : *Soit $\check{N}$ un sous-groupe nilpotent connexe maximal de $Gl(E)$.*

a) Il existe une unique décomposition $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$ telle que $\check{N} = \check{N}_1 \times \cdots \times \check{N}_k$ où $\check{N}_i = Gl(E_i) \cap \check{N}$ est un sous-groupe nilpotent connexe maximal et indécomposable de $Gl(E_i)$.

b) Si $\check{N}$ est indécomposable, il est semblable à $\check{N}_d^{\mathbb{R}}$ ou $\check{N}_d^{\mathbb{C}}$ pour un $d \geq 1$.

On dit que $\check{N}_i$ est un facteur réel (resp. complexe) de $\check{N}$ si $\check{N}_i$ est semblable à $\check{N}_d^{\mathbb{R}}$ (resp. $\check{N}_d^{\mathbb{C}}$).

Démonstration: a) Evident.

b) Soit $E^{\mathbb{C}} = E \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Décomposons $E^{\mathbb{C}}$ en une somme directe $E^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}^{\mathbb{C}}$ indexée par les caractères de $\mathfrak{n}$ de sorte que, en notant $\mathbb{C}_{\alpha}$ le $\mathfrak{n}$-module de dimension 1 donné par le caractère α, l'action de $\mathfrak{n}$ sur $E_{\alpha}^{\mathbb{C}} \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{-\alpha}$ est nilpotente. Comme $\mathfrak{n}$ est indécomposable, un seul caractère α apparait. Le théorème d'Engels et la maximalité de $\mathfrak{n}$ permettent de conclure: si α est réel, $\check{N}$ est semblable à $\check{N}_d^{\mathbb{R}}$; sinon $\check{N}$ est semblable à $\check{N}_d^{\mathbb{C}}$.

Notations: Un élément g de $Gl(E)$ est dit elliptique s'il est semisimple à valeurs propres de modules 1, hyperbolique s'il est semisimple à valeurs propres réelles positives, unipotent si $g - Id$ est nilpotent. On note, pour $N = \check{N} \cap Sl(E)$,

$$\begin{array}{rcl} T & = & \{g \in N \ / \ g \text{ est elliptique}\} \ , \\ A & = & \{g \in N \ / \ g \text{ est hyperbolique}\} \text{ et} \\ U & = & \{g \in N \ / \ g \text{ est unipotent}\} \ . \end{array}$$

Les trois groupes T, A, U commutent; T et A sont commutatifs, mais U n'est pas, en général, commutatif. Les groupes A et U sont simplement connexes. Le groupe T est compact, sa dimension est le nombre de facteurs complexes de $\check{N}$. On a l'égalité: $N = TAU$.

2.3 Orbites des groupes nilpotents connexes maximaux.

Gardons les notations de 2.2: $E = \mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{S}^n = \{\text{demi-droites de } E\}$.

Lemme : *Soit N un sous-groupe nilpotent connexe maximal de $Sl(E)$.*

a) N a un nombre fini de d'orbites dans $\mathbb{S}^n$.

b) Il existe un sous-groupe $C \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_1}$ du centralisateur de N dans $Gl(E)$ qui agit simplement transitivement sur l'ensemble des orbites ouvertes de N dans $\mathbb{S}^n$ (k_1 est le nombre de facteurs réels de $\check{N}$).

c) Soit Ω une orbite de N dans $\mathbb{S}^n$. Le morphisme naturel $\pi_1(N) \to \pi_1(\Omega)$ est surjectif. Si Ω est ouverte, il est bijectif.

d) Tout point x de $\mathbb{S}^n$ admet une base de voisinages ouverts O tels que, pour toute N-orbite Ω dans $\mathbb{S}^n$, $O \cap \Omega$ est connexe.

Remarques : - Le groupe $C\check{N}$ est l'adhérence de Zariski de $\check{N}$.

- L'énoncé analogue à *d)* est faux pour les orbites de N dans l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$.

- L'énoncé analogue à *a)* est faux pour les sous-groupes abéliens connexes maximaux de $Sl(E)$. C'est pourquoi, la classification des structures affines ou projectives sur le tore $\mathbb{T}^3$ (resp. $\mathbb{T}^n$) n'est pas plus simple que la classification des variétés affines ou projectives compactes à holonomie nilpotente de dimension 3 (resp. n).

Démonstration : Cela résulte d'une description explicite des orbites de N dans $\mathbb{S}^n$: on peut écrire $E = \oplus E_i$ de sorte que $\check{N}_i := \check{N} \cap Gl(E_i)$ est nilpotent connexe maximal et indécomposable. Les orbites de N dans $\mathbb{S}^n$ sont en bijection avec les orbites de $\check{N}$ dans $E - \{0\}$. Les orbites de $\check{N}$ dans E sont les produits des orbites de $\check{N}_i$ dans E_i. On se ramène alors au cas indécomposable:

Si $\check{N}_i \simeq \check{N}_d^{\mathbb{R}}$, il y a $2d$ $\check{N}$-orbites dans $\mathbb{R}^d - \{0\}$:

$$\check{\Omega}_i^{\pm} = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d / \pm x_i > 0 \text{ et } x_{i-1} = \cdots = x_1 = 0\} \ ,$$

pour $1 \leq i \leq d$; et on a $C = \{\pm Id\}$.

Si $\check{N}_i \simeq \check{N}_d^{\mathbb{C}}$, il y a d $\check{N}$-orbites dans $\mathbb{R}^{2d} - \{0\}$:

$$\check{\Omega}_i = \{(z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{C}^d / z_i \neq 0 \text{ et } z_{i-1} = \cdots = z_1 = 0\} \ ,$$

pour $1 \leq i \leq d$; et on a $C = \{Id\}$.

Le lemme est alors évident; pour *d)* , munir la sphère $\mathbb{S}^n$ de la métrique standard et prendre pour O de petites boules centrées en x.

Remarques : - Lorsque W est affine, on peut choisir N dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, car un sous-groupe nilpotent connexe maximal de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est encore maximal dans $Sl(n+1, \mathbb{R})$. Dans ce cas, $\widetilde{N}$ agit sur $\widetilde{W}$ par des transformations affines.

- Il résulte de la description de ces N-orbites que, pour un choix convenable de la base de $\mathbb{R}^{n+1}$, le groupe Δ des matrices diagonales à coefficients positifs laisse stable chacune de ces orbites.

2.4 Octantisation des variétés projectives à holonomie nilpotente.

Montrons que toute variété affine ou projective compacte W à holonomie nilpotente est octantisable. Cela résulte du lemmes 2.1, des remarques précédentes et du lemme suivant.

Lemme : *Soient W une variété affine ou projective et L un sous-groupe connexe de G qui laisse stable chacune des orbites du groupe I dans X. Alors, on a l'inclusion $L \subset I$.*

Démonstration: C'est plus simple qu'en 2.1. Tout élément Y de $\mathfrak{l}$ induit un champ de vecteurs sur X. Notons $\widetilde{Y} = D^*(Y)$ le relevé à $\widetilde{W}$ de ce champ de vecteurs. Il suffit de montrer que $\widetilde{Y}$ est complet car alors, le flot $\widetilde{\phi_t}$ de $\widetilde{Y}$ est dans $\widehat{I}$.

Soit $\widetilde{w}$ dans $\widetilde{W}$. Par hypothèse, on peut trouver une application continue $t \to i_t$ de $\mathbb{R}$ dans I telle que $i_t D(\widetilde{w}) = exp(tY) D(\widetilde{w})$. Relevons cette application en une application continue $t \to \widehat{i_t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\widehat{I}$ telle que $\widehat{i_0} = 1$. Par construction, le chemin $t \to \widehat{i_t}\widetilde{w}$ est une courbe intégrale de $\widetilde{Y}$. Donc $\widetilde{Y}$ est complet.

Revenons à notre variété affine ou projective compacte W à holonomie nilpotente. Soit L un sous-groupe connexe de I. On note $\widehat{L}$ le sous-groupe connexe de $\widehat{I}$ tel que $h(\widehat{L}) = L$. Le but du chapitre suivant est de comprendre la décomposition de $\widetilde{W}$ en $\widehat{L}$-orbites. Trois cas nous intéressent: $L = \Delta, N$ ou I. Le groupe $L = \Delta$ a l'avantage de ne pas dépendre de W. Le groupe $L = N$ a l'avantage d'être bien adapté à notre problème. Le groupe $L = I$ a l'avantage d'être plus général et d'induire une décomposition canonique de $\widetilde{W}$.

