Groupes linéaires à valeurs propres positives et automorphismes des cônes convexes

Yves Benoist

Résumé

Je montre que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ contient un sous-groupe Zariski dense dont tous les éléments ont toutes leurs valeurs propres positives si et seulement si $m \not\equiv 2$ modulo 4. Je généralise cet énoncé à tous les groupes algébriques réels.

Je décris les adhérences de Zariski possibles pour les sous-groupes Γ de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ qui préservent un cône ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{R}^m$ et dont l'action sur $\mathbb{R}^m$ est irréductible.

Je montre comment ces deux problèmes sont reliés.

Linear groups with positive eigenvalues and automorphisms of convex cones

Abstract

I show that the linear group $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ contains a Zariski dense subgroup all of whose eigenvalues are positive if and only if $m \not\equiv 2$ modulo 4. I extend this statement to any real algebraic group.

I describe the Zariski closure of the subgroups Γ of $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ which preserve a properly convex open cone Ω of $\mathbb{R}^m$ and whose action on $\mathbb{R}^m$ is irreducible.

I show how these two problems are related.

1. Groupes linéaires à valeurs propres positives

On munit le groupe linéaire $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ de la topologie de Zariski. Les fermés de cette topologie sont les ensembles des zéros d'une famille de polynômes. Dans cette note, un *groupe linéaire algébrique réel* G est un sous-groupe Zariski fermé de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ et une *représentation* de G est un morphisme rationnel ρ de G dans le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ d'un espace vectoriel *réel* V de dimension finie. Remarquons que le fait qu'un élément g de G soit à valeurs propres réelles (resp. positives) ne dépend pas du plongement de G dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Le groupe G est dit *déployé* si $\{g \in G \ / \ g$ est à valeurs propres positives $\}$ est une partie Zariski dense de G.

Un sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ est dit à valeurs propres réelles (resp. positives) si toutes les valeurs propres de tous les éléments de Γ sont réelles (resp. positives).

Rappelons que dans un groupe algébrique déployé, tout sous-groupe Zariski dense contient un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres réelles (voir l'appendice A.6 de [3]).

La première partie du théorème suivant décrit les adhérences de Zariski des groupes linéaires à valeurs propres positives.

Théorème 1 *Soit G un groupe linéaire algébrique réel déployé. On a les équivalences*
1) G contient un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres positives $\iff$ G n'admet pas de représentations irréductibles symplectiques non triviales.
2) Tout sous-groupe Zariski dense de G contient un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres positives $\iff$ Toutes les représentations irréductibles de G sont orthogonales.

Exemples	Condition 1	Condition 2
$\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$	$m \not\equiv 2$ modulo 4	jamais
$\mathrm{Spin}(p,p+1)$	p et $p+1 \not\equiv 2$ modulo 4	p et $p+1 \not\equiv 2$ modulo 4
$\mathrm{Spin}(p,p)$	$p \not\equiv 2$ modulo 4	$p \equiv 0$ modulo 4
$\mathrm{SO}(p,p)$ et $\mathrm{SO}(p,p+1)$	toujours	toujours
G semisimple adjoint	toujours	$w_0 = -1$

Remarque En particulier, tout sous-groupe Zariski dense de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ contient un élément à valeurs propres négatives (ce fait est démontré dans [4]) et il existe des sous-groupes Zariski dense de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ à valeurs propres positives (par exemple, les groupes d'holonomie des structures projectives convexes sur les surfaces construits dans [5]).

2. Automorphismes des cones convexes saillants

Un cône ouvert convexe Ω de $V = \mathbb{R}^m$ est dit *saillant* si son adhérence ne contient pas de droites.

La première partie du théorème ci dessous décrit les adhérences de Zariski G des sous-groupes Γ de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ qui préservent un cône convexe saillant Ω de $\mathbb{R}^m$ et dont l'action sur $\mathbb{R}^m$ est irréductible. Remarquons que le groupe G est un groupe réductif et que V est une représentation irréductible de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie. Voici quelques rappels de théorie des représentations dont nous avons besoin.

