PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES GROUPES LINEAIRES.

Yves BENOIST

Résumé.

Soient G un groupe de Lie réel linéaire réductif et Γ un sous-groupe Zariski-dense. Nous étudions certaines propriétés asymptotiques de Γ à travers l'ensemble des logarithmes des composantes radiales des éléments de Γ: nous montrons que le cône asymptote à cet ensemble est un cône convexe d'intérieur non vide stable par l'involution d'opposition. Réciproquement, tout cône convexe fermé de la chambre de Weyl positive qui est d'intérieur non vide et stable par l'involution d'opposition peut s'obtenir ainsi.

Nous relions ce cône limite et l'ensemble limite de Γ à l'ensemble des semigroupes ouverts de G qui rencontrent Γ.

Nous démontrons aussi des résultats analogues sur n'importe quel corps local.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF LINEAR GROUPS.

Abstract.

Let G be a reductive linear real Lie group and Γ be a Zariski dense subgroup. We study asymptotic properties of Γ through the set of logarithms of the radial components of the elements of Γ: we prove that the asymptotic cone of this set is a convex cone with non empty interior and is stable by the Cartan involution. Reciprocally any closed convex cone of the positive Weyl chamber whose interior is non empty and which is stable by the opposition involution can be obtained this way.

We relate this limit cone and the limit set of Γ to the set of open semigroups of G which meet Γ.

We also prove similar results over any local fields.

1. Introduction.

Le but de cet article est d'étudier certaines propriétés asymptotiques des sous-groupes Γ du groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ d'un espace vectoriel V de dimension finie sur le corps $k = \mathbb{R}$ (et plus généralement sur un corps local k) lorsque V est complètement réductible, c'est à dire somme directe de sous-espaces invariants irréductibles. Dans ce cas, l'adhérence de Zariski de Γ est réductive.

Il s'agit donc d'étudier les propriétés asymptotiques des sous-groupes Zariski denses du groupe G des k-points d'un k-groupe réductif.

1.1 Soient G un groupe de Lie réel réductif linéaire et connexe, Z son centre, A_G un sous-espace de Cartan de G, A^+ une chambre de Weyl fermée de A_G et K un sous-groupe compact maximal de G pour lequel on a la décomposition de Cartan: $G = K\,A^+K$. Notons $\mu : G \to A^+$ la projection de Cartan: pour g dans G, $\mu(g)$ est la composante radiale de g c'est à dire l'unique élément de $A^+ \cap KgK$. L'application logarithme log identifie A_G à son algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. Notons $\mathfrak{a}^+ := \log A^+$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$.

Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Nous nous intéressons aux propriétés asymptotiques de Γ. Comme μ est une application continue et propre, une partie de ces propriétés se lit sur les propriétés asymptotiques de l'ensemble $\log(\mu(\Gamma))$ des logarithmes des composantes radiales des éléments de Γ. Notre but est de décrire le cône asymptote à cet ensemble, c'est à dire le cône de $\mathfrak{a}$ formé des directions limites des suites d'éléments de cet ensemble qui partent à l'infini. Pour cela introduisons quelques notations.

Soient $\lambda : G \to A^+$ la projection naturelle qui se déduit de la décomposition de Jordan et $\imath : \mathfrak{a}^+ \to \mathfrak{a}^+$ l'involution d'opposition : pour g dans G, $\lambda(g)$ est l'unique élément de A^+ qui est conjugué à la composante hyperbolique g_h de g; pour X dans $\mathfrak{a}^+$, $\imath(X)$ est l'unique élément de $\mathfrak{a}^+$ qui est conjugué à $-X$. Notons ℓ_Γ le plus petit cône fermé de $\mathfrak{a}^+$ contenant $\log(\lambda(\Gamma))$. On l'appellera cône limite de Γ. Lorsque Γ est un sous-groupe de G, ce cône est invariant par l'involution d'opposition.

1.2 Un des résultats principaux de cet article est le suivant:

Théorème. *Soit G un groupe de Lie réel linéaire semisimple connexe.*
a) Soit Γ un sous-semigroupe Zariski-dense de G. Alors
α) Le cône asymptote à $\log(\mu(\Gamma))$ est le cône limite ℓ_Γ
β) Le cône limite ℓ_Γ est convexe et d'intérieur non vide.
b) Réciproquement, on suppose G non compact. Soit Ω un cône convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathfrak{a}^+$.
α) Alors il existe un sous-semigroupe discret et Zariski-dense Γ de G tel que $\ell_\Gamma = \Omega$.
β) Si en outre Ω est stable par l'involution d'opposition, on peut trouver un sous-groupe discret et Zariski-dense Γ de G tel que $\ell_\Gamma = \Omega$.

Exemple: Explicitons, pour un lecteur peu familier avec la théorie des groupes de Lie semisimples, ce théorème dans le cas particulier où $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Dans ce cas, $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des matrices diagonales de trace nulle que l'on identifie à l'hyperplan: $\mathfrak{a} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 + \cdots + x_n = 0 \ \}$ et $\mathfrak{a}^+$ est le cône convexe: $\mathfrak{a}^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{a} \ / \ x_1 \geq \cdots \geq x_n \ \}$ et l'involution d'opposition est donnée par l'application linéaire: $\imath(x_1, \dots, x_n) = (-x_n, \dots, -x_1)$. Pour g dans G, le vecteur $m_g := \log(\mu(g))$ est le vecteur de $\mathfrak{a}^+$ dont les coordonnées sont les logarithmes des valeurs propres de la matrice symétrique $({}^t g\, g)^{\frac{1}{2}}$ rangés par ordre décroissant et le vecteur $\ell_g := \log(\lambda(g)))$ est le vecteur de $\mathfrak{a}^+$ dont les coordonnées sont les logarithmes des modules des valeurs propres de g rangés par ordre décroissant. Le cône ℓ_Γ est tout simplement l'adhérence de l'ensemble des demidroites engendrées par les vecteurs non nuls ℓ_g pour g dans Γ.

1.3 Un deuxième concept qui reflète certaines propriétés asymptotiques de Γ est l'ensemble limite Λ_Γ : c'est une partie fermée de la variété drapeau complète de G, partie qui est classique pour G de rang réel un et qui a été introduite par Y.Guivarc'h pour $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. En général, cet ensemble diffère de celui, noté Λ_Γ^-, du semigroupe Γ^- formé des inverses des éléments de Γ.

Un troisième concept est l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ des directions limites de Γ: c'est l'ensemble des éléments hyperboliques g de G tels que tout semigroupe ouvert H de G qui contient g rencontre Γ. Heuristiquement, cet ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ décrit les directions à l'infini dans G vers lesquelles partent des suites d'éléments de Γ. Nous montrons comment décrire l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ à partir de Λ_Γ, Λ_Γ^- et L_Γ et inversement (théorème 6.4). En particulier, nous montrons:

- L'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ rencontre l'intérieur d'une chambre de Weyl f si et seulement si le "point de départ" y_f^- de f est dans Λ_Γ^- et le "point d'arrivée" y_f^+ est dans Λ_Γ.

- Dans ce cas, l'intersection $\mathcal{L}_\Gamma \cap f$ "ne dépend pas" du choix de la chambre: elle s'identifie naturellement au cône limite L_Γ.

1.4 Dans la suite du texte, nous démontrons aussi un analogue de ces résultats pour un groupe réductif sur un corps local k quelconque: dans ce cas, l'application logarithme est remplacée par une injection de la chambre de Weyl positive A^+ dans un cône $A^\times$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A^\bullet$ (ceux-ci s'identifient respectivement à $\mathfrak{a}^+$ et $\mathfrak{a}$ lorsque $k = \mathbb{R}$) et on définit encore des applications $\mu : G \to A^+$, $\lambda : G \to A^\times$, $\imath : A^\times \to A^\times$ (cf 2.3 et 2.4) et, pour tout sous-semigroupe Γ de G un cône limite L_Γ dans $A^\times$ (celui-ci s'identifie à ℓ_Γ lorsque $k = \mathbb{R}$). Par construction ce cône L_Γ est fermé et à support rationnel (i.e. L_Γ et $L_\Gamma \cap A^+$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $A^\bullet$). En outre, si Γ est discret, ce cône n'est pas central (i.e. n'est pas inclus dans le cone limite L_Z du centre de G). La principale différence, avec le cas où $k = \mathbb{R}$, est que le cône L_Γ peut être d'intérieur vide dans $A^\times$.

Dans ce cas, le théorème 1.2 devient:

Théorème. *Soient k un corps local non archimédien,* $\mathbf{G}$ *un k-groupe réductif connexe et $G = \mathbf{G}_k$.*

a) Soit Γ un sous-semigroupe Zariski-dense de G. Alors

α) Le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$ est le cône limite L_Γ.

β) Le cône limite L_Γ est convexe.
b) Réciproquement, soit Ω un cône convexe fermé non central à support rationnel de $A^\times$.
α) Alors il existe un sous-semigroupe discret et Zariski-dense Γ de G tel que $\ell_\Gamma = \Omega$.
β) Si en outre Ω est d'intérieur non vide et stable par l'involution d'opposition, on peut trouver un sous-groupe Γ discret et Zariski-dense Γ de G tel que $\ell_\Gamma = \Omega$.

Il est probable que dans cette dernière affirmation l'hypothèse "Ω d'intérieur non vide" est inutile (je l'ai vérifié pour $G = \mathrm{SL}(n,k)$ et Ω une demi-droite).

1.5 Les semigroupes ouverts de G jouent un rôle important dans ce travail. Ils seront une source d'exemples (cf 5.2 et 5.3) mais aussi un outil (cf 6.3). Un autre outil important pour les démonstrations est la notion de sous-semigroupe et de sous-groupe $(\theta\ ,\underline{\varepsilon})$-Schottky: il s'agit d'une généralisation des sous-groupes ε-Schottky que j'avais introduits dans [Be]. Ils seront une autre source d'exemples (cf. 5.1). Les sous-semigroupes $(\theta\ ,\underline{\varepsilon})$-Schottky interviendront aussi dans la démonstration de la convexité de L_Γ (cf 4.4). Citons [Ti 2], [Ma-So] et [A-M-S] où des notions proches sont utilisées.

Un mot sur le plan de l'article. La partie 2 est constituée essentiellement de rappels de [Be]. La partie 3 est consacrée à l'ensemble limite Λ_Γ, la partie 4 à la convexité de L_Γ, la partie 5 à la construction de sous-semigroupes et sous-groupes Γ de G dont le cône L_Γ est prescrit, la partie 6 aux propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$. Enfin, dans la partie 7, on vérifie que, lorsque $k = \mathbb{R}$, le cône L_Γ est d'intérieur non vide.

2. Préliminaires.

On rappelle dans cette partie quelques notations introduites dans [Be].

2.1 Corps locaux.

Soit k un corps local, i.e. $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{F}_p[T^{-1}, T]]$ pour un entier premier p. On note $|.|$ une valeur absolue continue sur k.

Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose $k^o =]0,\infty[$ et $k^+ = [1,\infty[$.

Lorsque k est non archimédien, on note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de k, $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ et on choisit une uniformisante, c'est à dire un élément u de $\mathcal{M}^{-1}$ qui n'est pas dans $\mathcal{O}$. On pose alors $k^o = \{\mathrm{u}^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $k^+ = \{\mathrm{u}^n / n \geq 0\}$.

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. A toute base $v_1, \dots, v_n$ de V on associe les normes sur V et End$V$ définies par, si $v = \sum_{1\leq i\leq n} x_i v_i$ est dans V et g est dans End$V$

$$\|v\| = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| \ \text{ et } \ \|g\| = \sup_{v\in V, \|v\|=1} \|g.v\| \ .$$

Deux bases différentes de V fournissent bien sûr des normes équivalentes.

On note $X = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de V. On définit une distance d sur X par

$$d(x_1, x_2) = \inf\{\|v_1 - v_2\| \ / \ v_i \in x_i \text{ et } \|v_i\| = 1 \ \ \forall i = 1,2\ \} \ .$$

Si X_1 et X_2 sont deux fermés de X, on note

$$\delta(X_1, X_2) = \inf\{d(x_1, x_2) \ / \ x_1 \in X_1 \ \ x_2 \in X_2\ \} \text{ et}$$

$$d(X_1,X_2)=\sup\{\delta(x_i,X_{3-i})\ /\ x_i\in X_i \text{ et } i=1\,,\,2\ \}$$

la distance de Hausdorff entre X_1 et X_2.

On note $\lambda_1(g)\geq\cdots\geq\lambda_n(g)$ la suite des modules des valeurs propres de g que l'on a rangés par ordre décroissant et répétés selon leur multiplicité. Bien sûr une valeur propre de g est dans une extension finie k' de k. On a muni implicitement cette extension de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de k.

2.2 Proximalité.

Un élément g de $\mathrm{End}(V)-0$ est dit "proximal dans $\mathbb{P}(V)$" ou "proximal" s'il a une seule valeur propre α telle que $|\alpha|=\lambda_1(g)$ et si cette valeur propre a multiplicité un. Cette valeur propre α est alors dans k. On note $x_g^+\in X$ la droite propre correspondante, $V_g^<$ l'hyperplan g-invariant supplémentaire à x_g^+ et $X_g^<:=\mathbb{P}(V_g^<)$.

On fixe $\varepsilon>0$ et on note

$$b_g^\varepsilon:=\{x\in X\ /\ d(x,x_g^+)\leq\varepsilon\}$$

$$B_g^\varepsilon:=\{x\in X\ /\ \delta(x,X_g^<)\geq\varepsilon\}\ .$$

Un élément proximal g est dit ε-proximal si $\delta(x_g^+,X_g^<)\geq 2\varepsilon$, $g(B_g^\varepsilon)\subset b_g^\varepsilon$ et $g|_{B_g^\varepsilon}$ est ε-Lipschitzienne. Le lemme suivant est facile (cf. le corollaire 6.3 de [Be]).

Lemme 2.2.1 *Pour tout $\varepsilon>0$, Il existe une constante $c_\varepsilon=c_\varepsilon(V)\in]0,1[$ telle que, pour toute transformation linéaire g de V ε-proximale, on a*

$$c_\varepsilon\|g\|\leq\lambda_1(g)\leq\|g\|\ .$$

Le lemme suivant est une variante de la proposition 6.4 de [Be]. Il se démontre de la même façon.

Lemme 2.2.2 *Pour tous $\varepsilon>0$, il existe des constantes $C_\varepsilon>0$ telles que, si $g_1,\ldots,g_l$ sont des transformations linéaires respectivement ε_1-proximale,..., ε_l-proximale de V vérifiant (en notant $g_0=g_l$)*

$$\delta(x_{g_{j-1}}^+,X_{g_j}^<)\geq 6\sup(\varepsilon_{j-1},\varepsilon_j)\ \text{ pour }\ j=1,\ldots,l\ \ .$$

Alors, pour tout $n_1,\ldots,n_l\geq 1$, le produit $g=g_l^{n_l}\cdots g_1^{n_1}$ est ε-proximal avec $\varepsilon=2\sup(\varepsilon_1,\varepsilon_l)$.

En outre, en posant $\lambda_1:=\prod_{1\leq j\leq l}\lambda_1(g_j)^{n_j}$ et $C:=\prod_{1\leq j\leq l}C_{\varepsilon_j}$, on a

$$\lambda_1(g)\in[\lambda_1C^{-1},\lambda_1C]\ \text{ et }\ \|g\|\in[\lambda_1C^{-1},\lambda_1C]\ .$$

Définition. *Soit $\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_j)_{j\in J}$ une famille finie ou infinie de cardinal $t\geq 2$ formée de réels positifs. On dit qu'un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ de $GL(V)$ de générateurs*

$(\gamma_j)_{j\in J}$ *est "$\underline{\varepsilon}$-Schottky sur $\mathbb{P}(V_i)$" si il vérifie les propriétés suivantes [On note $E_\Gamma := \{\gamma_j \,/\, j\in J\}$; (resp. $E_\Gamma := \{\gamma_j, \gamma_j^{-1} \,/\, j\in J\}$) et pour tout élément g de E_Γ dont l'indice est j, on note $\varepsilon_g = \varepsilon_j$].*

i) Pour tout g dans E_Γ, g est ε_g-proximal.

ii) Pour tout g, h dans E_Γ (resp. g, h dans E_Γ avec $g \neq h^{-1}$), $\delta(x_g^+, X_h^<) \geq$ $6\sup(\varepsilon_g, \varepsilon_h)$.

Remarque. Lorsque la famille $\underline{\varepsilon}$ est constante égale à un réel $\varepsilon > 0$, on dit que Γ est "ε-Schottky sur $\mathbb{P}(V_i)$" (dans [Be], ces groupes étaient appelés "ε-proximaux").

2.3 Décomposition de Cartan.

Pour tout k-groupe $\mathbf{G}$, on note G ou $\mathbf{G}_k$ l'ensemble de ses k-points.

Soit $\mathbf{G}$ un k-groupe réductif connexe, $\mathbf{Z}$ le centre de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{S}$ le k-sous-groupe dérivé de $\mathbf{G}$ de sorte que $\mathbf{G}$ est le "presque produit" de $\mathbf{S}$ et $\mathbf{Z}$. Soient $\mathbf{A}$ un tore k-déployé maximal de $\mathbf{G}$, $r = r_G$, r_S et r_Z les k-rangs de $\mathbf{G}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{Z}$ respectivement de sorte que $r = r_S + r_Z$. Soient $X^*(\mathbf{A})$ l'ensemble des caractères de $\mathbf{A}$ (c'est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang r), $E = X^*(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et E_S le sous-espace vectoriel de E engendré par les caractères triviaux sur $\mathbf{A} \cap \mathbf{Z}$. On note $\Sigma = \Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{G})$ l'ensemble des racines de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$: ce sont les poids non triviaux de $\mathbf{A}$ dans la représentation adjointe du groupe $\mathbf{G}$. Σ est un système de racines de E_S ([Bo-Ti] §5). On choisit un système de racines positives Σ^+, on note $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples et on pose

$$\begin{array}{rcl} A^o &=& \{a\in A \,/\, \forall\chi\in X^*(\mathbf{A}), \chi(a)\in k^o\} \\ A^+ &=& \{a\in A^o \,/\, \forall\chi\in \Sigma^+, \chi(a)\in k^+\} \\ A^{++} &=& \{a\in A^+ \,/\, \forall\chi\in \Sigma^+, \chi(a)\neq 1\} \,. \end{array}$$

Soient N le normalisateur de A dans G, L le centralisateur de A dans G et $W := N/L$ le petit groupe de Weyl de G: il s'identifie au groupe de Weyl du système de racines Σ. La partie A^+ s'appelle la chambre de Weyl positive. On a l'égalité $A^o = \cup_{w\in W} wA^+$. On munit E d'un produit scalaire W-invariant et on note $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ les poids fondamentaux de Σ. Ce sont les éléments de $X^*(\mathbf{A})$ tels que $\frac{2(\omega_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = \delta_{i,j}$ pour tout i,j. Ils forment une base de E_S.