Exemple: Soit W le tore affine $W = \mathbb{R}^2 - \{0\} /_{(x,y) \sim (2x, 2(x+y))}$. On a $\Delta = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \ / \ a > 0 \ , \ b > 0\}$, $N = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ x & a \end{pmatrix} \ / \ a > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}\}$ et $I = Gl(2, \mathbb{R})$. Les $\widehat{\Delta}$-orbites ouvertes sont des quarts de plan, les $\widehat{N}$-orbites ouvertes sont des demi-plans et $\widehat{I}$ a une seule orbite: le revêtement universel de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Remarque: Les implications: Γ *nilpotent* $\Rightarrow$ H *nilpotent* $\Rightarrow$ W *octantisable* ne sont pas des équivalences: on peut construire des variétés affines compactes octantisables dont le groupe d'holonomie contient un groupe libre non commutatif. On peut aussi construire des variétés affines compactes à holonomie nilpotente difféomorphes à $\mathbb{T}^3 \times \Sigma_g$ où Σ_g est une surface de genre $g \geq 2$.

3. Variétés projectives octantisables.

Le but de cette partie est de démontrer la proposition 2.

On étudie tout d'abord le groupe des isomorphismes de $\widetilde{W}$ (§3.1) ainsi que quelques propriétés des orbites du groupe I dans $\mathbb{S}^n$ (§3.2). On montre alors que la restriction de la développante à l'adhérence $\overline{\widehat{\Omega}}$ d'une $\widehat{I}$-orbite est un revêtement sur son image (§3.3). Enfin, on identifie le quotient $\Gamma_0\backslash\overline{\widehat{\Omega}}$ à une sous-variété compacte à coins d'un revêtement fini W' de W (§3.4).

3.1 Le groupe $Is(\widetilde{W})$.

Lemme : *Soit W une variété affine ou projective.*

a) Les groupes K et $\widehat{I}$ commutent et on a l'égalité: $Is_I(\widetilde{W}) = K \times_{K_0} \widehat{I}$.

b) Si W est octantisable, le groupe $Is_I(\widetilde{W})$ est un sous-groupe normal d'indice fini de $Is(\widetilde{W})$.

Remarque : En particulier, le groupe $\Gamma' := \Gamma \cap Is_I(\widetilde{W})$ est d'indice fini dans Γ.

Démonstration : a) Le groupe des commutateurs $[K, \widehat{I}]$ est inclus dans K. Or $\widehat{I}$ est connexe et K est discret, donc $[K, \widehat{I}] = 1$.

Rappelons que $K \times_{K_0} \widehat{I}$ est le quotient du groupe produit $K \times \widehat{I}$ par le sous-groupe $K_0 \simeq \{(k_0, k_0^{-1}) \ / \ k_0 \in K_0\}$. $K \times_{K_0} \widehat{I}$ est un sous-groupe de $Is_I(\widetilde{W})$. Montrons qu'il lui est égal. Pour cela, soit γ dans $Is_I(\widetilde{W})$; quitte à multiplier γ par un élément de $\widehat{I}$, on peut supposer que $h(\gamma) = 1$: γ est alors dans K. C'est ce que l'on voulait.

b) Il suffit de montrer que le groupe $h(Is(\widetilde{W}))$ a un nombre fini de composantes connexes. L'algèbre de Lie $\mathfrak{i}$ de I contient l'algèbre de Lie de Δ. Donc $\mathfrak{i}$ est égale à son propre normalisateur et le groupe I est ouvert dans son normalisateur $N_G(I)$. Ce dernier est un sous-groupe algébrique de G, il n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes. Notre affirmation résulte alors des inclusions: $I \subset h(Is(\widetilde{W})) \subset N_G(I)$.

3.2 Les orbites de I.

Lemme : *Soient I un sous-groupe connexe de $Sl(n+1, \mathbb{R})$ contenant Δ et Ω une orbite ouverte de I dans $\mathbb{S}^n$.*

a) Tout point x de $\mathbb{S}^n$ admet une base de voisinages O tel que $O \cap \Omega$ est connexe.

b) L'application naturelle $\pi_1(I) \to \pi_1(\Omega)$ est surjective.

Démonstration : a) L'orbite Ω est une composante connexe de l'ouvert de Zariski:

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{S}^n \ / \ \text{les vecteurs } v \text{ et } Yv \text{ , pour } Y \text{ dans } \mathfrak{i}, \text{ engendrent } \mathbb{R}^{n+1} \ \} .$$

Soient $H_i := \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \ / \ x_i = 0 \ \}$ et $H_{i,j} := H_i \cap H_j$. Comme I contient Δ, le fermé de Zariski $\Phi := \mathbb{S}^n - \Sigma$ est inclus dans la réunion des H_i. Donc à un sous-ensemble de codimension supérieure ou égale à 2 près, Φ est une réunion de certains des H_i. Ce qui prouve notre affirmation.

b) Soit $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$ et $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^{n+1}$. Le groupe $\pi_1(\Omega)$ est commutatif et est engendré par les lacets autour des sphères $H_{i,j}$ de codimension 2 telles que $H_{i,j} \cap \partial\Omega$ est ouvert dans $\partial\Omega$. En effet, si $H_{i,j}$ et $H_{k,l}$ sont deux telles sphères, les ensembles $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ sont disjoints.

Supposons par exemple que $H_{n,n+1}$ est ouvert dans $\partial\Omega$. Comme I préserve $H_{n,n+1}$, l'action de I sur l'espace vectoriel de dimension 2 : $F := E/_{<e_1, \cdots, e_{n-1}>}$ induit un morphisme forcément surjectif

$$p \ : \ I \to Sl(F) \sim Gl^+(F)/_{\{\text{homothéties positives}\}}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que p induit une surjection de $\pi_1(I)$ dans $\pi_1(Sl(F))$.

Pour cela, on va construire une section $\sigma : Sl(F) \to I$, c'est à dire un morphisme tel que $p \circ \sigma = Id$. Comme $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est simple, le morphisme $dp : \mathfrak{i} \to \mathfrak{sl}(F)$ admet une section $d\sigma : \mathfrak{sl}(F) \to \mathfrak{i}$. Celle-ci s'intègre en un morphisme $\widetilde{\sigma} : \widetilde{Sl(F)} \to I \subset Sl(E)$. Comme $Sl(E)$ est algébrique, $\widetilde{\sigma}$ factorise en une application $\sigma : Sl(F) \to I$. C'est la section cherchée.

3.3 La restriction de D à l'adhérence d'une orbite.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition 2 i). Commençons par le lemme:

Lemme : *Soit W une variété affine ou projective octantisable et $\widehat{\Omega}$ une orbite ouverte de $\widehat{I}$ dans $\widetilde{W}$.*

a) Le groupe K_0 agit proprement discontinument sur $\widetilde{W}$.

b) La développante induit par passage au quotient un difféomorphisme

$$K_0 \backslash \widehat{\Omega} \xrightarrow{\sim} \Omega := D(\widehat{\Omega})$$

Démonstration : a) Plus généralement, pour toute variété projective, le groupe K des transformations projectives à holonomie triviale agit proprement discontinument sur la variété.

Il suffit de montrer que si k_n est une suite d'éléments de K et x_n une suite de points tels que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} k_n x_n = y$, alors la suite k_n est constante pour $n \gg 0$ Pour cela, on remarque que $D(x) = D(y)$ et on choisit des voisinages ouverts O_x et O_y de x et y tels que la développante induise des bijections notées D_x et D_y de ces ouverts O_x et O_y sur un même ouvert O de $\mathbb{S}^n$. Pour $n \gg 0$, x_n est dans O_x et y_n est dans O_y, on a alors $k_n|_{O_x} = D_y^{-1} \circ D_x$. Donc la suite k_n est constante.

b) Comme Ω (resp. $\widehat{\Omega}$) est localement fermée dans $\mathbb{S}^n$ (resp. $\widetilde{W}$), la topologie induite par cette inclusion coïncide avec la topologie d'espace homogène sous $\widehat{I}$. L'application développante $D : \widehat{\Omega} \to \Omega$ est un difféomorphisme local équivariant entre espaces homogènes, c'est donc un revêtement.

Soit $Gal(\widehat{\Omega} : \Omega) = \{$difféomorphismes g de $\widehat{\Omega}$ tels que $D \circ g = D$ $\}$ le groupe de Galois du revêtement. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(I) & \xrightarrow{1} & K_0 \\ \downarrow^{2} & & \downarrow^{3} \\ \pi_1(\Omega) & \xrightarrow{4} & Gal(\widehat{\Omega} : \Omega) \end{array}$$

La flèche 2 est surjective d'après 3.2.b . La flèche 4 est évidemment surjective. La flèche 3 est injective car un élément de K_0 qui a un point fixe dans $\widetilde{W}$ est l'identité. Donc K_0 s'identifie à $Gal(\widehat{\Omega} : \Omega)$.

Démonstration de la proposition 2 i) : On peut supposer $\widehat{\Omega}$ ouverte. Soient $\breve{W} := K_0\backslash\widetilde{W}$ et $\breve{\Omega} := K_0\backslash\widehat{\Omega}$. La développante D induit par passage au quotient un homéomorphisme local $\breve{D} : \breve{W} \to \mathbb{S}^n$. On veut montrer que $\breve{D}$ est un homéomorphisme de $\overline{\breve{\Omega}}$ sur son image.