Soient G un groupe algébrique réel réductif Zariski connexe. Notons A^0 la composante connexe d'un sous-tore déployé maximal A de G et A^+ une chambre de Weyl de A^0. On note P le réseau des poids (relatif au système de racines restreintes de A^0). Il est muni de l'ordre habituel: $\lambda \leq \mu \iff \lambda(a) \leq \mu(a)\ \forall a \in A^0$. Soit (V,ρ) une représentation irréductible réelle de G. Pour λ dans P, on note V_λ l'espace de poids correspondant $V_\lambda := \{v \in V\ /\ \forall a \in A^0\ \rho(a)v = \lambda(a)v\}$ et $m_\lambda := \dim V_\lambda$ la multiplicité de ce poids. L'ensemble des poids de A^0 dans V contient un unique élément maximal χ_V appelé le *plus haut poids restreint* de V. La représentation (V,ρ) est dite *proximale* si la multiplicité du plus haut poids est 1. Deux représentations irréductibles réelles proximales de G seront dites *égales modulo* 2 si la différence de leur plus haut poids restreint est dans $2P$.

Théorème 2 *Soient $V = \mathbb{R}^m$ et $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe algébrique Zariski connexe. On a les équivalences:*
1) G contient un sous-groupe Zariski dense Γ qui préserve un cône ouvert convexe saillant Ω de $V \iff V$ est une représentation irréductible proximale de G et n'est pas égale modulo 2 à une représentation irréductible proximale symplectique non triviale.
2) Tout sous-groupe Zariski dense de G contient un sous-groupe Zariski dense qui préserve un cône ouvert convexe saillant Ω de $V \iff V$ est une représentation irréductible proximale de G et est égale modulo 2 à une représentation irréductible proximale orthogonale.

Remarques - Lorsque G est déployé toutes les représentations irréductibles réelles de G sont proximales.

- Une représentation irréductible proximale de G est absolument irréductible.

- On note L le centralisateur de A dans G et P'' le réseau des caractères rationnels déployés de L. Un tel caractère est entièrement déterminé par sa restriction à A^0 ce qui permet d'identifier P'' avec un sous-réseau du réseau P' des caractères rationnels de A, lui même étant un sous réseau de P. On a les inclusions $2P \subset P'' \subset P' \subset P$. Remarquons que l'application $V \to \chi_V$ induit une bijection de l'ensemble des représentations irréductibles proximales de G dans l'ensemble des poids dominants (relativement à A^+) de P'' (cf. [1]).

- Il est facile de déterminer au vu du plus haut poids restreint d'une représentation irréductible proximale si celle-ci est orthogonale, symplectique ou non autoduale.

- Les représentations irréductibles réelles proximales dont le plus haut poids restreint est dans $2P$ ne sont autres que les représentations *sphériques* i.e. celles qui admettent un vecteur non nul invariant par un sous-groupe compact maximal K de G (voir [7]). Il n'est pas difficile de vérifier que les représentations sphériques sont exactement celles pour lesquelles il existe dans V un cône ouvert convexe saillant G-invariant.

3. Cônes strictement convexes saillants divisibles

Un cône convexe saillant de $\mathbb{R}^m$ est dit *strictement convexe* si les segments ouverts inclus dans l'adhérence de Ω qui ne sont pas radiaux sont inclus dans Ω. On dit qu'un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ *divise* un cone convexe saillant Ω de $\mathbb{R}^m$ si il préserve Ω et si le quotient $\Gamma\backslash\Omega$ est compact. On dit alors que Ω est *divisible* (voir [13]).

Exemple: soient q une forme quadratique lorentzienne sur $\mathbb{R}^m$ et Ω un cône de futur pour q i.e. une des composantes connexes convexes de $\{v \in \mathbb{R}^m \ / \ q(v) \neq 0\}$. Alors Ω est divisible: les sous-groupes Γ qui divisent Ω sont les réseaux cocompacts du groupe des similitudes de q.

Le résultat suivant se démontre avec les mêmes idées que le théorème 2.

