ACTIONS PROPRES DE GROUPES LIBRES SUR LES ESPACES HOMOGENES REDUCTIFS.

Yves BENOIST

Résumé.

Soient G un groupe de Lie réel semisimple linéaire et H un sous-groupe réductif dans G. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-groupe discret libre non abélien Γ de G agissant proprement sur G/H. Par exemple un tel groupe Γ existe pour $\mathrm{SL}(2n, R)/\mathrm{SL}(2n-1, R)$ mais non pour $\mathrm{SL}(2n+1, R)/\mathrm{SL}(2n, R)$ avec $n \geq 1$.

PROPER ACTIONS OF FREE GROUPS ON REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES.

Abstract.

Let G be a linear semisimple real Lie group and H be a reductive subgroup of G. We give a necessary and sufficient condition for the existence of a non abelian free discrete subgroup Γ of G acting properly on G/H. For instance, such a group Γ does exist for $\mathrm{SL}(2n, R)/\mathrm{SL}(2n-1, R)$ but does not for $\mathrm{SL}(2n+1, R)/\mathrm{SL}(2n, R)$ with $n \geq 1$.

1. Actions propres de groupes libres

Soient G un groupe de Lie réel semisimple linéaire, connexe et non compact, H un sous-groupe fermé connexe réductif dans G (c'est-à-dire tel que l'action adjointe de H dans l'algèbre de Lie de G est semisimple). On sait que G contient un sous-groupe discret infini Γ qui agit proprement sur G/H si et seulement si $\mathrm{rang}_R(G) \neq \mathrm{rang}_R(H)$: c'est le phénomène de Calabi-Marcus ([7]).

Le but principal de cette note est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-groupe discret libre non abélien Γ de G qui agisse proprement sur G/H.

Pour énoncer cette condition, nous avons besoin de quelques notations. Soient A_H un sous-espace de Cartan de H, A un sous-espace de Cartan de G contenant A_H, $\Sigma := \Sigma(A, G)$ le système de racines restreintes de A dans G, W le groupe de Weyl de Σ, Σ^+ un choix de racines positives, $A^+ := \{a \in A \;/\; \forall \chi \in \Sigma^+ \;,\; \chi(a) \geq 1 \;\}$ la chambre de Weyl fermée associée, w_o l'élément de W tel que, pour tout a dans A^+, $w_o(a^{-1})$ est dans A^+. Notons enfin $B^+ := \{a \in A^+ \;/\; a = w_o(a^{-1})\}$.

Remarquons que B^+ diffère de A^+ si et seulement si l'une des composantes connexes du diagramme de Dynkin de Σ est de type A_n avec $n \geq 2$, D_{2n+1} avec $n \geq 1$ ou E_6.

Un groupe Γ est dit virtuellement abélien s'il contient un sous-groupe abélien d'indice fini.

Théorème: *Avec ces notations, G contient un sous-groupe discret Γ non virtuellement abélien qui agit proprement sur G/H si et seulement si, pour tout w dans W, $w\, A_H$ ne contient pas B^+.*

Dans ce cas, on peut choisir Γ libre et Zariski dense dans G.

Exemple 1: Voici donc des espaces homogènes pour lesquels un tel sous-groupe Γ n'existe pas:

- $\mathrm{SL}(n, R)/(\mathrm{SL}(p, R) \times \mathrm{SL}(n-p, R))$ où $1 \leq p < n$ et $p(n-p)$ est pair,
- $\mathrm{SL}(2p, R)/\mathrm{Sp}(p, R)$, $\mathrm{SL}(2p, R)/\mathrm{SO}(p, p)$ et $\mathrm{SL}(2p+1, R)/\mathrm{SO}(p, p+1)$ où $p \geq 1$,
- $\mathrm{SO}(p+1, q)/\mathrm{SO}(p, q)$ lorsque $p \geq q$ ou lorsque $p = q-1$ est pair,
- G_C/H_C où G_C est un groupe de Lie simple complexe et H_C est l'ensemble des points fixes d'une involution complexe de G_C, à l'exception de $\mathrm{SO}(4n, C)/(\mathrm{SO}(p, C) \times \mathrm{SO}(4n-p, C))$ pour $n \geq 2$ et p impair.

Exemple 2: Voici maintenant des espaces homogènes pour lesquels un tel sous-groupe Γ existe:

- $\mathrm{SL}(n,R)/(\mathrm{SL}(p,R)\times\mathrm{SL}(n-p,R))$ où $1\leq p<n$ et $p(n-p)$ est impair,
- $\mathrm{SL}(n,R)/\mathrm{SO}(p,n-p)$ où $1\leq p<E(n/2)$,
- $\mathrm{SO}(p+1,q)/\mathrm{SO}(p,q)$ lorsque $0\leq p\leq q-2$ ou lorsque $p=q-1$ est impair,
- $\mathrm{SO}(4n,C)/(\mathrm{SO}(p,C)\times\mathrm{SO}(4n-p,C))$ pour $n\geq 2$ et p impair.