Il suffit de montrer que , pour toute suite v_n dans $\overline{\breve{\Omega}}$ et tout point v de $\overline{\breve{\Omega}}$ tels que $\lim_{n\to\infty} \breve{D}(v_n) = \breve{D}(v)$, on a $\lim_{n\to\infty} v_n = v$. Ceci montrera simultanément l'injectivité de $\breve{D}|_{\overline{\breve{\Omega}}}$ et la continuité de l'application inverse. Quitte à remplacer les points v_n par des points proches, on peut supposer que v_n est dans $\breve{\Omega}$. Soit $c = \breve{D}(v)$. Choisissons, grâce à 3.2.a, des voisinages ouverts O_v de v dans $\breve{W}$ et O_c de c dans $\mathbb{S}_n$ tels que $\Omega \cap O_c$ est connexe et $\breve{D}|_{O_v}$ est un homéomorphisme de O_v sur O_c. On va montrer que, pour $n \gg 0$, v_n est dans O_v, ce qui prouvera que $\lim_{n\to\infty} v_n = v$. Pour cela, soit v' un point auxiliaire dans $\breve{\Omega} \cap O_v$. Soit $n \gg 0$ de sorte que $\breve{D}(v_n)$ est dans O_c. Les points $\breve{D}(v')$ et $\breve{D}(v_n)$ sont dans $\Omega \cap O_c$. Il existe alors un chemin continu dans $\Omega \cap O_c$ les rejoignant. On relève ce chemin en un chemin continu dans $\breve{\Omega} \cap O_v$ qui relie le point v' à un point, noté v'_n, tel que $\breve{D}(v'_n) = \breve{D}(v_n)$. Le lemme 3.3 prouve alors que $v_n = v'_n$. Donc v_n est dans O_v.

3.4 Le groupe Γ_0.

Démonstration de la proposition 2 ii) : On peut supposer $h(\Gamma) \subset I$. L'ensemble $\Gamma.\overline{\widehat{\Omega}}$ est fermé dans $\widetilde{W}$ car, comme I contient Δ, tout compact de $\widetilde{W}$ ne rencontre qu'un nombre fini de $\widehat{I}$-orbites. Donc l'image de $\overline{\widehat{\Omega}}$ dans la variété compacte $W \simeq \Gamma\backslash\widetilde{W}$ est fermée. D'après le lemme ci-dessous, cette image s'identifie à l'espace quotient $\Gamma_0\backslash\overline{\widehat{\Omega}}$ qui est donc compact lorsque W est compacte.

Lemme : *Soit W une variété affine ou projective octantisable. Soit γ dans $Is_I(\widetilde{W})$ et $\widehat{\Omega}$ une orbite de $\widehat{I}$ dans $\widetilde{W}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

i) $\gamma \in \widehat{I}$

ii) pour toute $\widehat{I}$-orbite $\widehat{\Omega}'$ dans $\widetilde{W}$, on a $\gamma(\widehat{\Omega}') = \widehat{\Omega}'$

iii) $\gamma(\widehat{\Omega}) = \widehat{\Omega}$

iv) $\gamma\left(\overline{\widehat{\Omega}}\right) \cap \overline{\widehat{\Omega}} \neq \emptyset$.

Démonstration : i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) : clair.

iv) $\Rightarrow$ i) : Quitte à multiplier γ par un élément de $\widehat{I}$, on peut supposer que $h(\gamma) = 1$. Soient v_0 et w_0 dans $\overline{\widehat{\Omega}}$ tels que $\gamma\ v_0 = w_0$. On a $D(v_0) = D(w_0)$. La proposition 2 i) prouve alors qu'il existe k_0 dans K_0 tel que $w_0 = k_0 v_0$. Donc $\gamma = k_0$ est dans $\widehat{I}$.

4. Variétés projectives à holonomie nilpotente.

Soit W une variété affine ou projective à holonomie nilpotente. Cette partie est un pot-pourri de diverses propriétés de W qui joueront un rôle dans la démonstration des théorèmes 1 et 2 au chapitre 5. Soit N un sous-groupe nilpotent connexe maximal de G qui rencontre H en un sous-groupe d'indice fini de H.

4.1 Le groupe $Is_N(\widetilde{W})$.

Comme en 3.1, on remarque que le groupe $\Gamma'' := \Gamma \cap Is_N(\widetilde{W})$ est d'indice fini dans Γ et que l'on a l'égalité $Is_N(\widetilde{W}) = K \times_{K_N} \widehat{N}$ (lorsque N est simplement connexe, cette égalité devient: $Is_N(\widetilde{W}) = K \times \widehat{N}$). La proposition et le lemme suivants sont analogues à la proposition 2 et au lemme 3.4. Ils se démontrent de la même façon en remplaçant le lemme 3.2 par les points c) et d) du lemme 2.3.

Proposition : *Soient W une variété affine ou projective compacte à holonomie nilpotente. On garde les notations ci-dessus. Soit $\widehat{\Omega}$ une orbite de $\widehat{N}$ dans $\widetilde{W}$.*

i) La restriction de D à l'adhérence $\overline{\widehat{\Omega}}$ de $\widehat{\Omega}$ est un revêtement sur son image, de groupe de Galois K_N .

ii) La variété à coins $\Gamma_N \backslash \overline{\widehat{\Omega}}$ est compacte et s'identifie, par la projection naturelle, à une sous-variété à coins du revêtement fini $W'' := \Gamma'' \backslash \widetilde{W}$ de W.

Lemme : *Avec ces notations. Soit γ dans $Is_N(\widetilde{W})$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

i) $\gamma \in \widehat{N}$

ii) $\gamma(\widehat{\Omega}) = \widehat{\Omega}$

iii) $\gamma\left(\overline{\widehat{\Omega}}\right) \cap \overline{\widehat{\Omega}} \neq \emptyset$.

4.2 La décomposition $\gamma = \tau_\gamma \widehat{t}_\gamma a_\gamma u_\gamma$.

Gardons les notations de 4.1 et rappelons la décomposition $N = TAU$ de 2.2.

Lemme : *Il existe un sous-groupe d'indice fini Γ''' de Γ et des morphismes de groupes τ, $\widehat{t}$, a et u de Γ''' dans K, $\widehat{T}$, $\widehat{A}$ et $\widehat{U}$ tels que, pour tout γ dans Γ''', on a $\gamma = \tau_\gamma \widehat{t}_\gamma a_\gamma u_\gamma$.*

Démonstration : Soit $\Gamma'' := \Gamma \cap Is_N(\widetilde{W})$. Pour γ dans Γ'', on note t_γ, a_γ et u_γ les composantes de $h(\gamma)$ sur T, A et U. Les groupes $\widehat{A}$ et $\widehat{U}$ s'identifient au groupes A et U.

Il suffit donc de construire un morphisme $\gamma \mapsto \widehat{t}_\gamma$ de sorte que $t_\gamma = h(\widehat{t}_\gamma)$. Le morphisme τ s'en déduira par la formule $\tau_\gamma = \gamma\ (\widehat{t}_\gamma a_\gamma u_\gamma)^{-1}$.

Remarquons que le morphisme $t : \Gamma'' \to T$ contient $[\Gamma', \Gamma']$ dans son noyau. Le groupe $\Gamma''/[\Gamma'', \Gamma'']$ est abélien et de type fini car W est compact. Donc il existe un sous-groupe d'indice fini Γ''' de Γ'' tel que $\Gamma'''/([\Gamma'', \Gamma''] \cap \Gamma''')$ est abélien libre. On relève dans $\widehat{T}$ l'image d'une base, ce qui fournit le morphisme $\widehat{t} : \Gamma''' \to \widehat{T}$ souhaité.

4.3 Où $\widehat{N}$ agit transitivement sur $\widetilde{W}$.

Définition : *Une structure affine ou projective sur un groupe de Lie connexe N_0 de dimension n est dite invariante à gauche si la multiplication à gauche par un élément de N_0 préserve la structure.*

On a une correspondance:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{structures projectives} \\ \text{invariantes à gauche sur } N_0 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{actions projectives de } N_0 \\ \text{sur } \mathbb{S}^n \text{ avec une orbite ouverte} \end{array} \right\}$$

où l'action est donnée par l'holonomie et où l'orbite ouverte est l'image de la développante.

Définition : *Une structure affine ou projective sur une nilvariété $W_0 \simeq \Gamma\backslash N_0$ est dite invariante à gauche si, pour une identification convenable de W_0 avec $\Gamma\backslash N_0$, la relevée à $\widetilde{W_0} \simeq N_0$ de cette structure est invariante à gauche.*

Pour une telle structure, on peut choisir le groupe N de telle sorte que $\widehat{N}$ agisse transitivement sur $\widetilde{W_0}$. Le lemme suivant est une sorte de réciproque.

Lemme : *Soit W une structure affine ou projective compacte telle que Γ est nilpotent. Soit N un sous-groupe nilpotent connexe maximal de G tel que $[H : H \cap N] < \infty$. On suppose que $\widehat{N}$ agit transitivement sur $\widetilde{W}$. Alors W est une nilvariété munie d'une structure invariante à gauche.*

Remarque : Si on remplace l'hypothèse "Γ nilpotent"par "H nilpotent", la conclusion du lemme n'est valable que pour un revêtement fini de W.