Supposons maintenant qu'il existe un sous-groupe compact maximal K de G tel que $N = (N\cap K).A$ [cette hypothèse est anodine: elle est vérifiée lorsque $\mathbf{S}$ est simplement connexe; on se ramène à ce cas par des méthodes standards (voir [Mar] I.1.5.5 et I.2.3.1)]. On a alors l'égalité $G = KA^+K$ appelée *décomposition de Cartan* de G. Donc, pour tout g dans G il existe un élément $\mu(g)$ dans A^+ tel que g est dans $K\mu(g)K$. Cet élément $\mu(g)$ est unique. Nous appellerons *projection de Cartan* cette application $\mu : G \to A^+$. C'est une application continue et propre. Désormais, à chaque fois que nous parlerons de la projection de Cartan μ, nous supposerons implicitement vérifiée l'existence de ce sous-groupe compact K.

On appelle involution d'opposition l'application $\imath : A^+ \to A^+$ définie par $\imath(a) = \mu(a^{-1})$. On note $\alpha \to \alpha^-$ la bijection de Π aussi appelée involution d'opposition définie par $\alpha^-(a) = \alpha(\imath(a))$, pour tout a dans A^+.

2.4 Décomposition de Jordan.

Pour des commodités de language, nous allons injecter le semigroupe A^+ dans un cône convexe d'intérieur non vide $A^\times$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A^\bullet$ de dimension r. On définira alors une application $\lambda : G \to A^\times$.

Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose $A^\bullet = A^o$ et $A^\times = A^+$. L'identification de $A^\bullet$ avec son algèbre de Lie en fait un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Tout élément g de G admet une décomposition unique, appelée décomposition de Jordan, $g = g_e g_h g_u$ en produit de trois éléments de G qui commutent, avec g_e elliptique, g_h hyperbolique (c'est à dire conjugué à un élément $a(g)$ de A^+) et g_u unipotent. On pose alors simplement $\lambda(g) = a(g)$.

Lorsque k est non archimédien, A^o est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang r. On prend $A^\bullet = A^o \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $A^\times$ l'enveloppe convexe de A^+ dans $A^\bullet$. Dans ce cas, une puissance convenable g^n de g admet une décomposition de Jordan. On pose alors, en reprenant les mêmes notations que pour $k = \mathbb{R}$, $\lambda(g) = \frac{1}{n} a(g^n)$. C'est un élément de $A^\times$ qui ne dépend pas du choix de n.

L'involution d'opposition $\imath : A^+ \to A^+$ se prolonge en une unique application $\mathbb{R}$-linéaire encore notée $\imath$ de $A^\bullet$ dans lui même préservant le cône $A^\times$. Pour tout g dans G, on a $\mu(g^{-1}) = \imath(\mu(g))$, $\lambda(g^{-1}) = \imath(\lambda(g))$ et, pour $n \geq 1$, $\lambda(g^n) = n\lambda(g)$. Si $\lambda(g) \neq 1$, on note L_g la demidroite de $A^\times$ contenant $\lambda(g)$; sinon on pose $L_g = 0$.

Pour tout caractère χ de A , le morphisme $|\chi| : A^o \to]0, \infty[$, défini par $|\chi|(a) = |\chi(a)|$, s'étend de façon unique en un morphisme de groupes encore noté $|\chi|$ de $A^\bullet$ dans $]0, \infty[$. Pour toute partie θ de Π , on note θ^c le complémentaire de θ dans Π, $\theta^- := \{\alpha^- \ / \ \alpha \in \theta\}$, $A^\bullet_\theta := \{a \in A^\bullet \ / \ \forall \alpha \in \theta^c, \ |\alpha|(a) = 1 \ \}$ et $A^\times_\theta := A^\times \cap A^\bullet_\theta$. C'est un cône convexe du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A^\bullet_\theta$. On note $A^{\times\times}_\theta$ l'intérieur relatif de $A^\times_\theta$, $A^+_\theta := A^\times_\theta \cap A^+$ et $A^{++}_\theta := A^{\times\times}_\theta \cap A^+$. A^+_θ (resp. A^{++}_θ) est la facette fermée (resp. ouverte) de type θ de la chambre de Weyl A^+. On note $A^\bullet_i, A^\times_i, \ldots$ pour $A^\bullet_{\{\alpha_i\}^c}, A^\times_{\{\alpha_i\}^c}, \ldots$

2.5 Représentations de G.

Soit ρ une représentation de G dans un k-espace vectoriel de dimension finie V; c'est à dire un k-morphisme de k-groupes $\rho : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}(V)$. Pour χ dans $X^*(\mathbf{A})$, on note $V_\chi := \{v \in V \ / \ \forall a \in A \ , \ \rho(a)v = \chi(a)v\}$ l'espace propre correspondant. On note $\Sigma(\rho) := \{\chi \in X^*(\mathbf{A}) \ / \ V_\chi \neq 0\}$ l'ensemble des k-poids de V. Cet ensemble est invariant sous l'action du groupe de Weyl W et on a $V = \bigoplus_{\chi \in \Sigma(\rho)} V_\chi$. On munit $X^*(\mathbf{A})$ de l'ordre défini par:

$$\chi_1 \leq \chi_2 \Longleftrightarrow \chi_2 - \chi_1 \in \sum_{\chi \in \Sigma^+} \mathbb{N}\, \chi \ .$$

Lorsque ρ est irréductible. L'ensemble $\Sigma(\rho)$ a un unique élément χ_ρ maximal pour cet ordre appelé le plus haut k-poids de V. On note $\theta_\rho := \{\alpha \in \Pi \ / \ \chi_\rho - \alpha \in \Sigma(\rho)\}$. On dira parfois que θ_ρ est le type de ρ ou que ρ est de type θ_ρ. Par exemple, la représentation triviale est de type $\emptyset$.

Les deux lemmes préliminaires suivants sont tirés de [Be] §2.3 et 2.4. Ils ramènent l'étude de $\mu(g)$ et de $\lambda(g)$ à celle de $\|\rho(g)\|$ et de $\lambda_1(\rho(g))$ pour certaines représentations de G.

Lemme 2.5.1 *([Ti1]) Il existe r représentations irréductibles ρ_i de G dans des k-espaces vectoriels V_i dont les plus hauts k-poids χ_i sont des multiples entiers des poids fondamentaux ω_i et telles que* $\dim(V_i)_{\chi_i} = 1$.

Remarques - Lorsque $\mathbf{G}$ est k-déployé, on peut prendre $\chi_i = \omega_i$.

- On fixe désormais de telles représentations (V_i, ρ_i), on choisit des normes $\|.\|$ sur chacun des V_i, on note $X_i := \mathbb{P}(V_i)$, V_i^* le dual de V_i et $X_i^- := \mathbb{P}(V_i^*)$. On peut supposer ces choix faits de sorte que, lorsque $\alpha_i = \alpha_j^-$, on a $X_i = X_j^-$.

- On complète cette famille de r_S représentations de G par r_Z représentations de dimension 1 encore notées $(V_i, \rho_i)_{r_S < i \leq r}$ de poids χ_i de sorte que les caractères $(\chi_i)_{1\leq i\leq r}$ forment une base de E.

Lemme 2.5.2 *Pour toute représentation irréductible (V, ρ) de G de plus haut k-poids χ et toute norme sur V, il existe une constante $C_\chi > 0$ telle que, pour tout g dans G, on a*

$$C_\chi^{-1} \leq \frac{|\chi(\mu(g))|}{\|\rho(g)\|} \leq C_\chi \quad .$$

En outre, on a $|\chi|(\lambda(g)) = \lambda_1(\rho(g))$.

Remarque. Pour g dans G, $\rho_i(g)$ est proximal si et seulement si $\lambda(g)$ n'est pas dans $A_i^\times$. En effet, les poids de A dans V_i autres que χ_i sont de la forme

$$\chi_i - \alpha_i - \sum_{1\leq j\leq r} n_j \alpha_j \ \text{ avec } \ n_j \geq 0.$$

Voici un exemple d'application des deux lemmes précédents qui nous sera utile en 4.6.

Corollaire. *Pour tout g dans G, on a l'égalité dans $A^\bullet$:* $\lambda(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu(g^n)$.

Démonstration. Tout endomorphisme x d'un espace vectoriel de dimension finie vérifie: $\lambda_1(g) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Pour $x = \rho_i(g)$, on obtient grace au lemme 2.5.2

$|\chi_i|(\lambda(g)) = \lim_{n\to\infty} \|\rho_i(g)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |\chi_i(\mu(g^n))|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |\chi_i|(\frac{1}{n}\mu(g^n))$

Comme cela est vrai pour tout $i = 1, \ldots, r$, on a l'égalité annoncée.$\diamond$

Dans tout cet article, k désigne un corps local, $\mathbf{G}$ un k groupe réductif connexe, Γ un sous-semigroupe Zariski dense de $G := \mathbf{G}_k$ et on garde les notations introduites dans ces préliminaires. Dans les section 5.2, 6.3 et suivantes, on suppose que $k = \mathbb{R}$. Dans la section 5.3, on suppose k non archimédien.

3. La partie θ_Γ et l'ensemble limite Λ_Γ.

Dans cette partie, on associe à Γ une partie θ_Γ de l'ensemble Π des racines simples de G, ou, ce qui est équivalent, une variété drapeau Y_Γ de G (3.2). Cette variété Y_Γ est la plus grande variété sur laquelle Γ agit de façon proximale (3.5). Lorsque $k = \mathbb{R}$, cette partie est égale à Π et Y_Γ est toujours la variété drapeau de dimension maximale (i.e. associée aux paraboliques minimaux). Lorsque k n'est pas archimédien, n'importe quelle partie de Π peut s'obtenir ainsi.

On associe aussi à Γ une partie fermée Λ_Γ de Y_Γ appelée ensemble limite de Γ. L'ensemble limite du semigroupe opposé Γ^- est noté Λ_Γ^-.

On associe enfin à Γ un ensemble fermé F_Γ de facettes de type θ_Γ dites "facettes quasipériodiques" et on montre comment déterminer F_Γ à partir de Λ_Γ et de Λ_Γ^- et inversement (3.6).

3.1 Proximalité simultanée.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme. ([A-M-S] lemme 5.15) *Soient W un k-espace vectoriel, $r : G \to \mathrm{GL}(W)$ une représentation qui se décompose en une somme directe de représentations irréductibles $(W, r) = \bigoplus_{1 \le i \le l} (W_i, r_i)$.*

Si pour tout i, $r_i(\Gamma)$ contient un élément proximal, alors il existe γ dans Γ tel que, pour tout i, $r_i(\gamma)$ est proximal.

Donnons une démonstration de ce lemme suivant les idées de [A-M-S] mais simplifiée grace à une idée que j'ai trouvée dans [Pr] qui consiste à introduire l'adhérence de $r_i(\Gamma)$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{End}(W_i))$ plutôt que dans l'ensemble des transformations quasiprojectives de $\mathbb{P}(W_i)$.

Démonstration. On peut supposer $G \subset \mathrm{GL}(W)$. Soit $S := \{g \in \mathrm{GL}(W) \ / \ \forall i,\ g|_{W_i}$ est scalaire$\}$. On peut supposer que S est inclus dans Γ. On note $\Gamma_i := \{g|_{W_i} \ / \ g \in \Gamma\}$, $\overline{\Gamma_i}$ l'adhérence de Γ_i dans $\mathrm{End}(W_i)$ et $\overline{\Gamma}$ l'adhérence de Γ dans $\mathrm{End} W$. On a bien sûr, $\overline{\Gamma} \subset \overline{\Gamma_1} \times \cdots \times \overline{\Gamma_l}$. Soient

$$\Delta := \{\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_l) \in \overline{\Gamma} \ / \ \forall i,\ \pi_i \neq 0\}$$

et π un élément de Δ de rang minimum. Montrons que, pour tout i, π_i est de rang 1.

Supposons par l'absurde $\mathrm{rg}(\pi_1) \neq 1$. Comme Γ_1 contient un élément proximal $h_1 := r_1(\gamma_1)$, $\overline{\Gamma_1}$ contient un projecteur σ_1 de rang 1: $\sigma_1 = \lim_{n \to \infty} c_n h_1^n$ pour une suite c_n dans k bien choisie. Comme S est inclus dans Γ, il existe un élément $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$ de $\overline{\Gamma}$ tel que, pour tout i, σ_i est non nul et tel que σ_1 est le projecteur précédent. Par irréductibilité de W_i et Zariski connexité de Γ, on peut trouver un élément γ de Γ tel que, pour tout i, $\gamma(\mathrm{Im}(\pi_i)) \not\subset \mathrm{Ker}(\sigma_i)$. Alors $\sigma\gamma\pi$ est dans Δ et de rang plus petit que γ. Contradiction. Donc, pour tout i, $\mathrm{rg}(\pi_i) = 1$.

Quitte à remplacer π par $\gamma\pi$ où g est un élément de Γ tel que, pour tout i, $\gamma(\mathrm{Im}(\pi_i)) \not\subset \mathrm{Ker}(\pi_i)$, on peut supposer que, pour tout i, π_i est multiple d'un projecteur de rang 1. Choisissons alors une suite γ_n dans Γ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \pi$. On a, pour tout i, $\lim\limits_{n\to\infty} r_i(\gamma_n) = \pi_i$ et, pour $n \gg 0$, $r_i(\gamma_n)$ est proximal.$\diamond$

Corollaire 1 *On garde les mêmes notations. Alors l'ensemble*

$$\Gamma' := \{\gamma \in \Gamma \ / \ \forall i, \ r_i(\gamma) \ \text{ est proximal}\}$$

est encore Zariski dense dans G.

Démonstration. Soit γ_0 un élément de Γ'. Pour $i = 1, \dots, l$ on note c_i la valeur propre de $r_i(\gamma_0)$ telle que $|c_i| = \lambda_1(r_i(\gamma_0))$. La limite $\pi_i := \lim\limits_{m\to\infty} c_i^{-m} r_i(\gamma_0^m)$ est un projecteur de rang 1. Soit U l'ouvert de Zariski de G

$$U := \{g \in G \ / \ \forall i = 1, \dots, l, \ \ g(\mathrm{Im}\pi_i) \not\subset \mathrm{Ker}\pi_i \ \} \ .$$

Cet ouvert U est Zariski dense dans G car les représentations W_i sont irréductibles.

Montrons tout d'abord que, pour tout γ dans $U \cap \Gamma$, il existe m_0 tel que, pour $m \geq m_0$, $\gamma_0^m \gamma$ est dans Γ'. En effet, la limite

$$\lim_{m\to\infty} c_i^{-m} r_i(\gamma_0^m \gamma) = \pi_i r_i(\gamma)$$

est un multiple non nul d'un projecteur de rang 1 et $r_i(\gamma_0^m \gamma)$ est proximal pour $m \gg 0$.

Montrons maintenant que Γ' est Zariski dense dans G. Soit F un fermé de Zariski contenant Γ' et montrons que F contient Γ. Il suffit de montrer que F contient $U \cap \Gamma$. Soit donc γ dans $U \cap \Gamma$, il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$, $\gamma_0^m \gamma$ est dans Γ'. Donc

$$\gamma_0^m \gamma \in F \ \ \forall m \geq m_0 \ .$$

Comme un semigroupe Zariski fermé est un groupe, cette affirmation est encore vraie pour m dans $\mathbb{Z}$. En particulier, pour $m = 0$, on a $\gamma \in F$. C'est ce que l'on voulait.$\diamond$

Pour tout élément de γ de Γ', on note $x_{i,\gamma}$ le point attracteur de $r_i(\gamma)$ dans $\mathbb{P}(W_i)$.

Corollaire 2 *On garde les mêmes notations. Soient $\varepsilon > 0$ et γ_0 un élément de Γ'. Alors l'ensemble:*

$$\Gamma'_\varepsilon := \{\gamma \in \Gamma' \ / \ \forall i, \ d(x_{i,\gamma}, x_{i,\gamma_0}) < \varepsilon\}$$

est encore Zariski-dense dans G.

Démonstration. Remplacer Γ' par Γ'_ε dans la démonstration du corollaire 1.

Le corollaire suivant nous sera utile en 4.5.

Corollaire 3 ([A-M-S] théorème 5.17) *Avec les mêmes notations. Il existe une partie finie F de Γ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout g dans Γ, il existe f dans F tel que, pour tout $i = 1, \dots, l$, $r_i(gf)$ est ε-proximal.*

Pour la démonstration de ce corollaire (qui n'utilise pas les transformations quasiprojectives), nous renvoyons à [A-M-S].

3.2 La partie θ_Γ.

Définition. *Soit g un élément de G. On note θ_g la partie de Π telle que $\lambda(g) \in A_{\theta_g}^{\times\times}$.*

Autrement dit, $\theta_g = \{\alpha_i \in \Pi \ / \ \rho_i(g)$ est proximal $\}$ (cf. la dernière remarque de 2.5).
On dira parfois que θ_g est le "type" de g ou que g est de type θ_g.

Définition. *Soit θ une partie de Π. Un élément g de G est dit θ-proximal (ou proximal sur Y_θ) si il vérifie l'une des trois affirmations équivalentes suivantes:*
- $\theta_g \supset \theta$
- pour tout α_i dans θ, $\lambda(g) \notin A_i^\times$
- pour tout α_i dans θ, l'élément $\rho_i(g)$ est proximal.

Lorsque $\theta = \Pi$, on dit aussi que g est k-régulier.

Définition. *Un élément g de G est dit (θ, ε)-proximal si, pour tout α_i dans θ, l'élément $\rho_i(g)$ est ε-proximal dans $\mathbb{P}(V_i)$.*

Définition. *On note θ_Γ la plus petite partie θ de Π telle que $\lambda(\Gamma) \subset A_\theta^\times$.*

Autrement dit θ_Γ est la réunion des parties θ_g pour $g \in \Gamma$.
On dira parfois que θ_Γ est le "type" de Γ ou que Γ est de type θ_Γ.

Remarques. - On note $\Gamma^- := \{g^{-1} \ / \ g \in G\}$ c'est un semigroupe et on a l'égalité: $\theta_{\Gamma^-} = \theta_\Gamma^-$. En particulier, si Γ est un groupe, θ_Γ est stable par l'involution d'opposition.

- Il résulte de l'appendice de [Be-La] (voir aussi [Go-Ma], [Gu-Ra] et [Pr]) que, si $k = \mathbb{R}$, et Γ est un sous-semigroupe Zariski dense de G, alors $\theta_\Gamma = \Pi$.

