Orbites des structures rigides (d'après M.Gromov)

Yves Benoist

Introduction.

Dans les articles [B-F-L] et [B-L] que j'ai écrits avec P. Foulon et F. Labourie, nous décrivons, sur toute variété compacte, les flots d'Anosov de contact et les difféomorphismes d'Anosov symplectiques qui ont leurs feuilletages stable et instable de classe C^∞. Pour cela, nous utilisons de façon essentielle la proposition suivante due à M.Gromov (voir 1.3 pour la définition des objets qui interviennent dans cet énoncé).

Proposition. ([Gr]) *Soit M une variété C^∞ munie d'une A-structure rigide g de classe C^∞. Alors, il existe un ouvert dense U de M dans lequel les orbites du pseudogroupe I^{loc} des isométries locales de g sont des sous-variétés fermées.*

Corollaire. ([Gr]) *Si I^{loc} a une orbite dense, celle-ci est ouverte.*

Des exemples de A-structures rigides sont les structures affines (i.e. les connexions ∇ sur le fibré tangent) ou les structures pseudoriemanniennes.

Cette proposition joue aussi un rôle dans l'étude des actions de "gros groupes" (par exemple les réseaux des groupes semisimples) sur des variétés compactes, ou encore dans l'étude des variétés Lorentziennes compactes dont le groupe d'isométrie est non compact.

Le but de ces notes de cours est d'extraire de [Gr] les idées qui permettent de démontrer la proposition ci-dessus.

Voici le plan suivi.

On introduit tout d'abord les principales notations (§1).

On montre ensuite que, si M est une variété munie d'une A-structure g, il existe un ouvert dense U_r de M dans lequel les orbites du pseudogroupe I^r des r-jets isométriques de g (c'est à dire des r-jets qui "préservent" g) sont des sous-variétés fermées. On montre aussi que dans U_r l'ensemble des r-jets isométriques proches de l'identité est une sous-variété localement fermée du fibré D^rM des r-jets de difféomorphismes de M et que des points proches de U_r qui sont reliés par un r-jet isométrique sont aussi reliés par un r-jet isométrique proche de l'identité. Un outil important dans cette discussion est le théorème de stratification des variétés algébriques munies d'une action d'un groupe algébrique (§2).

Ceci nous permettra d'appliquer la théorie des relations aux dérivées partielles et de montrer que, lorsque g est rigide, dans un voisinage V de chaque point de l'intersection de ces ouverts denses U_r, on peut choisir $r \gg 0$ tel que les r-jets isométriques proches de l'identité sont des r-jets d'isométries locales et donc tel que I^r-orbites et I^{loc}-orbites coïncident dans V (§3).

Signalons pour finir que se restreindre au cadre des structures pseudoriemanniennes n'apporte aucune simplification à la démonstration.

La modification principale par rapport à [Gr] consiste à n'étudier les r-jets isométriques qu'au voisinage de l'identité, ce qui est suffisant pour démontrer la proposition et son corollaire.

Ces notes sont issues d'un cours que j'ai donné lors du symposium "On ergodic theory and dynamical systems" à Varsovie début juin 1995. Je remercie W.Ballmann, P.Foulon et F.Labourie pour d'intéressantes discussions à ce sujet.

1. A-structures rigides.

Dans cette partie, nous donnons la définition des termes de la proposition ci-dessus et nous expliquons en quoi les A-structures rigides sont des généralisations à la fois naturelles et utiles de notions classiques comme les variétés pseudoriemanniennes ou les variétés affines. On fixe un entier $n \geq 1$.

1.1 Le fibré des r-repères.

1.1.1 Le groupe D^r.

Soit $J^r_{0,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des r-jets en 0 d'applications C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui envoient 0 sur 0. C'est le quotient de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ par la relation d'équivalence "avoir le même développement de Taylor à l'ordre r en 0". Un élément φ de $J^r_{0,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ s'écrit $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_r$ où φ_i est une application polynomiale homogène de degré i de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. En coordonnées, si on note $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ la longueur d'un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, on a $\varphi_i(x) = \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Par exemple, l'espace $J^1_{0,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ n'est rien d'autre que l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

L'espace vectoriel $J^r := J^r_{0,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est muni d'un produit: la composition. Celle-ci est une application polynomiale de $J^r \times J^r$ dans J^r. On note

$$\begin{aligned} D^r &= \{ \text{ éléments inversibles de } J^r \} \\ &= \{\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_r \in J^r \ / \ \det\varphi_1 \neq 0\} \\ &= \{r \text{ -jets en } 0 \text{ de difféomorphismes de } \mathbb{R}^n \\ &\qquad \text{dans lui même qui envoient } 0 \text{ sur } 0\} \ . \end{aligned}$$

D^r est un groupe algébrique pour la composition.