Exemple : La bouteille de Klein affine $W = \mathbb{R}^2 - \{0\}/_{(x,y)\sim(2x,-2y)}$.

Démonstration : Par hypothèse $\widetilde{N}$ a une seule orbite dans $\widetilde{W}$ et la développante $D : \widetilde{W} \to \mathbb{S}^n$ est un revêtement sur son image Ω. D'après le lemme 2.3, l'application naturelle $\pi_1(N) \to \pi_1(\Omega)$ est bijective, donc l'action de $\widetilde{N}$ sur $\widetilde{W}$ est effective. Autrement dit, le groupe $\widehat{N}$ est simplement connexe. Soit $\Gamma'' := \Gamma \cap Is_N(\widetilde{W})$. D'après le lemme 4.1, on a l'inclusion $\Gamma'' \subset \widehat{N}$. Il existe un unique sous-groupe connexe N_0 de $\widehat{N}$ contenant Γ'' et tel que $\Gamma''\backslash N_0$ est compact (voir [Ra] chapitre 2). Bien sûr, N_0 est nilpotent et simplement connexe.

Montrons que N_0 agit simplement transitivement sur $\widetilde{\Omega} = \widetilde{W}$. En effet, comme Γ'' agit proprement sur $\widetilde{\Omega}$ et est cocompact dans N_0, N_0 agit aussi proprement sur $\widetilde{\Omega}$ et donc, pour tout w dans $\widetilde{\Omega}$, le stabilisateur de w dans N_0 est trivial. D'autre part , comme $\Gamma''\backslash\widetilde{\Omega}$ et $\Gamma''\backslash N_0$ sont compacts, il résulte de l'affirmation ci-dessous que
$\dim(N_0) = \mathrm{rg}(\Gamma'') = \dim(\widetilde{\Omega})$.

Pour conclure, il suffit de montrer que Γ est inclus dans N_0. Soient $N_1 = \Gamma.N_0$ et K le stabilisateur dans N_1 d'un point $\widetilde{w}$ de $\widetilde{W}$. Le groupe K est fini et le groupe N_1 est un produit semi-direct de K par N_0. Soit k un élément de K. Il existe un élément n_0 de N_0 tel que $\gamma := kn_0$ est dans Γ. Soient $\mathfrak{n}_0 = (\mathfrak{n}_0)^1 \supset (\mathfrak{n}_0)^2 \supset \cdots$ la suite centrale descendante de $\mathfrak{n}_0$. Les actions adjointes $\mathrm{Ad}k$ et $\mathrm{Ad}\gamma$ préservent cette filtration et coïncident sur les sous-quotients $(\mathfrak{n}_0)^i/(\mathfrak{n}_0)^{i+1}$. Comme Γ est nilpotent, $\mathrm{Ad}(\gamma)$ est unipotent et $\mathrm{Ad}k$ aussi. Or comme K est fini $\mathrm{Ad}k$ est d'ordre fini. On en déduit successivement que $\mathrm{Ad}k = 1$, k commute à N_0, l'action de k sur $\widetilde{\Omega}$ est triviale et enfin $k = 1$. Donc $K = 1$ et $\Gamma \subset N_0$. Ceci termine la démonstration.

Affirmation : (voir [Se]) *Soit Γ_1 un groupe discret sans torsion qui agit proprement sur une variété (sans bord) contractile Y. Notons $cd(\Gamma_1)$ la dimension cohomologique de Γ_1 (si Γ_1 est nilpotent et de type fini, c'est le rang de Γ_1). Alors on a l'inégalité*

$$cd(\Gamma_1) \leq dim(Y)$$

avec égalité si et seulement si $\Gamma_1\backslash Y$ est compact.

4.4 Un critère de complètude.

Gardons les notations de 4.1.

Lemme : *Soit W une variété projective compacte à holonomie nilpotente. Si N a une orbite compacte dans $D(\widetilde{W})$ alors W est complète.*

Remarque : Il n'y a que deux orbites compactes possibles pour N, les points et les grands cercles (c.f. 2.3).

Démonstration : a) Montrons que, *pour toute $\widehat{N}$-orbite $\widehat{\Omega}$ dans $\widetilde{W}$, l'image $D(\overline{\widehat{\Omega}})$ est compacte.* Par hypothèse, c'est vrai pour au moins une $\widehat{N}$-orbite fermée $\widehat{\Omega}_0$. D'après la proposition 4.1, les groupes nilpotents de type fini Γ_N et K_N agissent proprement sur $\widehat{\Omega}_0$ et les quotients $K_N\backslash\widehat{\Omega}_0$ et $\Gamma_N\backslash\widehat{\Omega}_0$ sont compacts. L'affirmation 4.3 appliquée au revêtement universel de $\widehat{\Omega}_0$ prouve que $\mathrm{rg}(\Gamma_N) = \mathrm{rg}(K_N)$. Ce rang est égal à 0 ou 1 d'après la remarque précédente.

Si $\mathrm{rg}(\Gamma_N) = 0$. La proposition 4.1 prouve que $\overline{\widehat{\Omega}}$ est compact et $D(\overline{\widehat{\Omega}})$ l'est aussi.

Si $\mathrm{rg}(\Gamma_N) = 1$. Il existe un sous-groupe fermé P (resp.Q) de $\widehat{N}$ isomorphe à $\mathbb{R}$ tel que $[\Gamma_N : P \cap \Gamma_N] < \infty$ (resp. $[K_N : Q \cap K_N] < \infty$). Les groupes P et Q agissent proprement sur $\overline{\widehat{\Omega}}$ et la proposition 4.1 prouve que le quotient $P\backslash\overline{\widehat{\Omega}}$ est compact. En appliquant l'isomorphisme de Thom pour la cohomologie de Cech à support compact (c.f.

[Iv] chap.7) aux deux fibrés $\overline{\overline{\Omega}} \to P\backslash\overline{\overline{\Omega}}$ et $\overline{\overline{\Omega}} \to Q\backslash\overline{\overline{\Omega}}$ de fibres isomorphes à $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$H^0_c(Q\backslash\overline{\overline{\Omega}},\mathbb{R}) \simeq H^1_c(\overline{\overline{\Omega}},\mathbb{R}) \simeq H^0_c(P\backslash\overline{\overline{\Omega}},\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} .$$

C'est à dire que $Q\backslash\overline{\overline{\Omega}}$ est compact. Donc $D(\overline{\overline{\Omega}}) \simeq K_N\backslash\overline{\overline{\Omega}}$ est aussi compact.

b) Munissons la sphère $\mathbb{S}^n$ de sa métrique standard. Pour montrer que D est un revêtement, il suffit de vérifier la propriété suivante de relèvement des chemins: pour tout chemin continu $w :]0,\varepsilon] \to \widetilde{W}$ tel que $s := D \circ w :]0,\varepsilon] \to \mathbb{S}^n$ est un segment de grand cercle paramétré par l'arc, la limite $\lim_{t\to 0} w(t)$ existe.

Pour cela, choisissons une orbite Ω de N dans $\mathbb{S}^n$ et $\varepsilon > 0$ tels que $s(]0,\varepsilon]) \subset \Omega$ (c.f. 2.3). Soit $\widehat{\Omega}$ l'orbite de $\widehat{N}$ dans $\widetilde{W}$ telle que $w(]0,\varepsilon]) \subset \widehat{\Omega}$. Comme $D|_{\overline{\widehat{\Omega}}}$ est un revêtement sur son image $D(\overline{\widehat{\Omega}})$ qui est compacte, on peut trouver une suite ε_n qui tend vers 0 telle que $w(\varepsilon_n)$ converge vers un point w_0 de $\overline{\widehat{\Omega}}$. Mais alors, $\lim_{t\to 0} w(t) = w_0$. C'est ce que l'on voulait.

4.5 Où l'holonomie est unipotente.

On identifie, pour $-1 \leq p \leq n-1$, la sphère $\mathbb{S}^p$ à la partie de $\mathbb{S}^n$ définie par l'annulation des $n-p$ premières coordonnées... ainsi $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$!

Lemme : *Soit W une variété projective compacte à holonomie dans le groupe $N = N^{\mathbb{R}}_{n+1}$ des matrices unipotentes triangulaires inférieures. Soit p la dimension minimale des orbites de N dans $D(\widetilde{W})$.*

-Si $p \leq n-2$, la développante D identifie $\widetilde{W}$ avec $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$.

-Si $p = n-1$, D identifie $\widetilde{W}$ au revêtement universel de $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-2}$.

-Si $p = n$, D identifie $\widetilde{W}$ à une composante connexe de $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-1}$.

Remarques : - Dans ce dernier cas W est affine complète. Ce lemme permet donc de retrouver le résultat suivant de [F-G-H]: *"Toute variété affine compacte à holonomie unipotente est complète"* .

-Il existe des structures projectives sur $\mathbb{T}^2$ pour lesquelles la développante D n'est pas un revêtement sur son image ([S-T] et [Go]).