- Le cas $k = \mathbb{C}$ n'est pas très intéressant pour notre point de vue: en effet, si Γ est un sous-semigroupe Zariski dense (sur $\mathbb{C}$) dans G, une restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ permet de considérer Γ comme un sous-semigroupe Zariski dense (sur $\mathbb{R}$) dans le groupe des points réels d'un $\mathbb{R}$-groupe semisimple. Exemple: $\Gamma = \mathrm{SU}(n, \mathbb{R})$ est Zariski dense (sur $\mathbb{C}$) dans $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Proposition. *L'ensemble des éléments θ_Γ-proximaux de Γ est encore Zariski-dense dans G.*

Démonstration. Cela résulte des définitions et du corollaire 1 de 3.1.

Le lemme suivant donne d'autres définitions équivalentes possibles pour θ_Γ.

Lemme. *Soit $\alpha_i \in \Pi$. On a l'équivalence:*

i) $\alpha_i \in \theta_\Gamma$
ii) $\rho_i(\Gamma)$ *contient des éléments proximaux.*
iii) $\alpha_i(\mu(\Gamma))$ *n'est pas bornée (dans k).*

Démonstration. $i) \Leftrightarrow ii)$ Cela résulte de la dernière remarque de 2.5.

$ii) \Rightarrow iii)$ Soit g un élément de Γ tel que $\lambda(g)$ n'est pas dans $A_i^\times$. Comme $\lambda(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu(g^n)$ (corollaire 2.5), la suite $\alpha_i(\mu(g^n))$ n'est pas bornée.

$iii) \Rightarrow ii)$ Soit g_m une suite dans Γ telle que $\lim_{m\to\infty} |\alpha_i(\mu(g_m))| = +\infty$. Ecrivons $g_m = k_{1,m}a_m k_{2,m}$ avec $k_{1,m}$ et $k_{2,m}$ dans K et a_m dans A^+. On peut supposer les suites $k_{1,m}$ et $k_{2,m}$ convergentes vers k_1 et k_2 respectivement. Par hypothèse, il existe une suite de constantes c_m dans k telle que la limite $\pi_i = \lim_{m\to\infty} c_m^{-1}\rho_i(a_m)$ existe et est un projecteur de rang 1. Choisissons un élément h de Γ tel que $\rho_i(hk_1)(\mathrm{Im}\pi_i) \not\subset \rho_i(k_2^{-1})(\mathrm{Ker}\pi_i)$. Un tel élément h existe car Γ est Zariski dense dans G et la représentation ρ_i est irréductible. Mais alors la limite $\lim_{m\to\infty} c_m^{-1}\rho_i(hg_m) = \rho_i(hk_1)\pi_i\rho_i(k_2)$ est un multiple non nul d'un projecteur de rang 1. Donc, pour $m \gg 0$, $\rho_i(hg_m)$ est proximal.

Corollaire. *On a l'équivalence:*

$$\Gamma \textit{ est borné modulo le centre de } G \Longleftrightarrow \theta_\Gamma = \emptyset \ .$$

Remarque. Une telle situation ne peut pas se produire lorsque k est égal à $\mathbb{R}$ et que G/Z est non compact.

Démonstration. En effet, on a les équivalences: Γ est borné modulo Z $\Longleftrightarrow$ $\mu(\Gamma)$ est borné modulo Z $\Longleftrightarrow \forall\alpha \in \Pi \ \ \alpha(\mu(\Gamma))$ est borné $\Longleftrightarrow \theta_\Gamma = \emptyset$.$\diamond$

3.3 Variétés drapeaux Y_θ et variétés Z_θ.

Le but de ce paragraphe est d'introduire quelques notations bien classiques. Pour toute partie θ de Π, on note
- $< \theta >$ les éléments de Σ^+ combinaisons linéaires d'éléments de θ,
- $\mathfrak{u}_\theta$ (resp. $\mathfrak{u}_\theta^-$) l'algèbre de Lie somme des espaces radiciels $\mathfrak{g}_\chi$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\chi}$) associés aux racines χ dans $\Sigma^+ - < \theta^c >$,
- $\mathbf{U}_\theta$ (resp. $\mathbf{U}_\theta^-$) l'unique k-sous-groupe unipotent normalisé par $\mathbf{A}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\theta$ (resp. $\mathfrak{u}_\theta^-$),
- $\mathbf{A}_\theta$ la composante Zariski connexe de $\cap_{\chi\in\theta^c}\mathrm{Ker}(\chi)$, et
- $A_\theta^+ = \mathbf{A}_\theta \bigcap A^+$ la facette standard de type θ; ceci est cohérent avec les notations de 2.4.

On note
- $\mathbf{L}_\theta$ le centralisateur dans $\mathbf{G}$ de $\mathbf{A}_\theta$,
- $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{L}_\theta\mathbf{U}_\theta$ le k-sous-groupe parabolique standard associé à θ,
- $\mathbf{P}_\theta^- = \mathbf{L}_\theta\mathbf{U}_\theta^-$ le k-sous-groupe parabolique standard opposé à $\mathbf{P}_\theta$,
- $P_\theta = L_\theta U_\theta$ le groupe des k-points de $\mathbf{P}_\theta$ qui est appelé sous groupe parabolique standard de G associé à θ et

- P_θ^- le groupe des k-points de $\mathbf{P}_\theta^-$. On a $P_\emptyset = G$ et P_Π est le sous-groupe parabolique minimal standard de G. Un sous-groupe P de G conjugué à P_θ est appelé sous-groupe parabolique de G de type θ. On note
- Y_θ ou Y_θ^+ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de type θ de G: c'est une variété analytique sur k compacte qui s'identifie à G/P_θ sur laquelle le groupe K agit transitivement (cf [He] et [Mac]). On l'appelle variété drapeau de type θ. On note
- $Y_\theta^- := Y_{\theta^-}$ la variété drapeau associée à θ^-; elle s'identifie à G. On note
- ν_θ la probabilite K-invariante sur Y_θ.

Ces choix ont été faits de sorte que la dimension de Y_θ croisse avec θ.

Une partie f de G est appelée facette de type θ si elle est conjuguée à A_θ^+, c'est à dire si on a $f = gA_\theta^+ g^{-1}$, avec g dans G. La partie $gA_\theta^{++}g^{-1}$ s'appelle l'intérieur de la facette f. Tout élément h de l'intérieur de la facette f agit sur Y_θ avec un unique point attracteur y_f^+ et sur Y_θ^- avec un unique point répulseur y_f^-. Ces points ne dépendent pas du choix de h dans l'intérieur de la facette f et on a $y_f^+ = gP_\theta g^{-1}$ et $y_f^- = gP_\theta^- g^{-1}$.

On note Z_θ l'ensemble des facettes de type θ. C'est une sous-variété analytique sur k qui s'identifie à G/L_θ. Par exemple la variété Z_Π est l'ensemble des chambres de Weyl de G.

L'injection:

$$\begin{array}{ccc} Z_\theta & \to & Y_\theta \times Y_\theta^- \\ f & \to & (y_f^+, y_f^-) \end{array}$$

est une bijection entre Z_θ et l'orbite ouverte de G dans $Y_\theta \times Y_\theta^-$. Un point (y, y^-) de $Y_\theta \times Y_\theta^-$ est dit être en position générale si il est dans cette orbite ouverte. Pour y^- dans Y_θ^-, on note U_{y^-} l'ouvert de Zariski de Y_θ formé des point y tels que (y, y^-) est en position générale.

Pour tout élément g de G de type θ, on note $f_g \in Z_\theta$ l'unique facette de type θ contenant la partie hyperbolique de la décomposition de Jordan d'une puissance g^n, avec $n \geq 1$. C'est aussi l'unique facette de type θ telle que $y_{f_g}^+$ est le point fixe attracteur pour l'action de g sur Y_θ et $y_{f_g}^-$ est le point fixe répulseur pour l'action de g sur Y_θ^-. On note y_g^+ et y_g^- au lieu de $y_{f_g}^+$ et $y_{f_g}^-$.

3.4 Variétés Y_θ et Z_θ et représentations ρ_i.

Dans cette section, nous faisons le lien entre ces définitions et les représentations ρ_i.

Pour y dans Y_θ et α_i dans θ, on note $x_i^+(y)$ la droite de V_i invariante par y. L'application

$$\begin{array}{rcl} j_\theta : Y_\theta & \to & \prod_{\alpha_i \in \theta} X_i \\ y & \to & j_\theta(y) = (x_i^+(y))_{\alpha_i \in \theta} \end{array}$$

est un plongement dont l'image est une sous-variété fermée de $\prod_{\alpha_i \in \theta^c} X_i$. On munit ce produit de la distance sup et Y_θ de la distance d induite par ce plongement.

Un élément x_i^- de X_i^- est aussi un hyperplan de V_i. Pour x_i dans X_i et x_i^- dans X_i^-, on note $\pi_i = x_i \otimes x_i^- \in \mathbb{P}(\mathrm{End}V_i)$ la droite engendrée par les endomorphismes de rang 1 d'image x_i et de noyau x_i^-. Le couple (x_i, x_i^-) est dit être en position générale si x_i n'est pas dans l'hyperplan x_i^-. Dans ce cas, la droite π_i contient un élément privilégié que l'on note encore $\pi_i = x_i \otimes x_i^-$: c'est le projecteur de noyau x_i^- et d'image x_i.

Pour y^- dans Y_θ^- et α_i dans θ, on note $x_i^-(y^-) \in X_i^-$ la droite de V_i^* invariante par y^-. Signalons que le couple (y, y^-) de $Y_\theta \times Y_\theta^-$ est en position générale si et seulement si, pour tout α_i dans θ, les couples de droites $(x_i^+(y), x_i^-(y^-))$ sont en position générale.

Soit f une facette de type θ et α_i dans θ. On pose $x_{i,f}^+ := x_i^+(y_f^+)$, $x_{i,f}^- := x_i^-(y_f^-)$ et $\pi_{i,f}$ le projecteur $x_{i,f}^+ \otimes x_{i,f}^-$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \pi_\theta : Z_\theta & \rightarrow & \prod_{\alpha_i\in\theta} \mathrm{End} V_i \\ f & \rightarrow & \pi_\theta(f) := (\pi_{i,f})_{\alpha_i\in\theta} \end{array}$$

est encore un plongement dont l'image est une sous-variété fermée de $\prod_{\alpha_i\in\theta} \mathrm{End} V_i$. On munit ce produit de la norme sup et Z_θ de la distance d induite par ce plongement.

Pour tout élément g de type θ tel que $f_g = f$ et tout α_i dans θ, on a

$$\pi_{i,f} = \lim_{n\to\infty} c_i^{-n} \rho_i(g)^n$$

où c_i est la valeur propre de $\rho_i(g)$ la plus grande en module.

3.5 La variété drapeau Y_Γ.

Dans cette section nous faisons le lien entre la partie θ_Γ et la proximalité de l'action de Γ sur les variétés drapeaux ainsi que sur les espaces projectifs $\mathbb{P}(V)$ des diverses représentations irréductibles de G.

Définition. *Une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ dans G est dite contractante dans Y_θ si $\lim\limits_{n\to\infty} g_{n*}(\nu_\theta)$ est une masse de Dirac δ_{y^+} en un point y^+ de Y_θ qui est appelé point limite de la suite.*

On dit qu'un sous-semigroupe Γ de G a la propriété de contraction dans Y_θ s'il existe une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ dans Γ qui est contractante dans Y_θ. On appelle point limite de Γ dans Y_θ un point limite d'une telle suite.

Proposition. *Soient θ une partie de Π et (ρ ,V) une représentation irréductible de G de type θ dont le plus haut poids χ_ρ est sans multiplicité. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes:*

i) Γ a la propriété de contraction dans Y_θ

ii) $\theta_\Gamma \supset \theta$

iii) $\rho(\Gamma)$ a la propriété de contraction dans $\mathbb{P}(V)$.

En particulier, Y_{θ_Γ} est "la plus grande" des variétés drapeaux de G sur laquelle Γ a la propriété de contraction. On notera $Y_\Gamma = Y_{\theta_\Gamma}$, $Y_\Gamma^- = Y_{\theta_\Gamma}^-$, $P_\Gamma = P_{\theta_\Gamma}$, $P_\Gamma^- = P_{\theta_\Gamma}^-$ et $Z_\Gamma = Z_{\theta_\Gamma}$.

Démonstration. Cela résulte du lemme plus précis suivant:

Lemme. *Avec les mêmes notations. Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite dans G. On considère les affirmations suivantes:*

(1) *Pour tout* α_i *dans* θ, $\lim_{n\to\infty} |\alpha_i(\mu(g_n))| = \infty$.

(2) *La suite* g_n *est contractante dans* Y_θ *vers un point limite* y^+.

(3) *Pour tout* α_i *dans* θ, *la suite* $\rho_i(g_n)$ *est contractante dans* $\mathbb{P}(V_i)$ *vers un point limite* x_i.

(4) *La suite* $\rho(g_n)$ *est contractante dans* $\mathbb{P}(V)$ *vers un point limite* x_ρ^+.

(5) *Il existe un couple* $(y^+, y^-) \in Y_\theta \times Y_\theta^-$ *tel que, pour tout* z *dans l'ouvert de Zariski* U_{y^-} *de* Y_θ, *on a* $\lim_{n\to\infty} g_n z = y^+$. *Cette convergence étant uniforme sur les compacts de* U_{y^-}.

(6) *Pour tout* α_i *dans* θ, *il existe des constantes* $c_{i,n} \in k^*$ *telles que les limites* $\pi_i = \lim_{n\to\infty} c_{i,n}^{-1}\rho_i(g_n)$ *existent et sont des opérateurs de rang un.*

(7) *Il existe des constantes* $c_n \in k^*$ *telles que la limite* $\pi = \lim_{n\to\infty} c_n^{-1}\rho(g_n)$ *existe et est un opérateur de rang un.*

On a les implications et les équivalences suivantes:

$$(7) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (1) .$$

En outre si la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ *vérifie* (1), *on peut en extraire une sous-suite qui vérifie* (7).

Lorsque (2) *est vrai, on a l'égalité:* $x_i = x_i^+(y^+)$.

Remarque. On en déduit une autre caractérisation des éléments de θ_Γ lorsque Γ est Zariski dense: ce sont les éléments α_i pour lesquels $\rho_i(\Gamma)$ a la propriété de contraction dans $\mathbb{P}(V_i)$.

Démonstration. On peut supposer $\mathbf{G}$ simplement connexe. La décomposition de Cartan de G permet d'écrire $g_n = k_{1,n}a_nk_{2,n}$ avec $k_{1,n} \in K$, $a_n \in A^+$ et $k_{2,n} \in K$.

1[er] cas: $k_{1,n} = k_{2,n} = 1$. La suite $g_n = a_n$ prend ses valeurs dans A^+. Dans ce cas, les sept affirmations sont équivalentes. On note $y_0^+ = P_\theta$ et $y_0^- = P_\theta^-$; ce sont des points de Y_θ et de Y_θ^-.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (5) . Pour cela, on remarque (voir [Bo-Ti]) qu'un ouvert dense de G/P_θ s'identifie comme variété au produit des espaces radiciels $\mathfrak{g}_{-\chi}$ pour χ dans $\Sigma^+ - <\theta^c>$, que lue dans cette carte, l'action de A^+ est une action produit de l'action sur chacun des facteurs $\mathfrak{g}_{-\chi}$, que sur ces facteurs l'action de A^+ s'identifie à l'action adjointe, et enfin, que les racines χ de $\Sigma^+ - <\theta^c>$ sont celles qui s'écrivent $\chi = \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha \alpha$ avec $\sum_{\alpha\in\theta} n_\alpha \geq 1$. Dans ce cas, le point y_0^+ est le point limite de a_n dans Y_θ et l'ouvert $U_{y_0^-}$ est son bassin d'attraction.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (6) . On note $x_{i,0}^+ \in \mathbb{P}(V_i)$ la droite de plus haut poids et $x_{i,0}^- \in \mathbb{P}(V_i^*)$ l'hyperplan de V_i somme des autres espaces de poids et $\pi_{i,0} := x_{i,0}^+ \otimes x_{i,0}^-$ la projection sur $x_{i,0}^+$ parallèlement à $x_{i,0}^-$. L'équivalence résulte de ce que la valeur propre de $\rho_i(a_n)$ dans $x_{i,0}^+$ est $\chi_i(a_n)$ alors que la valeur propre de $\rho_i(a_n)$ dans $x_{i,0}^-$ la plus grande en module est $\frac{\chi_i(a_n)}{\alpha_i(a_n)}$ (cf 2.5). Dans ce cas, le point $x_{i,0}^+$ est le point limite de $\rho_i(a_n)$ dans $\mathbb{P}(V_i)$ et $\pi_{i,0} = \lim_{n\to\infty} (\chi_i(a_n))^{-1}\rho_i(a_n)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (7) . On procède de la même façon.

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$: Les suites $k_{1,n}$ et $k_{2,n}$ convergent vers des éléments k_1 et k_2. Dans ce cas, les cinq affirmations sont encore équivalentes et on a les égalités: $y^+ = k_1 y_0^+$, $y^- = k_2^{-1} y_0^-$, $x_i = \rho_i(k_1) x_{i,0}$, $x_i^- = \rho_i(k_2^{-1}) x_{i,0}^-$ et $\pi_i = \rho_i(k_1) \circ \pi_{i,0} \circ \rho_i(k_2^{-1}) = x_i \otimes x_i^-$.

$\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$: Cas général. On rappelle que de toute suite k_n dans K on peut extraire une sous-suite convergente et que, dans un compact, une suite est convergente si et seulement si elle admet une seule valeur d'adhérence. On déduit donc de l'étude des cas précédents les équivalences:

$$\begin{array}{rcl} (2) & \Leftrightarrow & (1) \text{ et la suite } k_{1,n} y_0^+ \text{ converge} \\ & \Leftrightarrow & (1) \text{ et, } \forall \alpha_i \in \theta, \text{ la suite } \rho_i(k_{1,n}) x_{i,0} \text{ converge} \\ & \Leftrightarrow & (3) \end{array}$$

De la même façon, on a les équivalences:

$$\begin{array}{rcl} (5) & \Leftrightarrow & (1) \text{ et les suites } k_{1,n} y_0^+ \text{ et } k_{2,n}^{-1} y_0^- \text{ convergent} \\ & \Leftrightarrow & (1) \text{ et, } \forall \alpha_i \in \theta, \text{ les suites } \rho_i(k_{1,n}) x_{i,0} \text{ et } \rho_i(k_{2,n}^{-1}) x_{i,0}^- \text{ convergent} \\ & \Leftrightarrow & (6) \end{array}$$

Les autres affirmations sont claires maintenant.