2. Quotients compacts.

On dit que l'espace homogène G/H admet un quotient compact s'il existe un sous-groupe discret Γ de G agissant proprement sur G/H et tel que le quotient $\Gamma\backslash G/H$ est compact.

Déterminer si un espace homogène donné admet un quotient compact est une question fondamentale. On ne connait que des réponses partielles (voir [7],[8],[9] et [1]). L'espace homogène le plus simple pour lequel la réponse n'est pas déjà connue est $\mathrm{SL}(3,R)/\mathrm{SL}(2,R)$ (voir par exemple la question 3 de l'introduction de [13]). Notre théorème permet en particulier de traiter cet exemple.

Corollaire 1: *On garde les mêmes notations et on suppose que G/H est non compact et que, pour un bon choix de Σ^+, A_H contient B^+.*

Alors G/H n'a pas de quotient compact.

En particulier, aucun des espaces homogènes de l'exemple 1 n'a de quotient compact.

Corollaire 2: *Soient G_C un groupe de Lie simple complexe, σ une involution complexe de G_C et $H_C:=\{g\in G_C\ /\ \sigma(g)=g\ \}$. Alors l'espace symétrique G_C/H_C n'a pas de quotient compact sauf éventuellement lorsque $G_C/H_C=\mathrm{SO}(4n,C)/\mathrm{SO}(4n-1,C)$ pour $n\geq 2$.*

Pour des résultats antérieurs dans cette direction, voir ([8] ex. 1.9).

Voici une façon plus géométrique d'énoncer le corollaire 1 pour l'espace homogène $S^{p,q}:=\mathrm{SO}(p+1,q)/\mathrm{SO}(p,q)$.

Corollaire 3: *Il n'existe pas de variété pseudoriemannienne V compacte complète, de signature (p,q), à courbure sectionnelle constante $+1$ lorsque p est pair et égal à $q-1$.*

En effet, une telle variété V serait un quotient compact de $S^{p,q}$.

On sait par ailleurs ([3],[10],[12]) qu'il n'existe pas de telles variétés V lorsque $p \geq q$ (phénomène de Calabi-Marcus) ou lorsque $p\,q$ est impair (à cause de la formule de Gauss-Bonnet).

Lorsque $p = 1$ et $q = 2n$ (resp. lorsque $p = 3$ et $q = 4n$), avec $n \geq 1$ il existe de nombreuses telles variétés V car le groupe $\mathrm{U}(1, n)$ (resp. $\mathrm{Sp}(1, n)$) agit proprement et transitivement sur $S^{p,q}$.

Donnons quelques étapes importantes de la démonstration du théorème.

3. Critère de Propreté.

Soient K un sous-groupe compact maximal de G pour lequel on a la décomposition de Cartan: $G = K\,A^+K$ et $\mu : G \to A^+$ la projection de Cartan: pour g dans G, $\mu(g)$ est l'unique élément de $KgK \cap A^+$ (voir [6] ch.9). Par exemple, si $G = \mathrm{SL}(n, R)$, on peut prendre $K = \mathrm{SO}(n)$ et $A^+ = \{\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in G \;/\; \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \;\; > 0\}$; on a alors $\mu(g) = \mathrm{diag}(\sigma_1(g), \ldots, \sigma_n(g))$ où $\sigma_i(g)^2$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de ${}^t g\, g$.

Soient H_1, H_2 deux sous-groupes fermés de G. On démontre tout d'abord un critère pour que H_1 agisse proprement sur G/H_2. Ce critère ne dépend que des parties $\mu(H_1)$ et $\mu(H_2)$ et du groupe commutatif A. Il généralise deux critères connus, l'un dû a Kobayashi ([7]) lorsque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de Lie réductifs et l'autre, dû à Friedland ([4]) lorsque $G = \mathrm{SL}(n, R)$ et $H_2 = \mathrm{SL}(p, R) \times I_{n-p}$. Le voici:

Proposition 1: *H_1 agit proprement sur G/H_2 si et seulement si, pour tout compact M de A, l'ensemble $\mu(H_1) \cap \mu(H_2)M$ est compact.*

Exemple: Un sous groupe discret Γ de $\mathrm{SL}(2p, R)$ agit proprement sur $\mathrm{SL}(2p, R)/\mathrm{Sp}(p, R)$ si et seulement si, pour tout $R > 0$, l'ensemble
$\Gamma_R := \{g \in \Gamma \;/\; \frac{1}{R} \leq \sigma_i(g)\, \sigma_{2p+1-i}(g) \leq R \;,\; \forall i = 1, \ldots, p \;\}$ est fini.