1.1.2 Le fibré $J^r(M, N)$ des r-jets de M dans N.

Soit M une variété C^∞ de dimension p (bientôt on prendra $p = n$) et N une variété C^∞ de dimension q. On note

$$q_r : J^r(M, N) \to M \times N$$

le fibré vectoriel des r-jets θ d'applications C^∞ de M dans N. La projection $q_r(\theta)$ est le couple (x, y) formé du point de départ x du r-jet θ et de son image $y = \theta(x)$. On note $J^r_{x,y} := q_r^{-1}(x, y)$ la fibre au dessus du point (x, y). Lorsque M est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et N un ouvert de $\mathbb{R}^q$, ce fibré se trivialise: $J^r(M, N) \simeq (M \times N) \times J^r_{0,0}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. On note

$$\pi_r : J^r(M, N) \to M$$

ce même espace vu comme fibré au dessus de M. La projection $\pi_r(\theta)$ est le point de départ du r-jet θ.

A toute application $f : M \to N$ de classe C^k avec $k \geq r$ est associée une section

$$J^r f : M \to J^r(M, N)$$

de classe C^{k-r} de ce fibré: pour x dans M, l'image $J^r f(x) \in J^r_{x,f(x)}$ est le r-jet de f en x.

1.1.3 Le fibré $J^{n,r}M$ des r-jets de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans M.

On note

$$p_{n,r} : J^{n,r}M \to M$$

le fibré des r-jets ψ en 0 d'applications C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans M. La projection $p_{n,r}$ est l'évaluation en 0: $p_{n,r}(\psi) = \psi(0)$. Le groupe D^r agit à droite sur $J^{n,r}M$ par la composition: $\psi.\varphi = \psi \circ \varphi$. Par exemple, le fibré $J^{1,1}M$ n'est rien d'autre que le fibré tangent TM à M.

On a une injection canonique

$$i_{r,s} : J^{n,r+s}M \to J^{n,s}(J^{n,r}M) .$$

L'image du $(r + s)$-jet $\psi \in J^{n,r+s}M$ (que l'on étend en une application $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, M)$) est le s-jet en 0 de l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $J^{n,r}M$ qui, à x dans $\mathbb{R}^n$, associe le r-jet en 0 de l'application $y \to \tilde{\psi}(x + y)$. Cela ne dépend pas du choix de $\tilde{\psi}$.

A notre application $f : M \to N$ sont aussi associées des applications de classe C^{k-r}

$$J^{n,r}f \; : \; J^{n,r}M \to J^{n,r}N$$

entre les espaces de r-jets, données par: $J^{n,r}f(\psi) = f \circ \psi$. Bien sûr, pour ψ dans $J^{n,r}M$, $J^{n,r}f(\psi)$ ne dépend que des r-jets $J^r f(\psi(0))$ et ψ. Par construction, $J^{n,r}f$ commute à l'action de D^r: $J^{n,r}f(\psi \circ \varphi) = J^{n,r}f(\psi) \circ \varphi$. Par exemple, l'application $J^{1,1}f$ n'est rien d'autre que la différentielle de f.

1.1.4 Le fibré des r-repères $R^r M$.

On suppose désormais que $n = p$. On note

$$p_r : R^r M \to M$$

le fibré des r-repères de M et $R^r_x M = p_r^{-1}(x)$ la fibre en un point x de M. L'espace $R^r M$ est l'ouvert de $J^{n,r}M$ formé des r jets d'applications étales en 0 et la projection p_r est encore l'évaluation en 0. L'action de D^r sur $J^{n,r}M$ préserve $R^r M$ et est simplement transitive sur les fibres de p_r. Autrement dit, le fibré des r-repères est un D^r-fibré principal.

Lorsque f est un difféomorphisme, l'application $J^{n,r}f$ envoie $R^r M$ sur $R^r N$.

Exemples - $r = 0$. On a $R^0 M = M$.

- $r = 1$. Le groupe D^1 est le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ des endomorphismes inversibles de $\mathbb{R}^n$ et le fibré $R^1 M$ est le fibré des repères $R(M)$ de M:

$$R(M) = \{(x, l) \ / \ x \in M \text{ et } l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, T_x M)\} .$$

1.2 A-structures.

Soit Z une variété algébrique réelle lisse sur laquelle le groupe D^r agit algébriquement. Soit k un entier strictement positif, ou $k = \infty$ (dans les applications on aura $k = \infty$).