3.6 L'ensemble limite Λ_Γ et l'ensemble des facettes quasipériodiques F_Γ.

Définition. *On appelle ensemble limite de Γ l'ensemble noté Λ_Γ ou Λ_Γ^+ des points limites de Γ dans la variété des drapeaux Y_Γ; c'est un fermé de Y_Γ. On note $\Lambda_\Gamma^- := \Lambda_{\Gamma^-}$; c'est un fermé de Y_Γ^-.*

On note F_Γ^o l'ensemble des facettes $f_g \in Z_\Gamma$ associées à un élément θ_Γ-proximal g de Γ; c'est une partie de Z_Γ. On note F_Γ l'adhérence dans Z_Γ de F_Γ^o. Les éléments de F_Γ sont appelées facettes quasipériodiques de Γ.

Remarques. 1) Lorsque Γ est un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, la définition de Λ_Γ coïncide avec la définition classique d'ensemble limite comme partie du cercle à l'infini du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}$. L'ensemble F_Γ^o est l'ensemble des géodésiques périodiques orientées de la surface de Riemann $\Gamma\backslash\mathbf{H}$.

2) Lorsque Γ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$, cet ensemble limite Λ_Γ a été introduit et étudié par Y.Guivarc'h [Gu].

3) Il résulte du lemme 3.5 que, pour θ contenant θ_Γ, l'ensemble des points limites de Γ dans Y_θ n'est rien d'autre que l'image de Λ_Γ par la projection naturelle: $Y_\Gamma \to Y_\theta$.

4) Lorsque $k = \mathbb{R}$, F_Γ est un ensemble de chambres de Weyl positives que nous appellerons "chambres quasipériodiques".

Le lemme suivant généralise des propriétés classiques des ensembles limites des sous-groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: par exemple l'énoncé iv) affirme que, lorsque Γ est un sous-groupe non élémentaire de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, pour tout couple (y^+, y^-) de points limites de Γ dans le cercle à l'infini, on peut trouver un élément hyperbolique non trivial de Γ dont les points attracteurs et répulseurs sont aussi proches que l'on veut des points y^+ et y^-.

Lemme. *i) L'ensemble limite Λ_Γ est Zariski-dense dans Y_Γ.*

ii) Tout fermé Γ-invariant non vide F de Y_Γ contient Λ_Γ. En particulier, l'action de Γ sur Λ_Γ est minimale et aucun point de Λ_Γ n'est isolé. En outre, si $\Lambda_\Gamma \neq Y_\Gamma$ alors Λ_Γ est d'intérieur vide.

iii) Pour tout y dans Λ_Γ et $\varepsilon > 0$, il existe un élément θ_Γ-proximal g de Γ tel que $d(y_g^+, y) \leq \varepsilon$. L'ensemble de ces éléments g est Zariski-dense. En particulier, tout ouvert non vide de Λ_Γ est encore Zariski dense dans Y_Γ.

iv) Si on regarde Z_Γ comme une partie de $Y_\Gamma \times Y_\Gamma^-$ (cf 3.3), on a l'égalité

$$F_\Gamma = Z_\Gamma \cap (\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma^-)\ .$$

Autrement dit, l'ensemble F_Γ^o est dense dans $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma^-$.

v) Pour tout f dans F_Γ, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, l'ensemble

$$\Gamma_f^{(\varepsilon)} := \{g \in \Gamma\ ,\ (\theta_\Gamma, \varepsilon)\text{-proximal et tel que }\ d(f_g, f) \leq \varepsilon\ \}$$

est encore Zariski dense dans G.

Démonstration. i) C'est clair car Λ_Γ est Γ-invariant et Γ est Zariski dense dans G.

ii) Montrons que F contient Λ_Γ. Soit y un point de Λ_Γ. Il existe donc une suite $g_n \in \Gamma$ contractante dans Y_Γ vers le point limite y. Quitte à extraire une sous-suite, il existe un ouvert Zariski dense U_{y^-} de Y_Γ tel que, pour tout y' dans U_{y^-} , on a $\lim\limits_{n\to\infty} g_n y' = y$. Pour les mêmes raisons qu'en i), le fermé F est Zariski dense dans Y_Γ. On peut donc trouver un point y' dans l'intersection $F \cap U_{y^-}$. Les points $g_n y'$ sont encore dans F et y aussi. Donc F contient Λ_Γ.

En particulier, tout fermé non vide Γ-invariant de Λ_Γ est égal à Λ_Γ. Autrement dit, l'action de Γ sur Λ_Γ est minimale.

Supposons par l'absurde que Λ_Γ contient un point isolé. L'ensemble $\overline{\Gamma y} - \Gamma y$ est alors un fermé non vide Γ-invariant de Λ_Γ. Il est donc égal à Λ_Γ. Contradiction.

En outre, si $\Lambda_\Gamma \neq Y_\Gamma$, la frontière de Λ_Γ contient Λ_Γ, ce qui signifie que Λ_Γ est d'intérieur vide.

iii) Soit $g_n \in \Gamma$ une suite contractante dans Y_Γ vers le point limite y. On utilise le lemme 3.5(6). Cela permet de construire comme en 3.1 un élément h de Γ et des constantes $c_{i,n} \in k^*$ tels que, pour tout α_i dans θ_Γ, la suite $c_{i,n}^{-1}\rho_i(g_n h)$ converge vers un projecteur de rang un π_i d'image $x_i := x_i^+(y)$. Mais alors, dès que n est assez grand, l'élément $\rho_i(g_n h)$ est proximal et on a

$$\lim_{n\to\infty} x^+_{\rho_i(g_n h)} = x_i^+(y)\ ;$$

et donc l'élément $g := g_n h$ est θ_Γ-proximal et vérifie $d(y_g, y) \leq \eta$.

La deuxième affirmation résulte alors du corollaire 2 de 3.1.

La dernière affirmation s'en déduit car tout ouvert V de Λ_Γ contient un ensemble de la forme $\{y_g^+\ /\ g \in \Gamma$ est $(\theta_\Gamma,\varepsilon)$-proximal et $d(y_g^+, y) \leq \varepsilon\ \}$ avec y dans Λ_Γ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Un tel ensemble est Zariski dense dans Λ_Γ, V aussi.

iv) Soit (y^+, y^-) un point de $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma^-$. Construisons un élément g de Γ qui est θ_Γ-proximal et tel que (y_g^+, y_g^-) soit proche de (y^+, y^-): à l'aide de iii), on peut trouver un élément θ_Γ-proximal g_1 de Γ tel que $y^+_{g_1}$ est proche de y^+ et $(y^+_{g_1}, y^-)$ est en position générale. Le même iii) permet alors de trouver un élément θ_Γ-proximal g_2 de Γ tel que $y^-_{g_2}$ est proche de y^- et $(y^+_{g_1}, y^-_{g_2})$ est en position générale. En particulier, avec des constantes bien choisies, pout tout α_i dans θ_Γ, les limites

$$\pi_{i,1} := \lim_{n\to\infty} c_{i,n}^{-1}\rho_i(g_1^n) \text{ et}$$
$$\pi_{i,2} := \lim_{n\to\infty} d_{i,n}^{-1}\rho_i(g_2^n)$$

sont des projecteurs de rang un et le produit $\pi_i := \pi_{i,2} \circ \pi_{i,1}$ est non nul.

Comme Γ est Zariski dense, on peut trouver un élément h de Γ tel que, pour tout α_i dans θ_Γ, la composée

$$\pi_{i,3} := \pi_{i,1} \circ \rho_i(h) \circ \pi_{i,2}$$

est non nulle. Cet opérateur $\pi_{i,3}$ est alors un multiple non nul du projecteur de rang un dont l'image est celle de $\pi_{i,1}$ et dont le noyau est celui de $\pi_{i,2}$. La formule

$$\pi_{i,3} := \lim_{n\to\infty} c_{i,n}^{-1} d_{i,n}^{-1}\rho_i(g_1^n h g_2^n)$$

prouve alors que, pour n suffisament grand, l'élément $g := g_1^n h g_2^n$ est θ_Γ-proximal et le couple (y^+_g, y^-_g) est proche de $(y^+_{g_1}, y^-_{g_2})$ et donc aussi de (y^+, y^-).

v) Il suffit de le démontrer lorsque f est dans F^o_Γ. On raisonne comme pour le corollaire 1 de 3.1. Soit F un fermé de Zariski de G contenant $\Gamma^{(\varepsilon)}_f$. Montrons que $F = G$. Soit g_0 un élément θ_Γ-proximal de Γ tel que $f = f_{g_0}$. Reprenons la démonstration de iv) avec $g_1 = g_2 = g_0$. On note $\pi_{i,0} := \pi_{i,1} = \pi_{i,2}$ et $x^+_{i,0} \in \mathbb{P}(V_i)$ l'image de $\pi_{i,0}$ et $X^<_{i,0} \subset \mathbb{P}(V_i)$ son noyau. On suppose ε_0 choisi de sorte que

$$\varepsilon_0 < \frac{1}{2} \inf_{\alpha_i \in \theta_\Gamma} \delta(x^+_{i,0}, X^<_{i,0}) \; .$$

Donc, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ il existe un ouvert de Zariski dense U de G tel que, pour tout h dans $U \cap \Gamma$, le produit $g_0^n h g_0^n$ est dans $\Gamma^{(\varepsilon)}_f$ dès que n est assez grand. En particulier, ce produit $g_0^n h g_0^n$ est dans F dès que n est assez grand. Comme l'adhérence de Zariski d'un semigroupe est un groupe, on en déduit que cette afirmation est encore vraie pour $n = 0$. Donc h est dans F. On en déduit l'inclusion $\Gamma \cap U \subset F$ et l'égalité $F = G$. Ceci prouve bien que $\Gamma^{(\varepsilon)}_f$ est Zariski dense dans G.$\diamond$

4. Le cône limite L_Γ.

Le but de cette partie est de démontrer les points 1.2.a et 1.4.a des théorèmes de l'introduction, à l'exception de la propriété "L_Γ d'intérieur non vide" qui sera démontrée dans la partie 7.

Définition. *On appelle cône limite de Γ le plus petit cône fermé L_Γ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A^\times$ contenant les images $\lambda(g)$ des éléments g de Γ.*

Pour toute partie P d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, on appelle cône asymptote à P l'ensemble des vecteurs v de V que l'on peut obtenir comme limite d'une suite: $v = \lim_{n\to\infty} t_n p_n$ avec $t_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ et $p_n \in P$.

On va donc démontrer la proposition suivante.

Proposition. *a) le cône limite L_Γ est convexe;*

b) le cône limite L_Γ est le cône asymptote à la partie $\mu(\Gamma)$ de $A^\bullet$.

4.1 Groupes $(\theta, \underline{\varepsilon})$-Schottky.

La définition ci-dessous généralise celle de groupes ε-Schottky introduite dans ([Be] §2.2). Soient θ une partie de π et $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{j\in J}$ une famille finie ou infinie de cardinal $t \geq 2$ formée de réels positifs.

Définition. *On dit qu'un sous-semigroupe (resp.sous-groupe) Zariski dense Γ de G de générateurs $(\gamma_j)_{j\in J}$ est $(\theta, \underline{\varepsilon})$-Schottky ou "$\underline{\varepsilon}$-Schottky dans Y_θ" si, pour tout α_i dans θ, le sous-semigroupe (resp. sous-groupe) $\rho_i(\Gamma)$ de $\mathrm{GL}(V_i)$ de générateurs $(\rho_i(\gamma_j))_{j\in J}$ est "$\underline{\varepsilon}$-Schottky dans $\mathbb{P}(V_i)$".*

On note alors $E_\Gamma := \{\gamma_j \ / \ j \in J\}$ (resp. $E_\Gamma := \{\gamma_j, \gamma_j^{-1} \ / \ j \in J\}$) et pour tout élément h de E dont l'indice est j, on note $\varepsilon_h = \varepsilon_j$.

Lorsque la famille $\underline{\varepsilon}$ est constante égale à un réel $\varepsilon > 0$, on dit que Γ est (θ, ε)-Schottky

Lorsque $\theta = \Pi$, on dit que Γ est $\underline{\varepsilon}$-Schottky ou ε-Schottky.

Remarques - Il n'est pas vraiment utile dans cette définition de supposer Γ Zariski dense. Mais en pratique il le sera toujours.

- Bien sûr ces définitions dépendent du choix des représentations ρ_i, des normes sur V_i et des génerateurs γ_j.

- Si un sous-semigroupe (resp.sous-groupe) Γ de générateurs $(\gamma_j)_{j\in J}$ est $(\theta, \underline{\varepsilon})$-Schottky, il en est de même du sous-semigroupe (resp.sous-groupe) $\Gamma_{\underline{m}}$ de générateurs $(\gamma_j^{m_j})_{j\in J}$, pour toute famille $\underline{m} = (m_j)_{j\in J}$ d'entiers strictements positifs.

- Lorsque $\theta \neq \emptyset$, tout sous-groupe Γ $(\theta, \underline{\varepsilon})$-Schottky en les générateurs $(\gamma_j)_{j\in J}$ est discret dans G et est un groupe libre en ces générateurs γ_j.

- Tout élément d'un sous-groupe ou d'un sous-semigroupe $(\theta,\underline{\varepsilon})$-Schottky est θ-proximal.

Définition. *Un mot $w = g_l \cdots g_1$ avec g_j dans E_Γ est dit réduit si $g_{j-1} \neq g_j^{-1}$, pour $j = 2, \ldots, l$ et très réduit si en outre $g_1 \neq g_l^{-1}$.*

Bien sûr, dans un sous-semigroupe $(\theta,\underline{\varepsilon})$-Schottky, tout mot est très réduit et dans un sous-groupe $(\theta,\underline{\varepsilon})$-Schottky, tout mot est conjugué à un unique mot très réduit.

Définition. *Un sous-semigroupe Γ de G est dit fortement (θ,ε)-Schottky s'il est (θ,ε)-Schottky pour la famille de générateurs Γ tout entier.*

Remarques - La notion analogue pour les sous-groupes n'a pas de sens.

- Soit Γ un sous-semigroupe fortement (θ,ε)-Schottky, alors $\Gamma \cap \Gamma^- = \emptyset$. D'autre part, tout sous-semigroupe Zariski dense Γ' de Γ est encore fortement (θ,ε)-Schottky.

- Nous verrons que, lorsque $\theta = \Pi$, ou lorsque k est non archimédien, il existe toujours des sous-semigroupes de type θ fortement (θ,ε)-Schottky qui sont ouverts.

La proposition suivante donne une estimation de la projection $\lambda(w)$ d'un mot w de Γ. Elle généralise la proposition 7.3 de [Be].

Lemme. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact M_ε de $A^\bullet$ vérifiant la propriété suivante.*

Soient θ une partie de Π et $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{j\in J}$. Pour tout sous-semigroupe (resp.sous-groupe) de type θ qui est $(\theta,\underline{\varepsilon})$-Schottky pour les générateurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ et tout mot très réduit $w = g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1}$ avec g_j dans E_Γ et $n_j \geq 1$, on a

$$\lambda(w) - \sum_{1\leq j\leq l} n_j \lambda(g_j) \in \Big(\sum_{1\leq j\leq l} M_{\varepsilon_{g_j}} \cap A^\bullet_\theta\Big) \ .$$

Démonstration. On prend $M_\varepsilon = \{a \in A^\bullet \ / \ C_\varepsilon^{-1} \leq |\chi_i|(a) \leq C_\varepsilon \ \ \forall i = 1, \ldots, r\}$ où les C_ε sont les constantes du lemme 2.2.2. Posons $C = \prod_{1\leq j\leq l} C_{\varepsilon_{g_j}}$. Comme $\lambda(\Gamma)$ est inclus dans $A^\bullet_\theta$, et que, pour $r_S < i \leq r$ on a $|\chi_i|(\lambda(w)) = |\chi_i|(\sum_{1\leq j\leq l} n_j\lambda(g_j))$, il suffit de montrer que, pour tout α_i dans θ, on a

$$C^{-1} \leq |\chi_i|(\lambda(w) - \sum_{1\leq j\leq l} n_j\lambda(g_j)) \leq C \ .$$

Cela est une conséquence du lemme 2.2.2 appliqué à $\rho_i(w)$.$\diamond$

Le corollaire suivant est un cas particulier de la proposition que nous voulons démontrer. Il est aussi le point clef de sa démonstration.

Corollaire. *Si Γ est un sous-semigroupe de type θ qui est (θ,ε)-Schottky en les générateurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$, alors l'enveloppe convexe des demidroites $L_{\gamma_1}, \ldots, L_{\gamma_t}$ est inclus dans L_Γ.*

Démonstration. Comme L_Γ est fermé, il suffit de montrer que, pour tous entiers $n_1, \ldots, n_t \geq 1$ l'élément $n_1\gamma_1 + \cdots + n_t\gamma_t$ est dans L_Γ. Pour $m \geq 1$, on note $w_m := \gamma_t^{mn_t} \cdots \gamma_1^{mn_1}$. Le lemme ci-dessus prouve que

$$n_1\gamma_1 + \cdots + n_t\gamma_t \in \frac{1}{m}\lambda(w_m) + \frac{t}{m}M_\varepsilon \subset L_\Gamma + \frac{t}{m}M_\varepsilon \ .$$

Ceci est vrai pour tout $m \geq 1$, donc $n_1\gamma_1 + \cdots + n_t\gamma_t$ est dans L_Γ.$\diamond$

4.2 Zariski densité des éléments dont le Lyapounov est presque connu.

Le but de cette section est de démontrer le lemme suivant:

Lemme. *Soit Ω un cône ouvert de $A^\times$ rencontrant le cône limite L_Γ.*

Alors l'ensemble $\Gamma_\Omega := \{g \in \Gamma \ / \ \lambda(g) \in \Omega\}$ est encore Zariski dense.

On va montrer un résultat plus technique qui précise à la fois ce lemme et le lemme 3.6.v :

Lemme bis. *On garde les mêmes notations. Soit $f \in F_\Gamma$ une facette quasipériodique de Γ. On rappelle que $\Gamma_f^{(\varepsilon)}$ est une partie de Γ introduite dans le lemme 3.6.v.*

Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, l'ensemble $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)} := \Gamma_f^{(\varepsilon)} \cap \Gamma_\Omega$ est encore Zariski dense dans G.

Démonstration. On peut supposer que f est dans F_Γ^o.

Montrons tout d'abord que $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$ est non vide. Notons $\theta = \theta_\Gamma$. Soient g_1 un élément θ-proximal de Γ tel que $f_{g_1} = f$ et g_2 un élément de Γ tel que $\lambda(g_2)$ est dans Ω. L'idée de la démonstration consiste à chercher un élément g de $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$ sous la forme $g_1^r y g_2^s x g_1^r$ où (x, y) est dans un ouvert de Zariski bien choisi de $\Gamma \times \Gamma$, où r est suffisamment grand et s encore plus grand. Soit i un indice tel que $\alpha_i \in \theta$ ou tel que $r_S < i \leq r$. L'élément $\rho_i(g_1)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V_i)$. On note c_i la valeur propre de $\rho_i(g_1)$ telle que $|c_i| = \lambda_1(\rho_i(g_1))$. La limite $\pi_i := \lim\limits_{r\to\infty} c_i^{-r} \rho_i(g_1^r)$ est un projecteur de rang un.