Démonstration : Le cas $p = n$ est évident. Supposons $p \leq n-1$. Les orbites de N dans $\mathbb{S}^n$ sont données, en coordonnées homogènes par

$$\Omega^{\pm}_i = \{\mathbb{R}^*_+.(x_1, \cdots, x_{n+1}) / \pm x_i > 0 \text{ et } x_{i-1} = \cdots = x_1 = 0\} ,$$

pour $1 \leq i \leq n+1$. Elles sont contractiles, il résulte donc de 4.1 et de l'affirmation 4.3 que $\Gamma_N := \Gamma \cap \widehat{N}$ est de rang égal à p.

L'une des deux N-orbites de dimension p, par exemple $\Omega = \Omega^+_{n-p}$, est dans $D(\widetilde{W})$. Soit $\Omega' = \Omega^-_{n-p}$ et $O = \mathbb{S}^n - \overline{\Omega'}$ le plus petit voisinage ouvert N-invariant de Ω. Soit $\widehat{\Omega}$ une orbite de $\widehat{N}$ dans $\widetilde{W}$ telle que $D(\widehat{\Omega}) = \Omega$ et soit $\widehat{O}$ le plus petit voisinage ouvert $\widehat{N}$-invariant de $\widehat{\Omega}$. La développante D induit un difféomorphisme de $\widehat{O}$ sur O. On ne peut pas avoir $\widetilde{W} = \widehat{O}$ car $\widehat{O}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{rg}(\Gamma) < n$. Il existe donc une $\widehat{N}$-orbite fermée $\widehat{\Omega}'$ dans $\overline{\overline{\widehat{O}}}$ telle que $D(\widehat{\Omega}') = \Omega'$. Soit $\widehat{O}'$ le plus petit voisinage ouvert $\widehat{N}$-invariant de $\widehat{\Omega}'$. La développante D induit un difféomorphisme de $\widehat{O}'$ sur $O' := \mathbb{S}^n - \overline{\Omega}$.

Si $p \leq n-2$, $O \cap O'$ est connexe. Donc D induit un difféomorphisme de $\widehat{O} \cup \widehat{O}'$ sur $O \cup O' = \mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$. Par suite, $\widehat{O} \cup \widehat{O}'$ est fermé dans $\widetilde{W}$ et $\widetilde{W} \simeq O \cup O' = \mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$.

Si $p = n-1$, $O \cap O'$ a deux composantes connexes. Le même raisonnement permet d'identifier $\widetilde{W}$ à un ouvert du revêtement universel de $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-2}$ réunion d'ouverts $\widehat{O}_i$ que la développante identifie à O ou à O'. En particulier, on peut ranger les orbites de $\widehat{N}$ en une suite $\widehat{\Omega}_i$ indexée par un intervalle I de $\mathbb{Z}$ telle que $\widehat{\Omega}_i$ est ouverte pour i pair et fermée pour i impair et $\widehat{\Omega}_{2i\pm 1} \subset \overline{\overline{\widehat{\Omega}}}_{2i}$. La variété $\widetilde{W}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc $\mathrm{rg}(\Gamma) = n$ et $\Gamma \neq \Gamma_N$. Il existe alors un élément γ de Γ qui ne laisse stable aucune $\widehat{N}$-orbite. Ceci n'est possible que si $I = \mathbb{Z}$. Donc $\widetilde{W}$ s'identifie au revêtement universel de $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-2}$. Ce qui termine la démonstration.

5. Nilvariétés projectives.

Le but de cette partie est de démontrer les théorèmes 1 et 2.

Soit $W = W_0 \simeq \Gamma \backslash N_0$ une nilvariété projective de dimension $n \geq 2$. On montre que, si le centre de N_0 est de dimension 1, le morphisme d'holonomie est injectif (§5.1).

En particulier, les nilvariétés construites dans [Be] n'ont pas de structures projectives (§5.2).

On suppose maintenant $\mathfrak{n}_0$ filiforme. Les idées précédentes permettent de montrer que l'holonomie est unipotente, c'est à dire que l'on peut prendre $N = N_{n+1}^{\mathbb{R}}$. L'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^{n+1}$ a alors une structure de $\mathfrak{n}_0$-module fidèle nilpotent. En outre, le module gradué $\overline{\overline{\overline{E}}}$ qui lui est naturellement associé est "fil". Une propriété des modules "fils" démontrée en appendice (le corollaire A.2) permet de conclure que $\widehat{N}$ a une seule orbite dans $\widetilde{W}$ et donc que notre structure projective est invariante à gauche (§5.3).

Cette démarche est justifiée par l'exemple suivant: il existe des structures projectives à holonomie unipotente sur les nilvariétés de Heisenberg de dimension 5 qui ne sont pas invariantes à gauche (§5.4).

5.1 Injectivité de l'holonomie.

Lemme : *Soit $W_0 = \Gamma \backslash N_0$ une nilvariété projective de dimension $n \geq 2$ telle que le centre Z de N_0 est de dimension 1. Alors l'holonomie $h : \Gamma \to Sl^{\pm}(n+1, \mathbb{R})$ est injective.*

Remarque : L'holonomie du tore de Hopf $\mathbb{C}^*/_{z \sim 2z}$ n'est pas injective.

Démonstration : Supposons par l'absurde que h n'est pas injective et reprenons les notations du chapitre 4 avec $W = W_0$. Comme Γ est sans torsion, $\Gamma \cap \mathrm{Ker}(h)$ est infini et on peut remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini. On peut donc supposer (lemme 4.2) que $h(\Gamma)$ est inclus dans $N = TAU$ et qu'il existe des morphismes de groupes τ , $\widehat{t}$, a et u de Γ dans K , $\widehat{T}$, $\widehat{A}$ et $\widehat{U}$ tels que , pour tout γ dans Γ, on a $\gamma = \tau_\gamma \widehat{t}_\gamma a_\gamma u_\gamma$.

Notons $Z_\Gamma := Z \cap \Gamma$ le centre de Γ; c'est un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ ([Ra] proposition

2.17). Donc, *pour tout sous-groupe distingué $J \neq 1$ de Γ le sous-groupe $Z_J := Z \cap J$ est d'indice fini dans Z_Γ.* Pour montrer que h est injectif, il suffit de montrer que u est injectif. Pour cela, il suffit de voir que τ , $\widehat{t}$ et a ne sont pas injectifs. Pour $\widehat{t}$ et a, c'est évident car $\widehat{T}$ et $\widehat{A}$ sont commutatifs.

Supposons donc par l'absurde que τ est injectif. Les groupes
$\Gamma_N = \Gamma \cap \widehat{N} = \{\gamma \;/\; \tau_\gamma \in K_N\}$ et $K_N = K \cap \widehat{N} = K \cap \widehat{T}$ sont alors des groupes abéliens de type fini dont les rangs vérifient l'inégalité $\mathrm{rg}(\Gamma_N) \leq \mathrm{rg}(K_N)$.

Soit $\widehat{\Omega}$ une orbite fermée de $\widehat{N}$ dans $\widetilde{W}$. La proposition 4.1 prouve que Γ_N agit proprement sur $\widehat{\Omega}$ avec un quotient $\Gamma_N \backslash \widehat{\Omega}$ compact. Or le groupe K_N agit proprement sur $\widehat{\Omega}$. Il résulte alors de l'affirmation 4.3 que $\mathrm{rg}(\Gamma_N) = \mathrm{rg}(K_N)$ et que l'espace quotient $K_N \backslash \widehat{\Omega}$ est compact. On en déduit que la N-orbite $\Omega = D(\widehat{\Omega})$ est compacte. Le lemme 4.4 prouve alors que $\widetilde{W}$ est complète. Contradiction avec $n \geq 2$.

Remarque : Cette démonstration prouve aussi que , sous les hypothèses du lemme, le groupe d'holonomie $h(\Gamma)$ est discret.

5.2 Une nilvariété non projective.

Proposition : *Soit $W_0 \simeq \Gamma \backslash N_0$ une nilvariété de dimension n telle que $\mathfrak{n}_0$ a un centre de dimension 1 et $\mathfrak{n}_0$ n'a pas de représentations linéaires fidèles de dimension $n+1$. Alors W_0 n'a pas de structures projectives.*

Remarque : La construction de telles nilvariétés est l'objet de [Be]. Le théorème 2 est donc une conséquence de cette proposition.

Démonstration : Procédons par l'absurde et gardons les notations de 5.1. On peut supposer $h(\Gamma) \subset N = TAU$. D'après le lemme 5.1, le morphisme $u : \Gamma \to U$ est injectif. D'après [Ra], il se prolonge en un morphisme continu $\widetilde{u} : N_0 \to U$. Comme N_0 n'a pas de représentations fidèles, $\widetilde{u}$ n'est pas injectif. Son noyau $\mathrm{Ker}\widetilde{u}$ est un sous-groupe distingué connexe de N_0, il contient donc le centre Z de N_0 et aussi $\Gamma \cap Z \simeq \mathbb{Z}$. Ceci contredit l'injectivité de u.