Définition. *On appelle A-structure (d'ordre r, de type Z, de classe C^k) une application g de classe C^k du fibré $R^r M$ dans Z qui est D^r-équivariante, i.e. telle que $g(\psi\varphi) = \varphi^{-1} \cdot g(\psi)$, pour tous ψ dans $R^r M$ et φ dans D^r.*

Remarques. a) Le préfixe A signifie algébrique.

b) Une A-structure n'est donc rien d'autre qu'une section du fibré associé $Z(M) := R^r M \times_{D^r} Z$. Par définition, ce fibré est le quotient de l'espace produit $R^r M \times Z$ par la relation d'équivalence: $(\psi, z) \simeq (\psi\varphi^{-1}, \varphi z)$, pour tout φ dans D^r.

c) Si on se donne une carte $\varphi_a : U_a \to V_a$ entre un ouvert U_a de M et un ouvert V_a de $\mathbb{R}^n$, on a une trivialisation du fibré des r-repères: $J^{n,r}\varphi_a : R^r U_a \xrightarrow{\sim} R^r V_a = V_a \times D^r$. Une A-structure équivaut donc à la donnée, pour toutes les cartes φ_a d'un atlas, d'applications $g_a \in C^k(V_a, Z)$ telles que (en notant $\Psi_{ba} = \varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$ les changements de cartes et $J^r\Psi_{ba}(v) = (v, \Psi_{ba}(v), \Psi^r_{ba}(v)) \in V_a \times V_b \times D^r$ leur r-jet en un point v) les g_a se recollent selon la formule:

$$g_b(\Psi_{ba}(v)) = (\Psi^r_{ba}(v)) \cdot g_a(v) \quad \forall v \in \varphi_a(U_a \cap U_b) .$$

d) En particulier, si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une A-structure sur M est tout simplement une application de classe C^k de M dans Z.

Exemples. a) Structures pseudoriemanniennes.

Supposons que $r = 1$, $Z = \{$formes quadratiques q sur $\mathbb{R}^n$ non dégénérées$\}$ et que l'action de $D^1 = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur Z est donnée par $\varphi.q = q \circ \varphi^{-1}$ Dans ce cas, une A-structure g n'est rien d'autre qu'une structure pseudoriemannienne, c'est à dire la donnée d'un champ C^k $(g_x)_{x \in M}$ de formes quadratiques sur $T_x M$ non dégénérées. Le lien entre ces deux structures est donnée par l'égalité: $g((x, l)) = g_x \circ l$, pour tout repère $\psi = (x, l) \in R^1 M = R(M)$.

Autrement dit, si M est muni d'une structure pseudoriemannienne, on peut associer à chaque repère (x, l) sur M une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$: celle qui dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ admet la même matrice que notre forme quadratique g_x sur T_xM dans la base donnée de T_xM.

b) Application aux systèmes d'Anosov à feuilletages stable et instable différentiables.

Supposons que $r = 1$, $n = 2p$,

$$Z = \{(q, E^+, E^-)\ /\ \begin{array}{l} q \text{ est une forme quadratique sur } \mathbb{R}^{2p} \text{ de signature } (p,p), \\ E^+ \text{ et } E^- \text{sont deux sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^{2p} \\ \text{transverses et lagrangiens}\} \end{array}$$

et que Z est muni de l'action naturelle de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Dans ce cas, une A-structure sur M est la donnée d'une structure pseudoriemannienne de signature (p, p) et d'une décomposition du fibré tangent en somme de deux sous-fibrés lagrangiens.

C'est cette A-structure qui joue un rôle central dans l'étude des difféomorphismes d'Anosov symplectiques à feuilletages stable et instable de classe C^∞ (voir [B-L]). Une A-structure analogue joue un rôle central dans l'étude des flots d'Anosov de contact à feuilletages C^∞ (voir [B-F-L]).

c) Structures affines.

Une variété affine est une variété munie d'une connexion ∇. C'est un cas particulier de A-structure d'ordre 2. En effet, posons $Z = \{$0-jets en 0 de connexions sur $\mathbb{R}^n\}$. Un élément de Z est simplement la donnée de la valeur $\Gamma^k_{ij}(0)$ au point 0 des coefficients de Christoffel. Z est donc une variété algébrique isomorphe à $\mathbb{R}^{n^3}$.