Quitte à remplacer g_2 par une puissance, on peut trouver un élément d_i dans k tel que $|d_i| = \lambda_1(\rho_i(g_2))$. Par compacité de $\mathbb{P}(\mathrm{End}(V_i))$, il existe une suite $d_{i,s}$ dans k et une sous-suite S de $\mathbb{N}$ tels que la limite $\sigma_i := \lim\limits_{s\in S} d_{i,s}^{-1} \rho_i(g_2^s)$ existe et est non nulle. Lorsque g_2 est semisimple ou lorsque k est non archimédien, on peut prendre $d_{i,s} = d_i^s$. Dans le cas général, on sait seulement que, pour s dans S,

$$\log|d_{i,s}| - s \log|d_i| = O(\log s) \ .$$

On a, lorsque s est dans S,

$$\lim_{r,s\to\infty} c_i^{-2r} d_{i,s}^{-1} \rho_i(g_1^r y g_2^s x g_1^r) = \pi_i \rho_i(y) \sigma_i \rho_i(x) \pi_i \ .$$

Soit U l'ouvert de Zariski non vide de $G \times G$

$$U := \{(x, y) \in G \times G \ / \ \forall \alpha_i \in \theta \ , \ \pi_i \rho_i(y) \sigma_i \rho_i(x) \pi_i \neq 0 \ \} \ .$$

Choisissons (x, y) dans $U \cap (\Gamma \times \Gamma)$. On peut écrire $\pi_i \rho_i(y) \sigma_i \rho_i(x) \pi_i = \beta_i \pi_i$ où β_i est un scalaire non nul . Donc il existe $r_0 \geq 0$, $s_0 \geq 0$ tels que, pour $r \geq r_0$, $s \geq s_0$, s dans S et α_i dans θ, l'élément $\rho_i(g_1^r y g_2^s x g_1^r)$ est proximal. On déduit de l'égalité précédente que, en notant $g_{r,s} := g_1^r y g_2^s x g_1^r$, on a

$$\lim_{r,s\to\infty} f_{g_{r,s}} = f$$

On choisit désormais les entiers r_0 et s_0 de sorte que, pour $r \geq r_0$ et $s \geq s_0$, on a

$$d(f_{g_{r,s}}, f) \leq \eta \ .$$

En outre, on a
$$\lim_{r,s\to\infty} |c_i|^{-2r}|d_{i,s}|^{-1}\lambda_1(\rho_i(g_1^r y g_2^s x g_1^r)) = |\beta_i| \ .$$
Donc, pour α_i dans θ et pour $r_S < i \leq r$,
$$\log(|\chi_i|(\lambda(g_1^r y g_2^s x g_1^r) - 2r\lambda(g_1) - s\lambda(g_2))) = O(\log s) \ .$$
Rappelons que l'addition de $A^\bullet$ que nous notons additivement est la loi qui prolonge la multiplication de A^o que nous notions multiplicativement.

D'autre part, par définition de θ, lorsque α_i est dans θ^c, on a
$$|\alpha_i|(\lambda(g_1^r y g_2^s x g_1^r)) = |\alpha_i|(\lambda(g_1)) = |\alpha_i|(\lambda(g_2)) = 1 \ .$$

Comme la famille $((\log|\alpha_i|)_{\alpha_i\in\theta^c} \ , \ (\log|\chi_i|)_{\alpha_i\in\theta} \ , \ (\log|\chi_i|)_{r_S<i\leq r} \ )$ engendre les formes linéaires sur $A^\bullet$, on en déduit l'égalité dans $A^\bullet$:
$$\lambda(g_1^r y g_2^s x g_1^r) = 2r\lambda(g_1) + s\lambda(g_2) + O(\log s) \ .$$
où $O(\log s)$ désigne cette fois une famille de vecteurs $v_{r,s}$ de $A^\bullet$ telle que $(\log s)^{-1}v_{r,s}$ est bornée. Fixons $r \geq r_0$, on a alors
$$\lim_{s\in S} \frac{1}{s}\lambda(g_1^r y g_2^s x g_1^r) = \lambda(g_2) \ .$$
Donc, pour s suffisamment grand, $g_1^r y g_2^s x g_1^r$ est dans $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$ et $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$ est non vide.

Montrons maintenant que $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$ est Zariski dense. Soit F un fermé de Zariski contenant $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$. On peut reprendre le raisonnement du corollaire 1 de 3.1. Soit g_1 dans $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$. Pour α_i dans θ et pour $r_S < i \leq r$, notons encore c_i la valeur propre de $\rho_i(g_1)$ telle que $|c_i| = \lambda_1(\rho_i(g_1))$ et π_i le projecteur de rang un $\pi_i := \lim_{r\to\infty} c_i^{-r}\rho_i(g_1^r)$. Soit U_o l'ouvert de Zariski non vide de G:
$$U_o := \{x \in G \ / \ \forall\alpha_i \in \theta \ , \ \pi_i\rho_i(x)\pi_i \neq 0 \ \} \ .$$
Pour x dans $U_o \cap \Gamma$, le même raisonnement que ci-dessus prouve que, pour r grand, l'élément $g_r := g_1^r x g_1^r$ est θ-proximal et que
$$\lim_{r\to\infty} f_{g_r} = f$$
et
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\lambda(g_r) = 2\lambda(g_1) \ .$$
Donc il existe r_0 tel que, pour $r \geq r_0$, $g_1^r x g_1^r$ est dans $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)} \subset F$. Comme l'adhérence de Zariski d'un semigroupe est un groupe, on en déduit que, pour tout r dans $\mathbb{Z}$, $g_1^r x g_1^r$ est dans F. En particulier, pour $r = 0$, x est dans F. Donc F contient $U_o \cap \Gamma$ et $F = G$. Ceci prouve bien que $\Gamma_{f,\Omega}^{(\varepsilon)}$ est Zariski dense dans G.$\diamond$

4.3 Sous-groupes (θ,ε)-Schottky des groupes Zariski denses.

Pour démontrer notre proposition 4.0, nous n'aurons besoin de la proposition suivante que pour des suites finies à deux éléments. Le cas des suites infinies nous sera utile en 5.1.

Proposition. *Soient Γ un sous-semigroupe (resp. un sous-groupe) Zariski dense de G non borné modulo le centre de G. Soient $\theta := \theta_\Gamma$ le type de Γ et $(\Omega_j)_{0<j<t}$ une suite finie ou infinie, de longueur au moins 2, formée de cônes ouverts de $A_\theta^{\times\times}$ qui rencontrent le cône L_Γ.*

Alors il existe une suite $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{0<j<t}$ et un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) de type θ, discret, Zariski dense Γ' de Γ qui est (θ,ε)-Schottky pour des générateurs $(\gamma_j)_{0<j<t}$ vérifiant $\lambda(\gamma_j) \in \Omega_j$, pour tout j.

Remarque. La condition "Γ non borné modulo le centre de G" signifie que l'image de Γ dans G/Z n'est pas incluse dans un sous-groupe compact G. Comme Γ est Zariski dense dans G cette hypothèse équivaut à $\theta_\Gamma \neq \emptyset$. Elle est automatiquement vérifiée lorsque $k = \mathbb{R}$ et que G/Z est non compact.

Cette proposition résulte du lemme suivant qui généralise le lemme 7.2 de [Be].

Lemme. *Avec les notations de la proposition.*

a) On peut choisir des éléments $(\gamma_j)_{0<j<t}$ de Γ tels que, en notant $E = \{\gamma_j \ / \ 0 < j < t\ \}$ (resp. $E = \{\gamma_j \ / \ 0 < j < t\ \} \cup \{\gamma_j^{-1} \ / \ 0 < j < t\ \}$), on a:

i) $\lambda(\gamma_j) \in \Omega_j$, pour tout j. En particulier, tous les éléments de E sont de type θ.

ii) Pour tout g, h dans E (resp. pour tout g, h dans E avec $g \neq h^{-1}$) Le couple (y_g^+, y_h^-) de $Y_\Gamma \times Y_\Gamma^-$ est en position générale.

iii) Pour tout j, le semigroupe engendré par γ_j est Zariski connexe.

iv) Le semigroupe engendré par γ_1 et γ_2 est Zariski dense dans G.

v) Si $t = \infty$, les suites $y_{\gamma_j}^\pm$ convergent dans $Y_\theta^\pm$ vers des points notés $y_\infty^\pm$. Et dans ce cas la condition ii) est renforcée en la condition suivante: Pour tout g, h dans $E \cup \{\infty\}$ (resp. pour tout g, h dans $E \cup \{\infty\}$ avec $g \neq h^{-1}$) Le couple (y_g^+, y_h^-) de $Y_\Gamma \times Y_\Gamma^-$ est en position générale.

b) Pour un tel choix, il existe des suites $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{0<j<t}$ et $\underline{m^o} = (m_j^o)_{0<j<t}$ telles que, pour toute suite d'entiers $\underline{m} = (m_j)_{0<j<t}$ avec $m_j \geq m_j^o$ pour tout j, le sous-semigroupe (resp.sous-groupe) $\Gamma_{\underline{m}}$ de générateurs $(\gamma_j^{m_j})_{0<j<t}$ est (θ,ε)-Schottky, de type θ, discret et Zariski dense dans G.

Remarques - Rappelons que, pour tout g dans G, on a l'égalité dans $Y_{\theta_g}^-$: $y_{g^{-1}}^+ = y_g^-$.

- Les symboles $y_\infty^\pm$ sont des notations qui permettent d'exprimer simplement la condition v). Ils ne signifient nullement que l'on considère des éléments de G notés ∞.

Démonstration. On va supposer que Γ est un groupe. On a alors $Y_\Gamma^- = Y_\Gamma$ et $\Lambda_\Gamma^- = \Lambda_\Gamma$. Le cas où Γ est un semigroupe est plutôt plus facile et est laissé au lecteur.

a) Comme tout sous-groupe Zariski dense de G contient un sous-groupe de type fini qui est encore Zariski dense, on peut aussi supposer que Γ est de type fini. Il existe alors un entier $n_\Gamma \geq 1$ tel que, pour tout g dans Γ, le groupe engendré par g^{n_Γ} est Zariski connexe ([Ti2] lemme 4.2). Notons G_{reg} l'ouvert de Zariski de G formé des éléments semisimples réguliers (c'est à dire des éléments dont le centralisateur est un tore maximal de G).

Soit (y_∞^+, y_∞^-) un couple de $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ en position générale. A l'aide du lemme 3.6 iii), on peut choisir deux suites $(y_n)_{n\geq 1}$ dans Λ_Γ convergeant vers les points $y_\infty^\pm$ de sorte que, pour m, n entiers positifs ou ∞ et $\alpha, \beta = \pm$, les couples (y_m^α, y_n^β) sont en position générale sauf si $m = n$ et $\alpha = \beta$. On s'autorisera par la suite à modifier ce choix des $y_n^\pm$ mais toujours de façon à ce que ces conditions soient vérifiées.

Construisons tout d'abord γ_1. D'après les lemmes 3.6 iv) et 4.2 bis, on peut, quitte à remplacer les points $y_1^\pm$ par des points suffisamment proches, supposer qu'il existe un élément γ_1' de Γ tel que l'élément $\gamma_1 := (\gamma_1')^{n_\Gamma}$ est semisimple régulier, vérifie $\lambda(\gamma_1) \in \Omega_1$ et $y_{\gamma_1}^\pm = y_1^\pm$.

Comme γ_1 est semisimple régulier, la réunion des sous-groupes propres Zariski fermés et Zariski connexes de G qui contiennent γ_1 est incluse dans un fermé de Zariski propre F_{γ_1} de G ([Ti2] proposition 4.4). On note $F_{\gamma_1}^c$ l'ouvert de Zariski complémentaire.

Construisons maintenant les autres γ_j par récurrence sur j. Comme précédemment, d'après les lemmes 3.6 iv) et 4.2 bis, on peut, quitte à remplacer les points $y_j^\pm$ par des points suffisamment proches, supposer qu'il existe un élément γ_j' de Γ tel que l'élément $\gamma_j := (\gamma_j')^{n_\Gamma}$ est dans $F_{\gamma_1}^c$, vérifie $\lambda(\gamma_j) \in \Omega_j$ et $y_{\gamma_j}^\pm = y_j^\pm$.

Par construction, la suite γ_j vérifie i), ii) et v). Comme γ_j est la puissance $n_\Gamma^{\text{ième}}$ d'un élément de Γ, le semigroupe engendré par γ_j est Zariski connexe. Comme γ_2 n'est pas dans F_{γ_1}, le semigroupe engendré par γ_1 et γ_2 est Zariski dense dans G. Ce qui prouve ii) et iv).

b) Pour tout $j < t$, on peut trouver un réel $\varepsilon_j > 0$ tel que, pour tout α_i dans θ, $\alpha, \beta = \pm$ et $n < t$ avec $\gamma_j^\alpha \neq \gamma_n^\beta$, on a

$$\varepsilon_j \leq \frac{1}{2}\delta(x^+_{\rho_i(\gamma_n^\beta)}, X^<_{\rho_i(\gamma_j^\alpha)}) \text{ et}$$

$$\varepsilon_j \leq \frac{1}{2}\delta(x^+_{\rho_i(\gamma_j^\alpha)}, X^<_{\rho_i(\gamma_n^\beta)}) \quad .$$

C'est clair si $t < \infty$ car il n'y a qu'un nombre fini de conditions sur ε_j. Si $t = \infty$, c'est possible car, comme les couples $(y_\infty^\beta, y_j^{-\alpha})$ sont en position générale, la suite de points $(x^+_{\rho_i(\gamma_n^\beta)})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{P}(V_i)$ vers un point qui n'est pas dans l'hyperplan $X^<_{\rho_i(\gamma_j^\alpha)}$ et, de la même façon, comme les couples $(y_j^\alpha, y_\infty^{-\beta})$ sont en position générale, la suite d'hyperplans $(X^<_{\rho_i(\gamma_n^\beta)})_{n\geq 1}$ converge vers un hyperplan de $\mathbb{P}(V_i)$ qui ne contient pas le point $x^+_{\rho_i(\gamma_j^\alpha)}$.

On peut alors trouver des entiers m_j^o tel que, pour tout $m_j \geq m_j^o$, les éléments $\gamma_j^{m_j}$ et $\gamma_j^{-m_j}$ sont (θ, ε_j)-proximaux. Le groupe $\Gamma_{\underline{m}}$ est alors un sous-groupe $(\theta, \underline{\varepsilon})$-Schottky de générateurs $(\gamma_j)_{0<j<t}$. D'après iii) l'adhérence de Zariski de $\Gamma_{\underline{m}}$ contient les générateurs γ_j; elle est donc égale à G d'après iv).$\diamond$

4.4 Convexité du cône limite L_Γ.

Démonstration de la proposition 4.a. Soient L_1 et L_2 deux demidroites de L_Γ. D'après la proposition 4.3, on peut trouver un sous-semigroupe Γ' (θ,ε)-Schottky de générateurs γ_1,γ_2 dans Γ tel que les demidroites L_{γ_1} et L_{γ_2} sont arbitrairement proches de L_1 et L_2. D'après le corollaire 4.2, l'enveloppe convexe de L_{γ_1} et L_{γ_2} est inclus dans L_Γ. Comme L_Γ est fermé, l'enveloppe convexe de L_1 et L_2 est aussi incluse dans L_Γ. Donc L_Γ est convexe.$\diamond$

4.5 Éléments (θ,ε)-proximaux.

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants:

Lemme. *Il existe une partie finie F de Γ et un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante: pour tout g dans Γ, on peut trouver un élément f de F tel que l'élément gf est $(\theta_\Gamma,\varepsilon)$-proximal.*

Démonstration. C'est une reformulation du corollaire 3 de 3.1 appliqué aux représentations ρ_i, pour α_i dans θ_Γ .$\diamond$

Le lemme suivant affirme que, pour un élément (θ,ε)-proximal g, l'élément $\lambda(g)$ est une bonne approximation de la projection de Cartan $\mu(g)$.

Lemme. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte N_ε de $A^\bullet$ telle que, pour tout élément $(\theta_\Gamma,\varepsilon)$-proximal g de Γ, on a*

$$\mu(g) - \lambda(g) \in N_\varepsilon \; .$$

Démonstration. On note $\theta = \theta_\Gamma$ et on choisit, grace au lemme 3.2, un réel

$$\varepsilon_0 < \Big(\sup_{\alpha_i \in \theta^c, g\in\Gamma} |\alpha_i(\mu(g))| \Big)^{-1} \; .$$

On pose, avec les notations de 2.2.1 et 2.5.2, $C'_\varepsilon = c_\varepsilon^{-1} \sup_{\alpha_i\in\theta} C_{\chi_i}$ et on prend

$$\begin{array}{rl} N_\varepsilon = \{ a \in A \; / & \varepsilon \le |\alpha_i|(a) \le \varepsilon^{-1} \quad \forall \alpha_i \in \theta^c \; , \\ & C'^{-1}_\varepsilon \le |\chi_i|(a) \le C'_\varepsilon \quad \forall \alpha_i \in \theta \text{ et} \\ & |\chi_i|(a) = 1 \quad \forall i = r_S + 1, \ldots, r \; \} \; . \end{array}$$

Ce compact convient. En effet, d'une part, pour α_i dans θ^c, on a par définition

$$|\alpha_i|(\lambda(g)) = 1 \;\text{ et }\; 1 \le |\alpha_i|(\mu(g)) \le \varepsilon^{-1} \; .$$

D'autre part, pour α_i dans θ, il résulte du lemme 2.2.1 que

$$c_\varepsilon \le \frac{\lambda_1(\rho_i(g))}{\|\rho_i(g)\|} \le 1 \; ,$$

et donc, à l'aide du lemme 2.5.2, on a

$$c_\varepsilon C_{\chi_i}^{-1} \leq \frac{|\chi_i|(\lambda(g))}{|\chi_i|(\mu(g))} \leq C_{\chi_i} \ .$$

Enfin, pour $r_S < i \leq r$ on a

$$|\chi_i|(\lambda(g)) = |\chi_i|(\mu(g)) \ .\diamond$$

4.6 La projection de Cartan de Γ.

Le résultat suivant est la proposition 5.1 de [Be].

Lemme. *Pour toute partie compacte L de G, il existe une partie compacte M de $A^\bullet$ telle que, pour tout g dans G, on a*

$$\mu(LgL) \subset \mu(g) + M \ .$$

Rappelons que, par définition, la restriction à A^+ de l'addition de $A^\bullet$ coïncide avec la multiplication de A^+.

La proposition suivante compare la projection de Cartan et la projection de Lyapounov d'un sous-semigroupe Zariski dense.