5.3 Structures projectives sur les nilvariétés filiformes.

Démonstration du théorème 1 : Soit $W = W_0 \simeq \Gamma \backslash N_0$ une nilvariété filiforme munie d'une structure affine ou projective. On veut montrer que cette structure est invariante à gauche. Reprenons les notations précédentes.

Il suffit de montrer que $\widehat{N}$ a une seule orbite dans $\widetilde{W}$. En effet, le lemme 4.3 prouve alors que W est isomorphe à une nilvariété projective invariante à gauche $W'_0 \simeq \Gamma \backslash N'_0$. On conclut en remarquant que les groupes N_0 et N'_0 sont isomorphes car ils contiennent des réseaux isomorphes.

Supposons donc, par l'absurde, que $\widehat{N}$ a plusieurs orbites dans $\widetilde{W}$. On peut supposer que le groupe d'holonomie H est inclus dans N. Le lemme 5.1 prouve que le morphisme d'holonomie $h : \Gamma \to N$ est injectif. Comme le $(n-1)^{\grave{e}me}$ terme de la suite centrale descendante de Γ est non trivial, il en est de même de celui de N. La classification des sous-groupes nilpotents connexes maximaux de $Sl(n+1,\mathbb{R})$ donnée en 2.2 ne laisse que deux possibilités:

$$N = N^{\mathbb{R}}_{n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ou}$$

$$N = N^{\mathbb{R}}_{n} \times \mathbb{R}^*_+ = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} a & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ * & & a & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a^{-n} \end{array}\right) \quad \text{avec } a > 0 \right\} .$$

Dans ces deux cas, le groupe N est simplement connexe et $\widehat{N}$ s'identifie à N. Le morphisme $h : \Gamma \to N$ se prolonge en un morphisme $\tilde{h} : N_0 \to N$ ([Ra] chapitre 2). De cette façon, l'espace $E := \mathbb{R}^{n+1}$ est un $\mathfrak{n}_0$-module. On note $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ la base canonique de E.

Soit p la dimension minimale des orbites de $\widehat{N}$ dans $\widetilde{W}$. On a $p \leq n-1$, par hypothèse, et $p \geq 1$ d'après le lemme 4.4. Comme ces orbites sont contractiles (voir 2.3), la proposition 4.1 et l'affirmation 4.3 donnent l'égalité $\mathrm{rg}(\Gamma_N) = p$. Donc $[\Gamma : \Gamma_N] = \infty$ et *il existe une infinité de $\widehat{N}$-orbites dans $\widetilde{W}$* (lemme 4.1).

Soit P le plus petit sous-groupe connexe de N_0 qui contient Γ_N. C'est un groupe de dimension p tel que $\Gamma_N \backslash P$ est compact. Comme Γ_N est distingué dans Γ, P est distingué dans N_0. Soit Z un élément non nul du centre de $\mathfrak{n}_0$. *L'élément Z est dans $\mathfrak{p}$.*

D'autre part, le groupe P agit proprement sur $\widetilde{W}$ (via $\tilde{h} : N_0 \to N \simeq \widehat{N}$), car Γ_N agit proprement sur $\widetilde{W}$. En particulier, *chaque élément non nul de $\mathfrak{p}$ induit* (via la différentielle $d\tilde{h} : \mathfrak{n}_0 \to \mathfrak{n}$) *un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$ qui ne s'annule pas sur l'ouvert $D(\widetilde{W})$.*

Premier cas : $N \simeq N^{\mathbb{R}}_n \times \mathbb{R}^*_+$.

Soit $((\mathfrak{n}_0)^i, i \geq 1)$ la filtration centrale descendante de $\mathfrak{n}_0$. Comme Z est dans $(\mathfrak{n}_0)^{n-1}$, on a , avec $\alpha \neq 0$:

$$Ze_1 = \alpha e_n \quad \text{et} \quad Ze_i = 0 \quad \text{pour } i \geq 2 .$$

Comme le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$ induit par Z ne s'annule pas sur $D(\widetilde{W})$, cet ouvert $D(\widetilde{W})$ est inclus dans l'une des deux composantes connexes X' de $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-1}$. Par exemple $X' = \{\mathbb{R}^*_+(x_1, \cdots, x_{n+1}) \ / \ x_1 > 0\}$. L'ouvert X' contient exactement trois N-orbites Ω_+ Ω_0 et Ω_- définies respectivement par les conditions: $x_{n+1} > 0$, $x_{n+1} = 0$ et $x_{n+1} < 0$. On montre alors comme en 4.5 que la développante D induit un difféomorphisme de $\widetilde{W}$ sur X'. Donc $\widehat{N}$ n'a que trois orbites dans $\widetilde{W}$. Contradiction.

Deuxième cas : $N \simeq N^{\mathbb{R}}_{n+1}$.

L'holonomie est unipotente. Comme $\widehat{N}$ a une infinité d'orbites dans $\widetilde{W}$ le lemme 4.5 assure que $p = n-1$ et que $\widetilde{W}$ s'identifie, via la développante, au revêtement universel de $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-2}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{n}_0$, elle contient donc $[\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_0]$.

On pose $E^1 := E$, $E^{i+1} := \mathfrak{n}_0\ E^i$ pour $i \geq 1$, $\overline{\overline{E}}_i := E^i/E^{i+1}$ et $\overline{\overline{E}} := \bigoplus_{i\geq 1} \overline{\overline{E}}_i$. L'espace vectoriel $\overline{\overline{E}}$ est un $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}_0$-module gradué, où $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}_0$ est l'algèbre de Lie filiforme graduée associée à la filtration centrale descendante de $\mathfrak{n}_0$ (voir A.1). Montrons tout d'abord le lemme:

Lemme : *$\overline{\overline{E}}$ est un $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}_0$-module gradué fil fidèle de dimension $n+1$.*

Démonstration : L'élément Z est dans $(\mathfrak{n}_0)^{n-1}$. On peut donc écrire, avec α, β, γ dans $\mathbb{R}$:

$$Ze_1 = \alpha e_n + \beta e_{n+1} \qquad \text{et} \qquad Ze_2 = \gamma e_{n+1} \ .$$

Comme Z est dans $\mathfrak{p}$, il n'a pas de zéros dans $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-2}$. Donc $\alpha \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. Ceci n'est possible que si , pour $1 \leq i \leq n+1$, $\dim \overline{\overline{E}}_i = 1$. Donc $\overline{\overline{E}}$ est un module fil. L'inégalité $\alpha \neq 0$ prouve aussi que l'action induite par Z dans $\overline{\overline{E}}$ est non nulle et donc que $\overline{\overline{E}}$ est un $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}_0$-module fidèle. Ce qui prouve le lemme.

Terminons la démonstration du théorème 1 dans ce dernier cas. Soit Y un élément de $(\mathfrak{n}_0)^{n-2}$ qui n'est pas colinéaire à Z. Le corollaire A.2 prouve que, d'une part, n est pair supérieur ou égal à 4 et, en particulier Y est dans $\mathfrak{p}$, et que, d'autre part, on a l'égalité $Ye_2 = \lambda e_{n+1}$ avec λ dans $\mathbb{R}$. Quitte à remplacer Y par $Y - \frac{\lambda}{\gamma} Z$, on peut supposer que $Ye_2 = 0$: le champ de vecteur induit par Y s'annule sur $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-2}$. Cette contradiction termine la démonstration du théorème 1.

5.4 La nilvariété de Heisenberg de dimension 5.

Une nilvariété de Heisenberg est une nilvariété $W_0 \simeq \Gamma\backslash N_0$ telle que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_0$ est une algèbre de Heisenberg de dimension $2k+1$: elle admet une base $X_1, \cdots, X_k$, $Y_1, \cdots, Y_k, Z$ avec, pour seuls crochets non nuls, $[X_i, Y_i] = Z$ lorsque $1 \leq i \leq k$.

L'exemple suivant prouve qu'il existe des nilvariétés $\Gamma\backslash N_0$ telles que N_0 a un centre de dimension 1 qui ne satisfont pas la conclusion du théorème 1.

Exemple : *Il existe, sur les nilvariétés de Heisenberg de dimension 5, des structures projectives à holonomie unipotente qui ne sont pas invariantes à gauche.*

Rappelons que le groupe $N_6^{\mathbb{R}} = \{$matrices 6×6 unipotentes triangulaires inférieures $\}$ agit sur la sphère $\mathbb{S}^5 \simeq \mathbb{R}^6 - \{0\}/_{\mathbb{R}_+^*}$ en préservant la sphère $\mathbb{S}^3 := \{\mathbb{R}_+^*(x_1, \cdots, x_6) \ / \ x_1 = x_2 = 0\}$. Pour construire notre exemple, nous utiliserons le lemme:

Lemme : *Il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{n}_0$ de $\mathfrak{n}_6^{\mathbb{R}}$ isomorphe à l'algèbre de Heisenberg de dimension 5 et un idéal $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{n}_0$ de dimension 4 tels que*

i) L'action sur $\mathbb{S}^5 - \mathbb{S}^3$ du groupe correspondant Q est propre.

ii) Le centralisateur de $\mathfrak{n}_0$ dans $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{R})$ est inclus dans $\mathfrak{n}_6^{\mathbb{R}}$.