Corollaire *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ qui divise un cône strictement convexe saillant Ω qui n'est pas un cône de futur pour une forme quadratique lorentzienne sur $\mathbb{R}^m$. Alors Γ est Zariski dense dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$.*

Remarques - Réciproquement, D.Johnson et J.Millson construisent dans [9], en toutes dimensions $m \geq 3$ et pour certains réseaux cocompacts Γ de $\mathrm{SO}(m-1,1)$, des déformations $\rho_t(\Gamma)$ dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ qui sont Zariski denses. Il résulte de [10] et [11] que, pour t petit, $\rho_t(\Gamma)$ divise un cône convexe saillant Ω_t. On peut montrer que ces cônes Ω_t sont strictement convexes.

- Une étude très complète des cônes convexes saillants divisibles en dimension 3 est due à W.Goldman dans [5].

4. Positivité dans l'ensemble limite

Donnons maintenant la structure de la démonstration du théorème 2.

Soient $V = \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{Q}(V) = \{(v, f) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \ / \ f(v) = 0\}$. On dit qu'un triplet $((v_1, f_1), (v_2, f_2), (v_3, f_3))$ de $\mathbb{Q}(V)$ est positif (resp. négatif) si $\prod_{i \neq j} f_i(v_j) > 0$ (resp. < 0).

Soient G un groupe algébrique réel réductif Zariski connexe, (V, ρ) une représentation irréductible de G et Γ un sous-groupe Zariski dense de G. On montre tout d'abord:

Lemme 1 *Si Γ préserve un cône ouvert convexe saillant de V, alors ρ est proximale.*

On suppose désormais la représentation ρ proximale. On peut alors considérer l'ensemble limite Λ_Γ de Γ dans $\mathbb{Q}(V)$ (voir [6] et [2]).

Lemme 2 *Γ contient un sous-groupe Zariski dense qui préserve un cône ouvert convexe saillant de V si et seulement si l'ensemble limite Λ_Γ contient un triplet positif.*

Remarquons que l'ensemble limite Λ_G n'est autre que la G-orbite du couple (v^+, f^+) où v^+ (resp. f^+) est la droite de plus haut poids de V (resp.V^*). Pour Y dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, on note $n_V(Y) := \inf\{n \in \mathbb{N} \ / \ f^+(Y^n v^+) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \infty$. Le théorème 2 se déduit alors du lemme:

Lemme 3 *On a les équivalences: Λ_G contient un triplet positif (resp. négatif) $\iff$ Il existe Y dans $\mathfrak{g}$ tel que $n_V(Y)$ est pair (resp.impair) $\iff$ V n'est pas égal modulo 2 à une représentation irréductible proximale symplectique (resp. orthogonale).*

Le théorème 1 se démontre de la même façon en procédant simultanément avec toutes les représentations irréductibles proximales de $\mathfrak{g}$.

Références

[1] H.Abels, G.Margulis, G.Soifer - Semigroups containing proximal linear maps, Isr.Jour. Math. 91 (1995) 1-30.

[2] Y. Benoist - Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, Geom. Funct.Anal. 7 (1997) 1-47.

[3] Y.Benoist, F.Labourie - Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Inv. Math.111 (1993) p.285-308.

[4] S.Choi, W.Goldman - Convex real projective structures on closed surfaces are closed, Proc. Am. Math. Soc. 118 (1993) 657-661.

[5] W.Goldman - Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) 791-845.

[6] Y. Guivarc'h - Produits de matrices aléatoires et applications, Erg. Th. Dyn. Sys. 10 (1990), 483-512.

[7] S.Helgason - Groups and geometric analysis, Acad. Press (1984).

[8] J.Humphreys - Linear algebraic groups, GTM 21 Springer (1975).

[9] D.Johnson, J.Millson - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." Progress in Math. 67 (1984) 48-106.

[10] J.L.Koszul - Déformation des connexions localement plates, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) 103-114.

[11] W.Thurston - The geometry and topology of three manifolds, in preparation.

[12] J.Tits - Free subgroups in linear groups, Jour. of Algebra 20 (1972) p.250-270.

[13] J.Vey - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 24 (1970) p.641-665.

CNRS, Université Paris 7, benoist@math.jussieu.fr