Proposition. *Il existe une partie compacte N de $A^\bullet$ telle que*

$$\mu(\Gamma) \subset \lambda(\Gamma) + N \ .$$

Remarques - C'est faux si Γ n'est pas Zariski dense: prendre pour Γ un groupe engendré par un élément unipotent.

- Réciproquement, l'existence d'une partie compacte N' de $A^\bullet$ telle que $\lambda(\Gamma) \subset \mu(\Gamma) + N'$ est vraie pour les sous-groupes et les sous-semigroupes (θ,ε)-Schottky: il suffit d'appliquer le lemme 4.5.2 aux mots très réduits de Γ. Je ne sais pas si cette existence est vraie en général.

Démonstration. Soient F la partie finie de Γ et ε la constante introduites dans le lemme 4.5.1. Soit M la partie compacte de $A^\bullet$ associée par le lemme ci-dessus à la partie $L := F^{-1}$. Pour tout g dans Γ, on peut donc trouver f dans F tel que gf est (θ,ε)-proximal. Le lemme 4.5.2 donne alors

$$\mu(g) \in \mu(gf) + M \subset \lambda(gf) + M + N_\varepsilon \subset \lambda(\Gamma) + M + N_\varepsilon \ .$$

Ce qui prouve notre proposition avec $N = M + N_\varepsilon$.$\diamond$

Démonstration de la proposition 4.b Notons C_Γ le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$. L'inclusion $L_\Gamma \subset C_\Gamma$ résulte du corollaire 2.5 et l'inclusion inverse de la proposition précédente.$\diamond$

5. Exemples.

Le but de cette partie est de démontrer les points 1.2.b et 1.4.b des théorèmes de l'introduction: il s'agit de construire un sous-groupe ou un sous-semigroupe Zariski dense dont le cône limite est un cône convexe Ω prescrit.

La construction du sous-groupe est l'objet de la section 5.1: on suppose alors que le cône Ω est d'intérieur non vide et stable par par l'involution d'opposition.

La construction du sous-semigroupe est l'objet de la section 5.2 (pour $k = \mathbb{R}$) et 5.3 (pour k non archimédien). Le semigroupe que l'on construit est ouvert, mais on peut en extraire un sous-semigroupe discret ayant même cône limite: ceci est expliqué dans la section 5.1.

5.1 Construction de Γ.

Proposition. *Soient Γ un sous-semigroupe (resp.sous-groupe) Zariski dense de G et Ω un cône convexe fermé d'intérieur non vide dans L_Γ (resp. un cône convexe fermé d'intérieur non vide dans L_Γ et stable par l'involution d'opposition).*

On suppose que Γ n'est pas borné modulo le centre de G. Alors il existe un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) discret Zariski dense Γ' de Γ tel que $L_{\Gamma'} = \Omega$.

Remarques - La condition "Ω d'intérieur non vide dans L_Γ" signifie que Ω est inclus dans L_Γ, qu'il engendre le même sous-espace vectoriel de $A^\bullet$ que L_Γ et que celui-ci est non nul.

- Rappelons que la condition "Γ non borné modulo le centre de G" est automatiquement vérifiée lorsque $k = \mathbb{R}$ et que G/Z est non compact.

Démonstration. Par hypothèse la partie $\theta = \theta_\Gamma$ est non vide. Soit B le sous-espace vectoriel de $A_\theta^\bullet$ engendré par L_Γ. Choisissons une suite $(\omega_j)_{j\geq 0}$ de cônes convexes ouverts dans B et inclus dans Ω telle que tout cône ouvert dans B et inclus dans Ω est réunion des ω_j qu'il contient. Notons Ω_j un cône ouvert convexe de $A_\theta^{\times\times}$ tel que $\Omega_j \cap B = \omega_j$.

Choisissons une suite $(\gamma_j)_{j\geq 0}$ dans Γ ainsi que des suites $(\varepsilon_j)_{j\geq 0}$ et $(m_j)_{j\geq 0}$ comme dans le lemme 4.3. Soit M_ε les compacts de $A^\bullet$ introduits dans le lemme 4.1. On peut supposer que ces compacts M_ε sont stables par l'involution d'opposition et que les m_j sont choisis tels que

$$\lambda(\gamma_j^{m_j}) + (M_{\varepsilon_j} \cap B) \subset \Omega$$

Lorsque Γ est un groupe, l'invariance de Ω par l'involution d'opposition assure que l'on a aussi

$$\lambda(\gamma_j^{-m_j}) + (M_{\varepsilon_j} \cap B) \subset \Omega\ .$$

Posons $\Gamma' = \Gamma_{\underline{m}}$: c'est le sous-semigroupe (resp.sous-groupe) discret, Zariski dense et (θ,ε)-Schottky en les générateurs $\gamma_j^{m_j}$. Comme $\lambda(\gamma_j)$ est dans ω_j, le cône $L_{\Gamma'}$ rencontre tous les cônes ω_j, et donc $L_{\Gamma'} \supset \Omega$.

Démontrons l'inclusion inverse. Il suffit de voir que pour tout mot très réduit $w = g_l \cdots g_1$ où g_p est un des éléments $\gamma_j^{m_j}$ (resp.$\gamma_j^{\pm m_j}$), on a $\lambda(w) \in \Omega$. Or le lemme 4.1, les inclusions précédentes et la convexité de Ω prouvent que

$$\lambda(w) \in \sum_{1 \le p \le l} (\lambda(g_p) + (M_{\varepsilon_{g_p}} \cap B)) \subset \Omega \ .$$

Donc $L_{\Gamma'} = \Omega$.$\diamond$

Corollaire. *On suppose que G/Z est non compact. Soit Ω un cône convexe fermé d'intérieur non vide de $A^\times$ (resp. un cône convexe fermé d'intérieur non vide stable par l'involution d'opposition).*

Alors il existe un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) discret Zariski dense Γ' de G tel que $L_{\Gamma'} = \Omega$.

Démonstration. Prendre $\Gamma = G$ dans la proposition précédente.$\diamond$

5.2 Les semigroupes ouverts G_f^ε et $G_{f,\Omega}^\varepsilon$ pour $k = \mathbb{R}$.

Soit f un élément de Z_Π. On rappelle que, pour $i = 1, \ldots, r$, $x_{i,f}^+$ est le point fixe du sous-groupe parabolique y_f^+ dans $X_i = \mathbb{P}(V_i)$ et $X_{i,f}^<$ l'unique hyperplan de X_i invariant par le sous-groupe parabolique opposé y_f^-. On pose $\varepsilon_f := \frac{1}{10} \inf_{1 \le i \le r} \delta(x_{i,f}^+, X_{i,f}^<)$. On choisit un réel $\varepsilon < \varepsilon_f$ et on note

$$b_{i,f}^\varepsilon = \{x \in X_i \ / \ d(x, x_{i,f}^+) \le \varepsilon\} \ ,$$

$$B_{i,f}^\varepsilon = \{x \in X_i \ / \ \delta(x, X_{i,f}^<) \ge \varepsilon\} \ ,$$

$$\overline{G}_f^\varepsilon = \{g \in G \ / \ \forall i = 1, \ldots, r \ \ \rho_i(g)(B_{i,f}^\varepsilon) \subset b_{i,f}^\varepsilon \text{ et } \rho_i(g)|_{B_{i,f}^\varepsilon} \text{ est } \varepsilon\text{-Lipschitzienne } \} \text{ et}$$

$$G_f^\varepsilon = \cup_{\varepsilon' < \varepsilon} \overline{G}_f^{\varepsilon'} \ .$$

De notre point de vue, l'ensemble G_f^ε diffère peu de l'ensemble

$$G_f^{(\varepsilon)} = \{g \in G \ / \ g \text{ est } (\Pi, \varepsilon)\text{−proximal et } d(f_g, f) \le \varepsilon \ \}$$

que nous avons introduit en 2.6. C'est ce qu'affirme le point c) du lemme suivant.

Lemme. *($k = \mathbb{R}$) Soient $f \in Z_\Pi$ et $\varepsilon < \varepsilon_f$.*

a) Le semigroupe G_f^ε est ouvert dans G. En particulier, il est Zariski dense.

b) Le semi groupe G_f^ε est fortement 2ε-Schottky sur Y_Π.

c) On peut trouver $\eta = \eta_{f,\varepsilon}$ tel que $G_f^\eta \subset G_f^{(\varepsilon)}$ et $G_f^{(\eta)} \subset G_f^\varepsilon$.

d) Son cône limite est A^+ et, quand ε décroit vers 0, les ensembles limites $\Lambda_{G_f^\varepsilon}^\pm$ forment une base de voisinages de $y_f^\pm$.

Remarque. Il aurait été aussi naturel d'introduire les semigroupes ouverts $G_f^{((\varepsilon))}$ définis par

$$b_f^\varepsilon = \{y \in Y_\Pi \ / \ d(y, y_f^+) \le \varepsilon \ \} \ ,$$

$$B_f^\varepsilon = \{y \in Y_\Pi \ / \ \delta(y, U^c_{y_f^-}) \geq \varepsilon \} \ ,$$

$$\overline{G}_f^{((\varepsilon))} = \{g \in G \ / \ g(B_f^\varepsilon) \subset b_f^\varepsilon \text{ et } g|_{B_f^\varepsilon} \text{ est } \varepsilon\text{-Lipschitzienne } \} \text{ et}$$

$$G_f^{((\varepsilon))} = \cup_{\varepsilon' < \varepsilon} \overline{G}_f^{((\varepsilon'))} \ .$$

En fait ce semigroupe diffère peu de G_f^ε: le lecteur vérifiera qu'il existe $\zeta = \zeta_{f,\varepsilon} > 0$ tel que $G_f^\zeta \subset G_f^{((\varepsilon))}$ et $G_f^{((\zeta))} \subset G_f^\varepsilon$.

Démonstration. a) Il est clair que G_f^ε est un semigroupe ouvert. Il est non vide car si g est un élément de G tel que $f_g = f$, il existe $n \geq 1$ tel que g^n est dans G_f^ε.

b) On procède comme dans le lemme 6.2 de [Be]: Soit g dans G_f^ε. La restriction de $\rho_i(g)$ à $B_{i,f}^\varepsilon$ est ε-Lipschitzienne. Elle a donc un point fixe attracteur $x_{i,g}^+$. Donc $\rho_i(g)$ est proximal. Notons $X_{i,g}^< := X_{\rho_i(g)}^<$. Comme $g(B_{i,f}^\varepsilon) \subset b_{i,f}^\varepsilon$, on a $d(x_{i,g}^+, x_{i,f}^+) \leq \varepsilon$ et $d(X_{i,g}^<, X_{i,f}^<) \leq \varepsilon$. Comme $10\varepsilon \leq \delta(x_{i,f}^+, X_{i,f}^<)$, on en déduit que $\rho_i(g)$ est 2ε-proximal et que, si g' est un autre élément de G_f^ε, on a $\delta(x_{i,g}^+, X_{i,g'}^<) \geq 4\varepsilon$. Le semigroupe G_f^ε est bien $(\Pi,2\varepsilon)$-Schottky sur Y_Π.

c) Le passage entre ε et η provient des diverses distances naturelles qui définissent la même topologie sur Z_Π: on peut, par exemple, choisir $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ tel que, pour tout projecteur π de V_i d'image $x^+ \in \mathbb{P}(V_i)$ et de noyau $X^< \subset \mathbb{P}(V_i)$, on a les implications:

$$\|\pi - \pi_{i,f}\| < \eta \Longrightarrow (d(x^+, x_{i,f}^+) < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ et } \ \delta(X^<, X_{i,f}^<) < \frac{\varepsilon}{2}) \ ;$$

$$(d(x^+, x_{i,f}^+) < \eta \ \text{ et } \ \delta(X^<, X_{i,f}^<) < \eta) \Longrightarrow \|\pi - \pi_{i,f}\| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Le raisonnement fait en b) et le choix de η prouvent que si g est dans G_f^η alors g est (Π,ε)-proximal et $d(f_g, f) := \sup\limits_{1 \leq i \leq r} \|\pi_{i,g} - \pi_{i,f}\| \leq \varepsilon$. Donc g est dans $G_f^{(\varepsilon)}$.

Réciproquement, si g est dans $G_f^{(\eta)}$, on a $d(f_g, f) \leq \eta$ et donc

$$d(x_{i,g}^+, x_{i,f}^+) < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ et } \ \delta(X_{i,g}^<, X_{i,f}^<) < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Donc comme g est $(\Pi,2\varepsilon)$-proximal, on a

$$\rho_i(g)(B_{i,f}^\varepsilon) \subset \rho_i(g)(B_{i,f_g}^{\frac{\varepsilon}{2}}) \subset b_{i,f_g}^{\frac{\varepsilon}{2}} \subset b_{i,f}^\varepsilon \ .$$

Ceci est vrai pour tout i, donc g est dans $\overline{G}_f^\varepsilon$. Le même raisonnement avec un réel $\varepsilon' < \varepsilon$ bien choisi prouve que g est dans G_f^ε.

d) Remarquons que si g est un élément tel que $d(f_g, f) \leq \varepsilon$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $g^n \in G_f^{(\varepsilon)}$. Nos affirmations résultent alors du c).$\diamond$

Soit M_ε le compact de $A^\bullet$ introduit dans le lemme 4.1. Pour tout cône fermé convexe d'intérieur non vide Ω de $A^\times$, on note Ω_ε l'intérieur du plus grand translaté de Ω tel que $\Omega_\varepsilon + 2M_{2\varepsilon} \subset \Omega$ et on pose

$$G_{f,\Omega}^\varepsilon = \{g \in G_f^\varepsilon \ / \ \lambda(g) \in \Omega_\varepsilon\} \ .$$

Lemme. *($k=\mathbb{R}$) L'ensemble $G^{\varepsilon}_{f,\Omega}$ est un semigroupe ouvert dans G qui est fortement 2ε-Schottky sur Y_Π. Son cône limite est Ω. Lorsque ε décroit vers 0, les ensembles limites $\Lambda^{\pm}_{G^{\varepsilon}_{f,\Omega}}$ forment une base de voisinage de $y^{\pm}_f$.*

Démonstration. La seule affirmation qui ne découle pas directement du lemme 5.1 est le fait que $G^{\varepsilon}_{f,\Omega}$ est un semigroupe: soient g_1 et g_2 deux éléments de $G^{\varepsilon}_{f,\Omega}$; comme le semigroupe G^{ε}_f est fortement 2ε-Schottky sur Y_Π, le lemme 4.1 donne

$$\lambda(g_1g_2)\in\lambda(g_1)+\lambda(g_2)+2M_{2\varepsilon}\subset\Omega_\varepsilon+\Omega\subset\Omega_\varepsilon\ ,$$

et donc g_1g_2 est aussi dans $G^{\varepsilon}_{f,\Omega}$.$\diamond$

5.3 Les semigroupes G^{ε}_f et $G^{\varepsilon}_{f,\Omega}$ pour k non archimédien.

Dans ce paragraphe, on effectue des constructions analogues à celles de 5.2 lorsque k est non archimédien.

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant.

Lemme. *(k non archimédien) Soient V un k-espace vectoriel muni d'une norme ultramétrique, $\pi\in\mathrm{End}(V)$ un projecteur non nul et $\varepsilon<1$. Alors l'ouvert*

$$O^{\varepsilon}_{\pi}:=\{g\in\mathrm{End}(V)\ /\ \|\sigma g\sigma'-\pi\|<\varepsilon\ ,\ \forall(\sigma,\sigma')\in\{1,\pi\}^2\ \}$$

est un semigroupe.

Démonstration. C'est une application de l'égalité $\pi^2=\pi$ et de l'ultramétricité de la norme induite sur $\mathrm{End}(V)$: soient g, h dans O^{ε}_{π}, on a, avec σ, σ' dans $\{1,\pi\}$

$$\|\sigma gh\sigma'-\pi\|\le\sup(\|(\sigma g-\pi)(h\sigma'-\pi)\|,\|\sigma g\pi-\pi\|,\|\pi h\sigma'-\pi\|\le\sup(\varepsilon^2,\varepsilon,\varepsilon)=\varepsilon\ .$$

Donc gh est dans O^{ε}_{π}.$\diamond$

Soient θ une partie de Π et f un élément de Z_θ. On note L_f le stabilisateur dans G de f: c'est aussi l'intersection des deux sous-groupes paraboliques y^+_f et y^-_f.

Pour $i=1,\dots,r$, on note $V^+_{i,f}$ le plus petit sous-espace non nul de V_i invariant sous l'action du sous-groupe parabolique y^+_f, $V^<_{i,f}$ l'unique supplémentaire L_f-invariant de $V^+_{i,f}$ et $\pi_{i,f}\in\mathrm{End}(V_i)$ le projecteur sur $V^+_{i,f}$ parallèlement à $V^<_{i,f}$. Remarquons que $\pi_{i,f}$ est de rang un si et seulement si α_i est dans θ. On rappelle que u désigne une uniformisante, on fixe $\varepsilon<1$ et on pose

$$G^{\varepsilon}_f=\{g\in G\ /\ \forall i=1,\dots,r\ ,\ \exists\ p_i(g)\in\mathbb{Z}\ /\ \mathrm{u}^{-p_i(g)}\rho_i(g)\in O^{\varepsilon}_{\pi_{i,f}}\ \}\ .$$

Lemme. *(k non archimédien) Soient $f\in Z_\theta$ et $\varepsilon<1$.*

a) Le semigroupe G^{ε}_f est ouvert et fermé dans G et est de type θ. En particulier, il est Zariski dense.

b) Pour ε suffisamment petit, on peut trouver $\eta = \eta_{f,\varepsilon}$ tel que G_f^η est fortement (θ,ε)-Schottky.

c) Le cône limite de G_f^ε est A_θ^+ Quand ε décroit vers 0, les ensembles limites de G_f^ε forment une base de voisinages des points $y_f^\pm$.

d) Pour tout g, g' dans G_f^ε, on a $\lambda(gg') = \lambda(g)\lambda(g')$

Démonstration. a) Il est clair que G_f^ε est ouvert, fermé et non vide. Il est de type θ d'après le lemme 3.2.ii).

b) c) C'est la même démonstration que pour $k = \mathbb{R}$.

d) Cela résulte des égalités:

$$\chi_i(\lambda(g)) = \mathrm{u}^{p_i(g)} \text{ et}$$

$$p_i(gg') = p_i(g) + p_i(g') \;.\diamond$$

Corollaire. *(k non archimédien) Soit Ω un cône convexe fermé à support rationnel (i.e. tel que Ω et $\Omega \cap A^+$ engendrent le même sous-espace vectoriel B de $A^\bullet$). Soient θ la plus petite partie de Π telle que $A_\theta^\times$ contient Ω, f un élément de Z_θ et $\varepsilon \leq 1$.*

On pose

$$G_{f,\Omega}^\varepsilon = \{g \in G_f^\varepsilon \;/\; \lambda(g) \in \Omega\}$$

Alors les ensembles $G_{f,\Omega}^\varepsilon$ sont des sous-semigroupes ouverts de type θ dont le cône de Lyapounov est Ω.