4. La projection de Cartan de Γ.

La deuxième étape consiste à étudier l'ensemble $\mu(\Gamma)$.

Proposition 2: *Soit Γ un sous groupe discret de G non virtuellement abélien. Alors il existe un compact M de A tel que $\mu(\Gamma) \cap B^+M$ est non compact.*

L'implication directe dans le théorème est une conséquence des propositions 1 et 2.

La proposition 2 se déduit du lemme suivant appliqué avec $g_2 = g_1^{-1} \in \Gamma$, $F = \Gamma$ et $f' = f^{-1}$.

Lemme: *Soient g_1 , g_2 deux éléments de G et F une partie de G. Alors il existe une partie non vide F' de F, Zariski ouverte dans F telle que, pour tout f, f' dans F', il existe un compact $M_{f,f'}$ de A tel que, pour tout $p \geq 1$ on a*

$$\mu(g_1^p f\, g_2^p)/\mu(g_1^p f' g_2^p) \in M_{f,f'}$$

Dans cet énoncé, l'expression "Zariski ouvert dans F" signifie ouvert pour la topologie induite sur F par la topologie de Zariski du groupe G.

5. Construction de groupes libres.

Dans la troisième étape, on construit des sous-groupes libres Zariski denses de G en utilisant des idées de [2], [5] et [11].

Notons log l'application logarithme qui identifie A à son algèbre de Lie a. On dira qu'une partie Ω de A^+ est un cône convexe si $\log(\Omega)$ est un cône convexe de a. Par exemple A^+ et B^+ sont des cônes convexes de A. On note $w_o(\Omega^{-1}) := \{w_o(a^{-1}) \;/\; a \in \Omega\}$.

Proposition 3: *Soit Ω un cône ouvert convexe non vide de A^+ tel que $w_o(\Omega^{-1}) = \Omega$. Alors il existe un sous-groupe discret Γ libre à deux générateurs et Zariski dense dans G tel que $\mu(\Gamma)$ est inclus dans $\Omega \cup \{e\}$.*

L'implication réciproque du théorème est une conséquence des propositions 1 et 3.

Remarque: Soient k un corps local non archimédien et ω_o une uniformisante de k. Le théorème et les trois propositions sont encore vrais si on remplace G par le groupe des k-points d'un k-groupe semi-simple simplement connexe, H par un sous-groupe réductif de G, A_H et A par des sous-tores déployés maximaux de H et G respectivement et, A^+ par $\{a \in A \;/\; \forall \chi \in \Sigma^+ \;,\; \chi(a) \in \omega_o^{N}\}$.

Les démonstrations détaillées feront l'objet d'un article.

Références.

[1] **Y.Benoist, F.Labourie** - Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes, Publ. Math. I.H.E.S. 76 (1992) p.99-109.

[2] **Y.Benoist, F.Labourie** - Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Inv. Math.111 (1993) p.285-308.

[3] **E.Calabi- L.Marcus** - Relativistic space forms, Ann. of Math. 75 (1962) p.63-76.

[4] **S.Friedland** - Properly discontinuous groups on certain matrix homogeneous spaces, preprint (1993).

[5] **I.Gol'dsheid, G.Margulis** - Lyapounov indices of a product of random matrices, Russ. Math.Surv. 44 (1989) p.11-71.

[6] **S.Helgason** - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press (1978).

[7] **T.Kobayashi** - Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. 285 (1989) p.249-263.

[8] **T.Kobayashi** - A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, Duke Math. Jour. 67 (1992) p.653-664.

[9] **T.Kobayashi, K.Ono** - Note on Hirzebruch's proportionality principle, Jour. Fac. Sc. Univ. Tokyo 37 (1990) p.31-87.

[10] **R.Kulkarni** - Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, Adv. in Math. 40 (1981) p.10-51.

[11] **J.Tits** - Free subgroups in linear groups, Jour. of Algebra 20 (1972) p.250-270.

[12] **J.Wolf** - The Clifford-Klein space forms of indefinite metric, Ann. of Math. 75 (1962) p.77-80.

[13] **R.Zimmer** - Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces, Jour. of Amer. Math. Soc. 7 (1994) p.159-168.

URA 748 du CNRS

Université Paris 7
UFR de Mathématiques
75251 Paris cedex 05.

benoist@mathp7.jussieu.fr