Construction de l'exemple : Prenons un réseau Γ_1 de N_0 tel que $\Gamma_N := \Gamma_1 \cap Q$ est un réseau de Q. Remarquons que Γ_1/Γ_0 est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et notons $\gamma \mapsto n_\gamma$ un morphisme de Γ_1 dans $\mathbb{Z}$ dont le noyau est Γ_N. Notons τ un générateur du π_1 de $\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3$. Comme $N_6^{\mathbb{R}}$ est simplement connexe, il agit aussi sur la variété projective $\widetilde{\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3}$ revêtement universel de $\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3$. Soit

$$\Gamma := \{\gamma\ \tau^{n_\gamma} \in Is(\widetilde{\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3})\ /\ \gamma \in \Gamma_1\}\ .$$

Le quotient $W_0 := \Gamma\backslash(\widetilde{\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3})$ est une nilvariété de Heisenberg munie d'une structure projective qui n'est isomorphe à aucune structure projective invariante à gauche.

En effet , sinon il existerait un sous-groupe de Lie nilpotent connexe N_0' de $Is(\widetilde{\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3})$ qui contiendrait Γ et agirait simplement transitivement sur $\widetilde{\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3}$. L'adhérence de Zariski de son image $h(N_0')$ contiendrait N_0 et serait donc unipotente d'après ii). On aurait alors $h(N_0') = N_0 \subset N_6^{\mathbb{R}}$. Mais le groupe $N_6^{\mathbb{R}}$ n'agit pas transitivement sur $\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3$. Contradition.

Démonstration du lemme : Prenons

$$\mathfrak{n}_0 = \{Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & b+c & a & b & 0 & 0 \\ -b-c & e & c & d & 0 & 0 \end{pmatrix}\ /\ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5\}$$

et $\mathfrak{q} = \{Y \in \mathfrak{n}_0\ /\ a = d\}$. On vérifie aisément que $\mathfrak{n}_0$ est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg, que son centralisateur dans $\mathfrak{sl}(6,\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathfrak{n}_6^{\mathbb{R}}$ et que $\mathfrak{q}$ est un idéal de $\mathfrak{n}_0$.

Vérifions la propriété i). Pour cela, notons encore $(e_1,\cdots,e_6)$ la base canonique de $E := \mathbb{R}^6$ et E^3 le sous-espace vectoriel engendré par $(e_3,\cdots,e_6)$. Le couple $(\mathfrak{n}_0,\mathfrak{q})$ a été choisi de sorte que le fait suivant, dont la vérification est un calcul laissé au lecteur, soit vrai:

Fait : *Pour tout élément non nul Y de $\mathfrak{q}$, le noyau $Ker(Y)$ est inclus dans E^3.*

Pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2-\{0\}$, on pose $F_{(x,y)} := xe_1 + ye_2 + E^3$. Ce sont des espaces affines stables par Q. Le fait précédent prouve que les orbites de Q dans $E-E^3$ sont de dimension 4. Ce sont donc les espaces $F_{(x,y)}$. Donc l'application

$$\begin{array}{ccc} Q \times (\mathbb{R}^2-\{0\}) & \longrightarrow & E-E^3 \\ (q,(x,y)) & \longmapsto & q\ (xe_1+ye_2) \end{array}$$

est un difféomorphisme. On en déduit que Q agit proprement sur $\mathbb{S}^5-\mathbb{S}^3$. Ce qui termine la démonstration du lemme.

Appendice: Modules fils sur les algèbres de Lie filiformes.

Le but de cet appendice est de décrire les modules gradués fils sur les algèbres de Lie filiformes graduées engendrées par leurs éléments de degré 1. Cet appendice complète le §3.4 de [Be] et sera appliqué en 5.3 à l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_0$.

A.1 Algèbres de Lie filiformes.

Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n sur un corps K de caractéristique 0 et $\mathfrak{n}^i$ la suite centrale descendante: $\mathfrak{n}^1 := \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^{i+1} := [\mathfrak{n}^1, \mathfrak{n}^i]$, pour $i \geq 1$. Soient $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}_i := \mathfrak{n}^i/\mathfrak{n}^{i+1}$ et $\overline{\overline{\mathfrak{n}}} := \bigoplus_{i\geq 0} \overline{\overline{\mathfrak{n}}}_i$: c'est une algèbre de Lie graduée sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$; elle est engendrée par ses éléments de degré 1. Soit $l_\mathfrak{n} := sup\{i \ / \ \mathfrak{n}^i \neq 0\}$ la longueur de la suite centrale descendante. On a bien sûr $l_\mathfrak{n} \leq n - 1$.

Définition: ([Ve]) $\mathfrak{n}$ est dite filiforme si $n \geq 3$ et si $l_\mathfrak{n} = n - 1$.

On a alors, pour $i = 2, \cdots, n$, codim$(\mathfrak{n}^i) = i$.
L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est filiforme si et seulement si $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}$ est filiforme.

Exemples: - Soit $\mathfrak{f}_n$ l'algèbre de Lie graduée de base $T, X = X_1, \cdots, X_{n-1}$, avec $n \geq 3$ telle que $d^\circ T = d^\circ X = 1$ et

$$\begin{array}{rcll} [T, X_i] & = & X_{i+1} & \text{pour } i = 1, \cdots, n-2 \\ [X_i, X_j] & = & 0 & \text{pour } i \ , \ j \geq 1 \end{array}$$

- Soit $\mathfrak{g}_{2q}$ l'algèbre de Lie graduée de base $T, X = X_1, \cdots, X_{2q-2}, Y_{2q-1}$, avec $q \geq 3$ telle que $d^\circ T = d^\circ X = 1$ et

$$\begin{array}{rcll} [T, X_i] & = & X_{i+1} & \text{pour } i = 1, \cdots, 2q-3 \\ [T, X_{2q-2}] & = & 0 & \\ [X_i, X_j] & = & (-1)^i \delta_{i,2q-1-j} Y_{2q-1} & \text{pour } i \ , \ j \geq 1 \end{array}$$

Lemme : *([Ve]) Toute algèbre de Lie filiforme graduée engendrée par ses éléments de degré 1 est isomorphe à $\mathfrak{f}_n$ pour $n \geq 3$ ou à $\mathfrak{g}_{2q}$ pour $q \geq 3$.*

A.2 Modules gradués fils.

Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie filiforme. Un $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}$-module gradué $V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ est dit *fil* si, pour tout i, $dimV_i \leq 1$; il est dit *indécomposable* s'il n'est pas somme directe de deux sous-modules gradués non nuls. Pour décrire les $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}$-modules fils, il suffit de décrire ceux qui sont indécomposables et fidèles, car un $\mathfrak{f}_n$-module (resp. $\mathfrak{g}_n$-module) qui n'est pas fidèle est un $\mathfrak{f}_{n-1}$-module.

Soit donc V un $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}$-module gradué fil indécomposable et fidèle de dimension p, et $v_1, \cdots, v_p$ une base homogène de V telle que $d^\circ v_i = i$. Pour définir le module V, il suffit de se donner les éléments $\lambda_i \in \mathbb{P}^1 := K \cup \{\infty\}$, pour $i = 1, \cdots, p-1$, tels que $Xv_i = \lambda_i T v_i$ (lorsque $\lambda_i = \infty$, cette égalité doit se lire: $Tv_i = 0$); en effet, comme V est indécomposable, la famille Tv_i, Xv_i engendre V_{i+1} .

Lorsque $\overline{\overline{\mathfrak{n}}} = \mathfrak{f}_n$, ces modules sont classifiés dans le §3.4 de [Be].

Lorsque $\overline{\overline{\mathfrak{n}}} = \mathfrak{g}_{2q}$, voici la classification.

Proposition : *Soient $q \geq 3$ et V un $\mathfrak{g}_{2q}$-module gradué fil indécomposable et fidèle, alors V est un des modules du tableau ci-dessous.*

Dans ce tableau, le diagramme associé à chaque module est construit de la façon suivante : un arc relie les $i^{ème}$ et $(i+1)^{ème}$ points si et seulement si $Tv_i \neq 0$; un arc en pointillé signifie que Tv_i peut être nul ou non nul. Et de même pour les arcs avec Xv_i .