Démonstration. Cela résulte de ce que l'application $\lambda : G_f^\varepsilon \to A^+$ est un morphisme de semigroupes localement constant.$\diamond$

6. L'ensemble des directions limites $\mathcal{L}_\Gamma$.

Dans cette partie, on s'intéresse tout d'abord aux sous-semigroupes ouverts de G. On montre que, pour g_1, g_2 dans G, on peut trouver deux sous-semigroupes ouverts H_1, H_2 disjoints contenant respectivement les points g_1 et g_2, si et seulement si les composantes hyperboliques de g_1 et g_2 n'appartiennent pas à un même "sous-semigroupe à un paramètre" (6.2).

On suppose à partir de 6.3 que $k = \mathbb{R}$. On montre alors que l'intersection du sous-semigroupe Zariski dense Γ et d'un sous-semigroupe ouvert est encore Zariski dense dès qu'elle est non vide.

Ce sont ces deux propriétés qui motivent la définition de l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ des directions limites de Γ: c'est l'ensemble des éléments hyperboliques g de G tels que tout sous-semigroupe ouvert de G qui contient g rencontre Γ. On donne aussi d'autres définitions équivalentes de $\mathcal{L}_\Gamma$ qui justifient la terminologie "directions limites" (théorème 6.4.b).

On montre en 6.4 que l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ rencontre l'intérieur d'une chambre de Weyl f si et seulement si f est quasipériodique, et que, dans ce cas, l'intersection $f \cap \mathcal{L}_\Gamma$ s'identifie naturellement au cône limite L_Γ.

6.1 Semigroupes ouverts et éléments hyperboliques.
La proposition suivante nous sera utile.

Proposition. *Soit g un élément de G. Alors*
a) Tout sous-semigroupe ouvert H de G qui contient g contient aussi g_h^n pour un entier $n \geq 1$.
b) Tout sous-semigroupe ouvert H de G qui contient g_h contient aussi g^n pour un entier $n \geq 1$.

Remarque. Rappelons que lorsque k est non archimédien, il se peut que la composante hyperbolique g_h n'existe pas. Cependant $g_h^n := (g^n)_h$ a un sens dès que n est multiple d'un entier n_G.

Commençons par un lemme préparatoire.

Lemme. *Même notation. On suppose que $\lambda(g) = 0$.*
a) Tout sous-semigroupe ouvert H de G qui contient g contient aussi l'élément neutre e.
b) Pour tout voisinage B de e dans G, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $g^n \in B^n$. En outre, si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_o$, on a $g^n \in B^n$.

Démonstration du lemme. a) La décomposition de Jordan de g s'écrit $g = g_e g_u$. Soit B un voisinage de e tel que $Bg \subset H$. Il existe une suite n_p telle que $\lim_{p\to\infty} g_e^{n_p} = e$. Donc, pour $p \gg 0$, on a

$$g_u^{n_p} \in Bg^{n_p} \subset H\ .$$

Donc H contient un élément unipotent. Or tout voisinage d'un élément unipotent contient un élément elliptique (si k est non archimédien, cela résulte de la densité des éléments semisimples; si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, c'est vrai pour $G = \mathrm{SL}(2, k)$ et le cas général s'en déduit à l'aide du théorème de Jacobson-Morozov). On en déduit que H contient un élément elliptique puis, en reprenant le raisonnement précédent, qu'il contient e.

b) Il suffit de prouver cette assertion séparément pour g elliptique et pour g unipotent.

Lorsque g est elliptique, ou lorsque k est non archimédien, cela résulte de ce que le groupe engendré par g est borné.

Lorsque g est unipotent et que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on se ramène, à l'aide du théorème de Jacobson-Morozov au cas où $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Dans une base convenable, on a alors $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit B' un voisinage de e tel que $(B')^3 \subset B$. On choisit $a > 1$ tel que l'élément $h := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et son inverse h^{-1} sont dans B'. On peut alors trouver $n_o \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_o$, l'élément $u_n := \begin{pmatrix} 1 & na^{-2n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans B'. L'égalité $g^n := h^n u_n h^{-n}$ prouve alors que g est dans $(B')^{2n+1} \subset B^n$.$\diamond$

Démonstration de la proposition. On peut supposer que g_h existe. Soit L le centralisateur de g_h.

a) Il existe un voisinage L_ε de e dans L tel que $gL_\varepsilon \subset H$. D'après le lemme a), on peut trouver $n \geq 1$ tel que $(g_e g_u L_\varepsilon)^n$ contient e. Mais alors on a

$$g_h^n \in g_h^n (g_e g_u L_\varepsilon)^n = (gL_\varepsilon)^n \subset H \ .$$

b) Il existe un voisinage L_ε de e dans L tel que $g_h L_\varepsilon \subset H$. D'après le lemme b), on peut trouver $n \geq 1$ tel que $(g_e g_u)^n \in (L_\varepsilon)^n$. Mais alors on a

$$g^n \in g_h^n (L_\varepsilon)^n = (g_h L_\varepsilon)^n \subset H \ .$$

6.2 Les semigroupes ouverts G_g^ε.

On fixe une représentation fidèle ρ de G et on note, pour g dans G,
$B(g, \varepsilon) = \{g \in G \ / \ \|\rho(g') - \rho(g)\| \leq \varepsilon\}$ et

$$G_g^\varepsilon = \cup_{n \geq 1} B(g, \varepsilon)^n$$

le semigroupe ouvert engendré par ce petit voisinage de g. On note $Y_g^\pm$ l'image réciproque du point $y_g^\pm$ par la projection naturelle $Y_\Pi \to Y_{\theta_g}$.

Proposition. *Soit g un élément de G tel que $\lambda(g) \neq 0$.*

a) ($k = \mathbb{R}$) Lorsque ε décroit vers 0, les cônes limites $L_{G_g^\varepsilon}$ forment une base de voisinages coniques de la demidroite L_g dans $A^\times$ et les ensembles limites $\Lambda_{G_g^\varepsilon}^\pm$ forment une base de voisinage de la partie $Y_g^\pm$ dans Y_Π.

b) (k non archimédien) Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, le cône limite $L_{G_g^\varepsilon}$ est égal à L_g. En particulier, G_g^ε est du type $\theta := \theta_g$. En outre, quand ε décroit vers 0, les ensembles limites $\Lambda_{G_g^\varepsilon}^\pm$ forment une base de voisinage du point $y_g^\pm$ dans $Y_\theta^\pm$.

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'affirmation relative au cône limite. Soit $\eta > 0$ si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\eta = 0$ si k est non archimédien. Il suffit de trouver un voisinage $B(g, \varepsilon)$ tel que, pour tout h dans $B(g, \varepsilon)^n$ avec $n \geq 1$ et tout $i = 1, \ldots, r$ on a

$$-\eta \leq \frac{1}{n} \log(|\chi_i|(\lambda(h))) - \log(|\chi_i|(\lambda(g))) \leq \eta \ .$$

Comme on a l'égalité $\chi_i(\lambda(h)) = \lambda_1(\rho_i(h))$, cela résulte du lemme ci-dessous.

Démontrons maintenant l'affirmation relative à l'ensemble limite Λ^+ (on procède de même pour Λ^-). Remarquons tout d'abord que, lorsque $k = \mathbb{R}$, comme G_g^ε contient une puissance de g_h, l'ensemble limite $\Lambda_{G_g^\varepsilon}^+$ contient Y_g^+. Pour conclure, il suffit alors de montrer que, pour α_i dans θ_g, les ensembles limites de G_g^ε dans $\mathbb{P}(V_i)$ forment, lorsque ε décroit vers 0, une base de voisinage du point x_{i,f_g}^+. Ce fait résulte de la proximalité de g dans $\mathbb{P}(V_i)$.$\diamond$

On a utilisé le lemme suivant:

Lemme. *Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie et $g \in \mathrm{End}(V)$. Soit $\eta > 0$ si k est archimédien et $\eta = 0$ sinon.*

Alors il existe un voisinage B_g de g dans $\mathrm{End}(V)$ tel que, pour tout h dans $(B_g)^n$ avec $n \geq 1$ et tout $j = 1, \dots, \dim(V)$ on a

$$-\eta \leq \frac{1}{n}\log(\lambda_j(h)) - \log(\lambda_j(g)) \leq \eta\ .$$

Démonstration. Comme $\lambda_1(\Lambda^j h) = \lambda_1(h) \cdots \lambda_j(h)$, il suffit de montrer ces inégalités pour $j = 1$.

Remarquons que l'on peut trouver une norme sur V telle que $\|g\| \leq \lambda_1(g)e^{\frac{\eta}{2}}$. On peut alors choisir B_g tel que, pour tout h' dans B_g, on a $\|h'\| \leq \lambda_1(g)e^{\varepsilon}$. Donc si $h = h_1 \cdots h_n$ avec $h_i \in B_g$, on a

$$\frac{1}{n}\log(\lambda_1(h)) \leq \frac{1}{n}\log\|h\| \leq \frac{1}{n}\sum_{1 \leq p \leq n} \log\|h_p\| \leq \log(\lambda_1(g)) + \varepsilon\ .$$

Il reste à obtenir la minoration de $\lambda_1(h)$. Soit s le plus grand entier tel que $\lambda_1(g) = \cdots = \lambda_s(g)$. Remarquons que $\lambda_1(\Lambda^s h) \leq \lambda_1(h)^s$ et que $\Lambda^s g$ est proximal dans $\mathbb{P}(\Lambda^s V)$. On peut donc supposer que g est proximal.

On note V^+ la droite propre de g associée à la valeur propre la plus grande en module et $V^<$ son unique supplémentaire g invariant. On peut trouver une norme sur V telle que $\|g|_{V^<}\| < \lambda_1(g)$ et telle que, pour tout $v^+ \in V^+$ et $v^< \in V^<$, on a $\|v^+ + v^<\| \leq \sup(\|v^+\|, \|v^<\|)$. Notons

$$C = \{ v = v^+ + v^< \ / \ v^+ \in V^+\ ,\ v^< \in V^< \text{ et } \|v^+\| \geq \|v^<\|\ \}\ .$$

On peut choisir le voisinage B_g de sorte que, pour tout h' dans B_g, on a

$$h'(C) \subset C \text{ et } \ \|h'(v)\| \geq \lambda_1(g)e^{-\varepsilon}\|v\| \ \ \forall v \in C$$

On calcule alors, pour h dans $(B_g)^n$ et v dans C

$$\|h(v)\| \geq \lambda_1(g)^n e^{-n\varepsilon}\|v\|\ .$$

Donc

$$\frac{1}{n}\log\|h\| \geq \log\lambda_1(g) - \varepsilon\ .$$

L'égalité $\log(\lambda_1(h)) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\log\|h^p\|$ permet alors d'obtenir la minoration cherchée de $\lambda_1(h)$.$\diamond$

Définition. *On appelle "sous-semigroupe à un paramètre hyperbolique" de G un semigroupe $\mathcal{L}$ tel que*
- si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{L} = \gamma([0, \infty[)$ où $\gamma : \mathbb{R} \to G$ est un sous-groupe à un paramètre formé

d'éléments hyperboliques.
- si k est non archimédien, $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathbb{N}$, est formé d'éléments hyperboliques et est maximal pour ces propriétés.

Tout élément hyperbolique $h \neq e$ appartient à un unique sous-semigroupe hyperbolique que l'on note $\mathcal{L}_h$. Si $h = e$, on pose $\mathcal{L}_h = \{e\}$. Pour tout élément g de G, on note $\mathcal{L}_g := \mathcal{L}_h$ où h est la composante hyperbolique de g ou d'une de ses puissances. Remarquons que $\mathcal{L}_g$ peut aussi être défini par l'égalité $\lambda(\mathcal{L}_g) = L_g \cap A^+$ et l'inclusion $\mathcal{L}_g \subset f_g$.

Corollaire. *Soient g_1, g_2 deux éléments de G. On a l'équivalence: $\mathcal{L}_{g_1} \neq \mathcal{L}_{g_2} \iff$ Il existe deux sous-semigroupes ouverts H_1, H_2 de G tels que $g_1 \in H_1$, $g_2 \in H_2$ et $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Par hypothèse, on a $(y^+_{g_1}, y^-_{g_1}, L_{g_1}) \neq (y^+_{g_2}, y^-_{g_2}, L_{g_2})$. Il suffit donc de prendre $H_1 = G^\varepsilon_{g_1}$, $H_2 = G^\varepsilon_{g_2}$ avec ε suffisamment petit et d'appliquer la proposition 6.2.

($\Leftarrow$) Cela résulte de la proposition 6.1.$\diamond$

6.3 Semigroupes ouverts et semigroupes Zariski denses pour $k = \mathbb{R}$.

Les proposition suivante affirme que les semigroupes ouverts peuvent servir de "filtre" pour analyser les semigroupes Zariski denses. Nous l'utiliserons en 7.4.

Proposition. *($k = \mathbb{R}$) Soient Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G et H un sous-semigroupe ouvert de G. Si $\Gamma \cap H$ est non vide, alors $\Gamma \cap H$ est encore Zariski dense.*

Démonstration. Soit g un élément de $\Gamma \cap H$ et $g = g_e g_h g_u$ sa décomposition de Jordan. On peut supposer que g_h est dans A^+. Soit $\theta := \{\alpha \in \Pi \ / \ \alpha(g_h) = 1\}$. On a
$L_\theta := \{g' \in G \ / \ g' g_h = g_h g'\}$, $U_\theta := \{g' \in G \ / \ \lim\limits_{n\to-\infty} g^n g' g^{-n} = e\}$ et
$U^-_\theta := \{g' \in G \ / \ \lim\limits_{n\to+\infty} g^n g' g^{-n} = e\}$. La multiplication induit un difféomorphisme du produit $U^-_\theta \times L_\theta \times U_\theta$ sur un ouvert de Zariski Ω_θ de G. Soient U^-_ε, L_ε, U_ε trois voisinages de e dans U^-_θ, L_θ et U_θ tels que

$$U^-_\varepsilon g L_\varepsilon U_\varepsilon \subset H \ .$$

Pour $n \geq 1$, on a

$$U^-_\varepsilon g^n_h (g_e g_u L_\varepsilon)^n U_\varepsilon \subset H \ .$$

D'après le lemme 6.1.a, on peut trouver $n \geq 1$ tel que $(g_e g_u L_\varepsilon)^n$ contient e. Quitte à remplacer g par g^n et à réduire nos voisinages, on peut supposer que

$$U^-_\varepsilon g_h L_\varepsilon U_\varepsilon \subset H \ .$$

Montrons alors que, pour tout γ dans $\Gamma \cap \Omega_\theta$, il existe $n_o \geq 1$ tel que, pour $n \geq n_o$, on a $g^n \gamma g^{-n} \in \Gamma \cap H$. Ceci prouvera que $\Gamma \cap H$ est Zariski dense par le même raisonnement qu'à la fin de 3.6. On écrit $\gamma = vlu$ avec $v \in U^-_\theta$, $l \in L_\theta$ et $u \in U_\theta$. On a ,

$$g^n \gamma g^n = v_n g^{2n}_h l_n u_n$$

avec

$$v_n = g^n v g^{-n} \quad , \quad l_n = g_e^n g_u^n l g_e^n g_u^n \text{ et } u_n = g^{-n} u g^n \ .$$

Pour n suffisamment grand, on a grâce au lemme 6.1.b

$$v_n \in U_\varepsilon^- \quad , \quad l_n \in L_\varepsilon^n \text{ et } u_n \in U_\varepsilon \ .$$

Donc

$$g^n \gamma g^n \in U_\varepsilon^- g_h^{2n} L_\varepsilon^n U_\varepsilon \subset (U_\varepsilon^- g_h L_\varepsilon U_\varepsilon)^n \subset H \ .$$

Ce qui termine la démonstration.$\diamond$

6.4 L'ensemble des directions limites pour $k = \mathbb{R}$.

Dans ce paragraphe, on suppose encore que $k = \mathbb{R}$ de sorte que $\theta_\Gamma = \Pi$.

Définition. *On note $\mathcal{L}_\Gamma$ l'ensemble des éléments hyperboliques g de G tels que tout sous-semigroupe ouvert H de G contenant g rencontre Γ.*

On note $\mathcal{L}'_\Gamma := \{g \in \mathcal{L}_\Gamma \ / \ g \text{ est } \mathbb{R}\text{−régulier } \}$ et $L'_\Gamma := L_\Gamma \cap A^{\times\times}$.

Remarque. Dans cette définition on se limite aux éléments hyperboliques à cause de la proposition 6.1.

On munit G d'une métrique riemannienne invariante à gauche et on note d la distance associée.

Théorème. *($k = \mathbb{R}$; $\mathbf{G}$ est un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe, $G = \mathbf{G}_\mathbb{R}$ et Γ est un sous-semigroupe Zariski dense de G)*

a) $\mathcal{L}_\Gamma$ est l'adhérence de la réunion des semigroupes $\mathcal{L}_g$ pour $g \in \Gamma$. (resp. pour g $\mathbb{R}$-régulier dans Γ).

b) $\mathcal{L}_\Gamma$ est l'adhérence de l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma^o$ des éléments hyperboliques g de G pour lesquels il existe des suites $n_p \in \mathbb{N}$ et $\gamma_p \in \Gamma$ telles que $\lim\limits_{p\to\infty} d(g^{n_p}, \gamma_p) = O$.

c) $\mathcal{L}'_\Gamma$ est dense dans $\mathcal{L}_\Gamma$ et L'_Γ est dense dans L_Γ.

d) Une chambre $f \in Z_\Pi$ est quasipériodique si et seulement si $\mathcal{L}_\Gamma$ rencontre l'intérieur de la chambre f.

e) Pour toute chambre quasipériodique f de Γ, on a $\lambda(f \cap \mathcal{L}_\Gamma) = L_\Gamma$.

Remarques - Les parties a) et b) fournissent d'autres définitions possibles pour l'ensemble des directions limites de Γ.

- Les parties c), d) et e) expliquent comment calculer $\mathcal{L}_\Gamma$ à partir de Λ_Γ, Λ_Γ^- et L_Γ et inversement (On rappelle que, d'après 3.6.iv, l'ensemble F_Γ des chambres quasipériodiques de Γ s'identifie à l'ensemble des éléments de $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma^-$ qui sont en position générale). En effet, elles affirment que l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ est l'adhérence de l'ensemble

$$\mathcal{L}'_\Gamma = \bigcup_{f \in F_\Gamma} \{g \in f \ / \ \lambda(g) \in L'_\Gamma\} \ .$$

- Nous omettons l'énoncé analogue sur un corps local: dans ce cas l'ensemble $\mathcal{L}_\Gamma$ vit dans un espace qui est à l'ensemble des éléments hyperboliques de G ce que $A^\times$ est à A^+...

Démonstration. a) Par construction, la partie $\mathcal{L}_\Gamma$ est fermée. Elle contient les semigroupes $\mathcal{L}_g$ pour g dans Γ d'après 6.1. Réciproquement, soit g dans $\mathcal{L}_\Gamma$, on applique la proposition 6.3 avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$: l'intersection $G_g^{\frac{1}{n}} \cap \Gamma$ est Zariski dense et contient donc un élément $\mathbb{R}$-régulier g_n. La suite $\mathcal{L}_{g_n}$ converge vers $\mathcal{L}_g$ d'après 6.2 (i.e. il existe une suite $t_n > 0$ telle que $\lim_{n\to\infty} g_n^{t_n} = g$).

b) Il est clair que si g est dans $\mathcal{L}_\Gamma^o$, tout semigroupe ouvert de G contenant g rencontre Γ. Donc $\overline{\mathcal{L}_\Gamma^o} \subset \mathcal{L}_\Gamma$. Réciproquement, si g est un élément $\mathbb{R}$-régulier de Γ alors, pour tout réel $t > 0$, l'élément g^t est dans $\mathcal{L}_\Gamma^o$: il suffit de choisir la suite n_p telle que la suite $n_p t$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Donc $\mathcal{L}_\Gamma \subset \overline{\mathcal{L}_\Gamma^o}$.

c) La première assertion résulte du a), la deuxième de la convexité de L_Γ et du fait que L'_Γ est non vide.

d) et e) Remarquons tout d'abord que, grâce à a), on a $\lambda(\mathcal{L}_\Gamma) \subset L_\Gamma$.

Soit f une chambre dont l'intérieur rencontre $\mathcal{L}_\Gamma$. On note g un élément de $\mathcal{L}_\Gamma$ qui est dans l'intérieur de f. Le raisonnement du a) donne une suite g_n d'éléments $\mathbb{R}$-réguliers de Γ tels que f_{g_n} converge vers f. Donc f est quasipériodique.

Réciproquement, soit f une chambre quasipériodique pour Γ. Soit L une demidroite de L_Γ. Notons $\mathcal{L}$ le sous-semigroupe à un paramètre de f tel que $\lambda(\mathcal{L}) = L$. D'après 4.2, il existe une suite d'éléments $\mathbb{R}$-réguliers g_n de Γ tels que $\mathcal{L}_{g_n}$ converge vers $\mathcal{L}$. Tout semigroupe ouvert de G qui rencontre $\mathcal{L}$ contient alors une puissance d'un des éléments g_n d'après 6.1. Donc $\mathcal{L}$ est inclus dans $\mathcal{L}_\Gamma$. Ceci prouve que $\lambda(f \cap \mathcal{L}_\Gamma) = L_\Gamma$. On en déduit, puisque L'_Γ est non vide que $f \cap \mathcal{L}_\Gamma$ rencontre l'intérieur de la facette f.$\diamond$

7. Le cône limite L_Γ lorsque $k = \mathbb{R}$.

Dans cette partie, on suppose que $k = \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'application logarithme identifie les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $A^\bullet$ et $\mathfrak{a}$ ainsi que les cônes L_Γ et ℓ_Γ. Le but de cette partie est de prouver qu'alors le cône limite L_Γ est un cône d'intérieur non vide.

Rappelons que cette affirmation est fausse sur un corps non archimédien (cf. 5.3).

L'idée de la démonstration consiste à se ramener au cas d'un sous-semigroupe de G_g^ε de générateurs $(\gamma_j)_{1\leq j\leq s}$ (cf 7.4). On considère alors des semigroupes à un paramètre $\{\gamma_j(t)\ /\ t \geq 1\}$ tracés dans G_g^ε et tels que $\gamma_j(1) = \gamma_j$. On montre d'une part, à l'aide des corps de Hardy (cf 7.2), que le cône de Lyapounov ℓ_Δ du semigroupe Δ engendré par tous ces semigroupes est inclus dans l'espace vectoriel engendré par ℓ_Γ (cf.7.4). D'autre part, un argument élémentaire prouve qu'un tel semigroupe Δ est d'intérieur non vide (cf.7.1).

7.1 Semigroupes d'intérieur non vide.

Lemme.$(k = \mathbb{R})$ *Soient* $t \to \gamma_j(t)$, *pour* $j = 1, \ldots, s$, *des groupes à un paramètre de* G

et H le semigroupe engendré par $(\gamma_j([1,\infty[))_{1\leq j\leq s}$. On suppose que H est Zariski dense dans G, alors H est d'intérieur non vide.

Remarque. On peut aussi montrer le résultat analogue suivant qui ne nous sera pas utile: *Dans un groupe de Lie réel simple, tout sous-semigroupe fermé Zariski-dense non discret est d'intérieur non vide.*

Démonstration. Pour h dans H, on note C_h le cône de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G donné par:

$$\begin{array}{l} C_h = \{X \in \mathfrak{g} \ / \text{ il existe un chemin } \gamma : [0,1[\to G \text{ de classe } C^1 \\ \qquad\qquad \text{tel que } \gamma_0 = e \ , \ \frac{d}{dt}\gamma_t|_{t=0} = X \text{ et, } \forall t \in [0,1] \ , \ \gamma_t h \in H \quad \} \ . \end{array}$$

Il est clair que C_h est un cône. D'autre part, on a

$$C_{hh'} \supset C_h + \mathrm{Ad}h(C_{h'}) \quad \forall h, h' \in H \qquad (*)$$

Il suffit pour montrer cela de considérer le chemin dans H: $\gamma_t h\gamma'_t h' = \gamma_t(h\gamma'_t h^{-1})hh'$.

Soit W l'espace vectoriel engendré par les cônes C_h. Montrons que $W = \mathfrak{g}$. Il résulte de $(*)$ que l'espace W est AdH-invariant. Comme AdH est Zariski dense dans AdG, W est un idéal de $\mathfrak{g}$. En outre, les générateurs X_j des groupes à un paramètre $\gamma_j(t)$ sont dans W. Donc H est inclus dans le groupe de Lie connexe I d'algèbre de Lie W. Donc I est Zariski dense dans G et $W = \mathfrak{g}$.

Choisissons maintenant des éléments h_i dans H et X_i dans C_{h_i}, pour $i = 1, \ldots, n$, avec n le plus grand possible, tel que, en posant $k_0 = 1, \ldots, k_i = h_1 \cdots h_i, \ldots$ la famille $(Y_i := \mathrm{Ad}k_{i-1}(X_i))_{1\leq i\leq n}$ est libre. Cette famille $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathfrak{g}$. Sinon on pourrait trouver h_{n+1} dans H et X_{n+1} dans C_h tel que $\mathrm{Ad}k_n^{-1}(X_{n+1})$ n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par $Y_1, \ldots, Y_n$. Ce qui contredit la maximalité de n.

On note $t \to \gamma_{i,t}$ des chemins tangents à X_i pour $t = 0$ tels que $\gamma_{i,t}h_i$ est dans H et on pose $\gamma'_{i,t} := k_{i-1}\gamma_{i,t}k_{i-1}^{-1}$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : [0,1]^n & \to & G \\ (t_1, \ldots, t_n) & \to & \gamma'_{1,t} \cdots \gamma'_{n,t} h_1 \cdots h_n = \gamma_{1,t}h_1 \cdots \gamma_{n,t}h_n \end{array}$$

a son image dans H. Sa différentielle en 0 est bijective car $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathfrak{g}$. Le théorème d'inversion locale prouve alors que $\psi(]0,1[^n)$ contient un ouvert. Donc H est d'intérieur non vide.$\diamond$

7.2 Corps de Hardy.

Rappelons les principales propriétés des corps de Hardy dont nous aurons besoin. Une excellente référence est ([Ro] p.297-299).

Soit $\mathcal{A}$ l'anneau des germes en $+\infty$ de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. $\mathcal{A}$ est donc l'ensemble des fonctions C$^\infty$ réelles définies sur une demidroite $[a,\infty[$ modulo l'équivalence qui consiste à identifier deux fonctions égales sur une demidroite $[b,\infty[$.

Définition. *Un corps de Hardy est un sous-corps stable par dérivation de l'anneau $\mathcal{A}$.*

L'intérêt des corps de Hardy est qu'une fonction non nulle y d'un corps de Hardy ne s'annule qu'un nombre fini de fois (car la fonction $\frac{1}{y}$ doit être C^∞ au voisinage de $+\infty$). Les corps de Hardy sont des corps réels ordonnés qui ont été introduits en vue de l'étude des développements asymptotiques (cf. [Bou]). Le corps $\mathbb{R}$ des fonctions constantes et le corps $\mathbb{R}(x)$ des fonctions rationnelles sont des corps de Hardy. Il y en a beaucoup d'autres car toute solution d'une équation polynomiale (resp. d'une équation différentielle polynomiale du premier ordre) à coefficients dans un corps de Hardy est encore dans un corps de Hardy. Plus précisément:

Proposition.([Ro] théorèmes 1 et 2) *Soient K un corps de Hardy, $P \in K[Y]$ un polynôme à coefficients dans K et y un élément de $\mathcal{A}$ tel que $P(y) = 0$ (resp. $\frac{dy}{dx} = P(y)$) alors il existe un corps de Hardy K' contenant K et y.*

En particulier, si K est un corps de Hardy et f un élément non nul de K, il existe un corps de Hardy K' contenant K, $e^{|f|}$, $\log|f|$ ainsi que $|f|^\alpha$ pour tout réel α.

7.3 Applications à fibres finies.

Le lemme élémentaire suivant nous sera utile.

Lemme. *Soient M une variété analytique réelle, $\psi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction analytique, $Z = \psi^{-1}(0)$ et $p : Z \to M$ la restriction à Z de la première projection. On suppose que, pour tout m dans M, $p^{-1}(m)$ est fini, alors il existe un ouvert non vide U de M tel que $p^{-1}(\overline{U})$ est compact.*

Démonstration. On peut supposer que Z et M sont lisses. Soient $Z' := \{z \in Z \ / \ dp(z)$ est surjective $\}$ et $Z'' := Z - Z'$. Par le théorème de Sard analytique, $p(Z'')$ est au moins de codimension 1 dans M. Quitte à réduire M, on peut supposer que Z'' est vide, c'est à dire que p est un difféomorphisme local.

On suppose, par l'absurde, la conclusion fausse. On construit alors par récurrence une suite infinie $(C_n)_{n\geq 1}$ de compacts de Z disjoints et d'intérieur non vide tels que la restriction $p|_{C_n}$ est injective et tels que la suite de compacts images $K_n := p(C_n)$ est décroissante; c'est possible car, comme $p^{-1}(K_n)$ n'est pas compact, on peut choisir pour C_{n+1} un petit voisinage d'un point de l'intérieur de $p^{-1}(K_n)$ qui n'est pas dans $C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Soit m un point dans l'intersection des compacts K_n, la fibre $p^{-1}(m)$ est infinie. Contradiction.$\diamond$

7.4 Le cône ℓ_Γ est d'intérieur non vide.

Nous pouvons maintenant démontrer cette affirmation.

Grâce à la proposition 6.3, on peut supposer que Γ est inclus dans un sous-semigroupe ouvert G_g^ε dont tous les éléments sont $\mathbb{R}$-réguliers (cf.6.2). On peut aussi supposer que Γ est engendré par une famille finie d'éléments $(\gamma_j)_{1\leq j\leq s}$ tels que chacun des groupes engendrés par γ_j est Zariski connexe. Remarquons que γ_j est semisimple et notons $\gamma_j = m_j a_j = a_j m_j$ la décomposition de Jordan de γ_j avec m_j elliptique et a_j hyperbolique. Notons M_j l'adhérence dans G du groupe engendré par m_j: c'est un groupe compact. Quitte à remplacer γ_j par une puissance, on peut supposer que, pour tout $t \geq 1$, on a $M_j a_j^t \subset G_g^\varepsilon$.

Comme ℓ_Γ est convexe, pour montrer que ℓ_Γ est d'intérieur non vide, il suffit de montrer que toute forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ nulle sur ℓ_Γ est identiquement nulle. Soient donc $\beta_1, \ldots, \beta_r$ des réels tels que, pour tout γ dans Γ, on a $\prod_{i=1}^r \lambda_1(\rho_i(\gamma))^{\beta_i} = 1$. Et montrons que $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$.

Notons Δ le sous-semigroupe de G_g^ε engendré par toutes les parties $M_j a_j^t$ avec $j = 1, \ldots, s$ et $t \geq 1$. Ce semigroupe Δ contient Γ. Notons $\phi_1, \ldots, \phi_r : G_g^\varepsilon \to \mathbb{R}$ et $\Phi : G_g^\varepsilon \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $\phi_i(h) = \lambda_1(\rho_i(h))$ et

$$\Phi(h) = \prod_{i=1}^r \phi_i(h)^{\beta_i} - 1 \ .$$

Φ est une fonction analytique nulle sur Γ.

Montrons que Φ est nulle sur Δ. Soient $g_1 \cdots g_p \in \Delta$ un mot tel que, pour tout l, g_l est dans une partie $M_j a_j^t$. On veut montrer que $\Phi(g_1 \cdots g_p) = 0$. Cela résulte d'un raisonnement par récurrence sur le nombre d'indices l tels que g_l n'est pas de la forme γ_j^n à l'aide du lemme ci-dessous.

Donc Φ est nulle sur Δ. Mais Δ est d'intérieur non vide (lemme 5.1) donc $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. C'est ce que l'on voulait.$\diamond$

On a utilisé le lemme suivant.

Lemme. *(k=$\mathbb{R}$) Soit G_g^ε un sous-semigroupes ouverts de G dont tout élément est $\mathbb{R}$-régulier et Φ la fonction définie ci-dessus. Soient h un élément de G_g^ε et h_1, h_2 des éléments de $G_g^\varepsilon \cup \{1\}$. Notons $h = ma = am$ la décomposition de Jordan de h avec m elliptique et a hyperbolique. Notons M l'adhérence du groupe engendré par m. On suppose que*
- pour tout réel $t \geq 1$, $\quad Ma^t \subset G_g^\varepsilon$,
- pour tout entier $n \geq 1$, $\quad \Phi(h_1 h^n h_2) = 0$.
Alors, pour tout réel $t \geq 1$, on a $\Phi(h_1 M a^t h_2) = 0$.

Démonstration. Remarquons que M est un groupe compact et donc un fermé de Zariski de $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Notons

$$Z := \{(m', t) \in M \times [1, \infty[\ / \ \Phi(h_1 m' a^t h_2) = 0 \ \}$$

et $p : Z \to M$ la première projection.

Vérifions tout d'abord que, pour tout m_o dans M, $p^{-1}(m_o)$ égale $m_o \times [1, \infty[$ ou est fini. Pour cela, notons $\psi_1, \ldots, \psi_r : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\Psi : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $\psi_i(t) = \lambda_1(\rho_i(h_1 m_o a^t h_2))$ et

$$\Psi(t) = \Phi(h_1 m_o a^t h_2) = \prod_{i=1}^r \psi_i(t)^{\beta_i} - 1 \ .$$

D'après la proposition 7.2, il existe un corps de Hardy contenant les germes en $+\infty$ des fonctions ψ_i et de Ψ. En effet, $\psi_i(t)$ est une solution de l'équation en X

$$\det(\rho_i(h_1 m_o a^t h_2)^2 - X^2) = 0$$

dont les coefficients sont des polynômes en t et en des exponentielles $e^{\kappa t}$ où les coefficients κ sont des réels. En particulier, si Ψ est non nulle, elle n'a qu'un nombre fini de zéros i.e. $p^{-1}(m_o)$ est fini. C'est ce que l'on voulait.

Supposons par l'absurde que $Z \neq M \times [1, \infty[$. On peut alors trouver un ouvert non vide U de M tel que, pour tout m_o dans U, $m_o \times [1, \infty[$ n'est pas inclus dans Z. Donc d'après ce qui précède $p^{-1}(m_o)$ est fini. Le lemme 7.3 permet de choisir U tel que $p^{-1}(\overline{U})$ est compact. Mais la suite S des entiers n tels que m^n est dans U est infinie. Par hypothèse, pour $n \geq 1$, on a $\Phi(h_1 m^n a^n h_2) = 0$. Donc, pour n dans S, (m^n, n) est dans $p^{-1}(\overline{U})$. Ceci contredit la compacité de $p^{-1}(\overline{U})$. Donc $Z = M \times [1, \infty[$. Ce qui termine la démonstration.$\diamond$

Références.

[A-M-S] **H.Abels, G.Margulis, G.Soifer** - Semigroups containing proximal linear maps, Isr. Jour. Math. 91 (1995) p.1-30.

[Be] **Y.Benoist** - Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, preprint (1994).

[Be-La] **Y.Benoist, F.Labourie** - Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Inv. Math.111 (1993) p.285-308.

[Bor] **A.Borel** - Linear algebraic groups, GTM 126 Springer (1991).

[Bo-Ti] **A.Borel, J.Tits** - Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S. 27 (1965) p.659-755.

[Bou] **N.Bourbaki**- Fonctions d'une variable réelle, Hermann, Paris (1961).

[Go-Ma] **I.Gol'dsheid, G.Margulis** - Lyapounov indices of a product of random matrices, Russ. Math. Surv. 44 (1989) p.11-71.

[Gu] **Y.Guivarc'h** - Produits de matrices aléatoires et applications, Erg. Th. Dyn. Sys. 10 (1990) p.483-512.

[Gu-Ra] **Y.Guivarc'h, G.Raugi** - Propriétés de contraction d'un semigroupe de matrices inversibles. Isr. Jour. Math. 65 (1989) p.165-196.

[He] **S.Helgason** - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press (1978).

[Mac] **I.Macdonald** - Spherical functions on a group of p-adic type, Publ. Ramanujan Inst. (1971).

[Mar] **G.Margulis** - Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Springer (1991).

[Ma-So] **G.Margulis, G.Soifer** - Maximal subgroup of infinite index in finitely generated linear group. Jour. of Alg. 69 (1981) p.1-23.

[Pr] **G.Prasad** - $\mathbb{R}$-regular elements in Zariski dense subgroups. Quaterly Jour. Math. (1994)

[Ro] **M.Rosenlicht** - Hardy fields, Jour.Math. Anal. Appl. 93 (1983) p.297-311.

[Ti1] **J.Tits** - Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, Journ. Reine Angw. Math. 247 (1971) p.196-220.

[Ti2] **J.Tits** - Free subgroups in linear groups, Jour. of Algebra 20 (1972) p.250-270.

URA 748 du CNRS

Université Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012
2,Place Jussieu, 75251 Paris cedex 05.

benoist@mathp7.jussieu.fr