NOM	DEFINITION	PARAMETRE	DIAGRAMME	DIM
A_α^{2q}	$\lambda_i = \alpha\delta_{i,1} - \alpha\delta_{i,2q-1}$	$\alpha \in \mathbb{P}^1 - \{0\}$		$2q$
B_α^{2q}	$\lambda_i = (2q-2)\alpha\delta_{i,1} + \alpha\delta_{i,2q-2}$	$\alpha \in \mathbb{P}^1 - \{0\}$		$2q$
C_α^{2q}	$\lambda_i = \alpha\delta_{i,2} + (2q-2)\alpha\delta_{i,2q-1}$	$\alpha \in \mathbb{P}^1 - \{0\}$		$2q$
D^{2q+1}	$\lambda_i = \infty\delta_{i,2} + \infty\delta_{i,2q-1}$			$2q+1$
$\mathfrak{g}_{2q}$-MODULES FILS FIDELES INDECOMPOSABLES				

Corollaire : *Soient $\overline{\overline{\mathfrak{n}}} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \overline{\overline{\mathfrak{n}}}_i$ une algèbre de Lie filiforme graduée de dimension n engendrée par ses éléments de degré 1 et $V = \bigoplus_{i=1}^{n+1} V_i$ un $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}$-module gradué fil fidèle de dimension $n+1$. Alors n est pair et $\overline{\overline{\mathfrak{n}}}_{n-2}V_2 = 0$.*

Démonstration du corollaire : Si $\overline{\overline{\mathfrak{n}}} = \mathfrak{f}_n$, la proposition 3.4 de [Be] prouve que n est pair et que V est un module, appelé $D_{\lambda,\lambda}^{n+1}$, qui a pour diagramme

On a alors $X_{n-2}V_2 = (adT)^{n-3}(X)\ V_2 = 0$.

Si $n = 2q \geq 6$ et $\overline{\overline{\mathfrak{n}}} = \mathfrak{g}_{2q}$, le lemme prouve que V est le module D^{2q+1} qui a pour diagramme

On a encore $X_{n-2}V_2 = (adT)^{n-3}(X)\ V_2 = 0$.

Démonstration de la proposition : On suit celle de la proposition 3.4 de [Be]. On a bien sûr $p := \dim(V) \geq 2q$. On choisit μ dans $K - \{0\}$ tel que, pour tout $i = 1, \cdots, p-1$, $\mu \neq 1/\lambda_i$, on pose $T' = T - \mu X$ et on choisit la base v_i de sorte que $T'v_i = v_{i+1}$. On a alors $Xv_i = \lambda_i' v_{i+1}$ où $\lambda_i' = \lambda_i/(1-\mu\lambda_i)$. On a les relations:

$$E_i^r \quad : \quad [X_1, X_{r-1}]\ v_i \ = \ 0 \quad , \text{pour } r = 3, \cdots, 2q-2 \text{ et } i = 1, \cdots, p-r$$

$$F_i^{2q-1} \quad : \quad [T, X_{2q-2}]\ v_i \ = \ 0 \quad , \text{pour } i = 1, \cdots, p-2q+1.$$

Ces relations se réécrivent:

$$E_i^r \quad : \quad \lambda'_i(\textstyle\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j C_{r-2}^j \lambda'_{i+j+1}) \;=\; \lambda'_{i+r-1}(\textstyle\sum_{j=0}^{r-2}(-1)^j C_{r-2}^j \lambda'_{i+j})$$

$$F_i^{2q-1} \quad : \quad (1+\mu\lambda'_i)(\textstyle\sum_{j=0}^{2q-3}(-1)^j C_{2q-3}^j \lambda'_{i+j+1}) \;=\; (1+\mu\lambda'_{i+2q-2})(\textstyle\sum_{j=0}^{2q-3}(-1)^j C_{2q-3}^j \lambda'_{i+j}).$$

a) Montrons qu'il existe au moins un λ'_i nul. Sinon, soit $\mu'_i = 1/\lambda'_i$, l'équation E_i^3 s'écrit $\mu'_i + \mu'_{i+2} = 2\mu'_{i+1}$. Les μ'_i sont en progression arithmétique: on peut trouver α, β dans K tels que, pour tout i, $\mu'_i = \alpha i + \beta$. Posons $w_i = \lambda'_1 \cdots \lambda'_{i-1} v_i$. On calcule alors

$$\begin{array}{rcll} T\ w_i &=& (\mu'_i + \mu) w_{i+1} & , \\ X\ w_i &=& w_{i+1} & \text{puis} \\ X_j\ w_i &=& (j-1)!\ \alpha^{j-1} w_{i+j} & \text{et} \\ [T, X_{2q-2}]\ w_1 &=& (2q-2)!\ \alpha^{2q-2} w_{2q} & . \end{array}$$

Ceci contredit l'égalité F_1^{2q-1}.

b) Montrons que parmi deux λ'_i consécutifs, il y en a au moins un qui est nul. Sinon, grâce à a) , on pourrait remplacer V ou son dual par un sous-quotient de dimension 4 tel que $\lambda'_1\lambda'_2 \neq 0$ et $\lambda'_3 = 0$. Mais alors l'équation E_1^3 s'écrit $\lambda'_1\lambda'_2 = 0$. Contradiction.

c) Montrons que sur $2q-1$ valeurs λ'_i consécutives, au moins deux sont non nulles. Sinon on pourrait remplacer V par un sous-quotient de dimension $2q$ tel que $\lambda'_1 = \cdots = \lambda'_{l-1} = 0$, $\lambda'_l \neq 0$, $\lambda'_{l+1} = \cdots = \lambda'_{2q-1} = 0$, avec $1 \leq l \leq 2q-1$. Mais alors l'équation F_1^{2q-1} s'écrit $\lambda'_l = 0$. Contradiction.

d) On peut donc trouver $r, s \geq 1$ tels que $\lambda'_r \neq 0$, $\lambda'_{r+1} = \cdots = \lambda'_{r+s-1} = 0$, $\lambda'_{r+s} \neq 0$. Montrons que $s = 2q-3$ ou $2q-2$. D'après c), on a $s \leq 2q-2$. Si $s \leq 2q-4$, on pourrait remplacer V ou son dual par un sous-quotient de dimension $s+3$ tel que $\lambda'_1 \neq 0$, $\lambda'_2 = \cdots = \lambda'_s = 0$, $\lambda'_{s+1} \neq 0$, $\lambda'_{s+2} = 0$. Mais alors l'équation E_1^{s+2} s'écrit $\lambda'_1\lambda'_{s+1} = 0$. Contradiction.

Il résulte de cette discussion que les entiers r et s ne dépendent que de V et qu'on est dans un des quatre cas suivants:

i) ($s = 2q-2$, $r = 1$, $p = 2q$). L'équation F_1^{2q-1} s'écrit $\lambda_1 = -\lambda_{2q-1} \neq 0$. Le module V est de type A.

ii) ($s = 2q-3$, $r = 1$, $p = 2q$). L'équation F_1^{2q-1} s'écrit $\lambda_1 = (2q-3)\lambda_{2q-2} \neq 0$. Le module V est de type B.

iii) ($s = 2q-3$, $r = 2$, $p = 2q$). L'équation F_1^{2q-1} s'écrit $\lambda_{2q-1} = (2q-3)\lambda_2 \neq 0$. Le module V est de type C.

iv) ($s = 2q-3$, $r = 2$, $p = 2q+1$). Les équations F_1^{2q-1} et F_2^{2q-1} s'écrit $\lambda_{2q-1} = (2q-3)\lambda_2$ et $\lambda_2 = (2q-3)\lambda_{2q-1}$. Donc $\lambda_2 = \lambda_{2q-1} = \infty$. Le module V est de type D.

Ceci termine la démonstration de la proposition.

Références.

[Be] **Y.Benoist** - Une nilvariété non affine, à paraitre au Jour. Diff. Geom. et C.R.A.S 315 (1992) p.983-986.

[F-G-H] **D.Fried, W. Goldman, M.Hirsch** - Affine manifolds with nilpotent holonomy, Comm. Math. Helv. 56 (1981) p.487-523.

[Go] **W.Goldman** - Convex real projective structures on compact surfaces, Jour. Diff. Geom. 31 (1990) p.791-845.

[G-H1] **W. Goldman, M.Hirsch** - The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds, Trans. Am. Math. Soc. 286 (1984) p.629-649.

[G-H2] **W. Goldman, M.Hirsch** - Affine manifolds and orbits of algebraic groups, Trans. Am. Math. Soc. 295 (1986) p.175-198.

[Iv] **B.Iversen** - Cohomology of sheaves, Springer (1986).

[N-Y] **T.Nagano, K.Yagi** - The affine structure on the real two torus, Osaka Jour. Math. 11 (1974) p.181-210.

[Ra] **M.Raghunatnan** - Discrete subgroups of Lie groups, Springer (1972).

[Se] **J.P.Serre** - Cohomologie des groupes discrets, Annals of Math. Studies 70 (1971) p.77-169.

[Sm] **J.Smillie** - Affine manifolds with diagonal holonomy I, preprint (1977).

[S-T] **D.Sullivan, W. Thurston** - Manifolds with canonical coordinate charts: some examples, L'Ens. Math. 29 (1983) p.15-25.

[Ve] **M.Vergne** - Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude des algèbres de Lie nilpotentes, Bull. Soc. Math. Fr. 98 (1970) p.81-116.

UA 748 du CNRS

Université Paris 7
UFR de Mathématiques
2, place Jussieu
75251 Paris cedex 05.

benoist @ mathp7.jussieu.fr