Considérons l'image d'un germe en 0 de connexion sur $\mathbb{R}^n$ par un germe en 0 de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ préservant 0. Un calcul explicite laissé au lecteur montre que le 0-jet en 0 de la connexion image ne dépend que du 0-jet en 0 de la connexion de départ et du 2-jet en 0 du difféomorphisme et que cette dépendance est polynomiale. Autrement dit, on a une action algébrique naturelle de D^2 sur Z.

Si (M, ∇) est une variété affine, chaque élément ψ de R^2M permet de la même façon de ramener le 0-jet de la connexion ∇ au point $\psi(0)$ en un 0-jet en 0 de connexion sur $\mathbb{R}^n$ que l'on note $g(\psi) \in Z$. L'application $g : R^2M \to Z$ ainsi construite est la A-structure associée à ∇.

Réciproquement, une A-structure de type Z permet de construire une connexion ∇ sur M: dans une carte, on connait la valeur en chaque point des coefficients de Christoffel...

d) Autres structures géométriques.

Le lecteur interprètera de la même façon un certain nombre de structures géométriques familières. Structures symplectique, de contact, conforme, projective, presque complexe; structures complexe, hyperbolique, affine plate...

e) s$^{\text{ème}}$-jet d'une A-structure.

A toute A-structure g d'ordre r, de type Z et de classe C^k et à tout entier $s \leq k$, on associe une A-structure g^s d'ordre $r+s$, de type $J^{n,s}Z$ et de classe C^{k-s}. Cette A-structure g^s est tout simplement la composée des applications naturelles $g^s := J^{n,s}g \circ i_{s,r}$

$$R^{r+s}M \to J^{n,s}(R^rM) \to J^{n,s}Z\ .$$

Le lecteur vérifiera que $J^{n,s}Z$ est une variété algébrique lisse sur laquelle agit algébriquement D^{r+s} et que cette application g^s est D^{r+s}-équivariante. Remarquons que la donnée de g^s équivaut à celle de g !... mais l'introduction de g^s nous permettra d'alléger les notations.

De façon plus prosaïque, g^s consiste en la donnée dans chaque carte des applications $g_a : V_a \to Z$ ... et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre s.

f) Structure d'ordre 0.

C'est une application g de classe C^k de M dans Z. Ce cas particulier trivial, avec $M = \mathbb{R}$, est une bonne source ... de contre-exemples.

1.3 Pseudogroupe d'isométries.

Soit M une variété C^∞ munie d'une A-structure g d'ordre r_0 de classe C^k. Les symboles $x, y, x_1, \ldots$ désignent des points de M et $r = r_0 + i$ avec $0 \leq i \leq k-1$.

Définition. *On appelle isométrie locale de g un difféomorphisme f de classe C^{k+r_0} entre deux ouverts U_1 et U_2 de M qui préserve g, i.e. tel que*

$$g \circ (J^{n,r_0} f) = g \ \text{ dans } \ R^{r_0} U_1 \ .$$

On appelle r-jet isométrique de g un r-jet en un point x_1 de M d'un difféomorphisme f entre deux ouverts de M qui préserve g à l'ordre $i = r - r_0$ en x_1 , i.e. tel que

$$g^i \circ (J^{n,r} f) = g^i \ \text{ dans } \ R^r_{x_1} M \ .$$

Remarques - Cette dernière définition ne dépend pas du choix du difféomorphisme f dont le r-jet en x_1 est prescrit.

- Bien sûr un r-jet isométrique n'est pas toujours le r-jet d'une isométrie locale!

On note:

$$I^{loc}_{x_1,x_2} = \{\text{germes en } x_1 \text{ d'isométries locales de classe } \mathrm{C}^{k+r_0} \text{ qui envoient } x_1 \text{ sur } x_2\}$$

$$\Omega^{loc}_x = \{y \in M \ / \ I^{loc}_{x,y} \neq \emptyset\}$$

$$I^r_{x_1,x_2} = \{r\text{-jets isométriques en } x_1 \text{ qui envoient } x_1 \text{ sur } x_2 \ \}$$

$$\Omega^r_x = \{y \in M \ / \ I^r_{x,y} \neq \emptyset\}.$$

La composition définit une loi associative $I^{loc}_{x_2,x_3} \times I^{loc}_{x_1,x_2} \to I^{loc}_{x_1,x_3}$ pour laquelle chaque $I^{loc}_{x,x}$ est un groupe et chaque élément de $I^{loc}_{x,y}$ a un inverse dans $I^{loc}_{y,x}$. Cette donnée est un pseudogroupe noté I^{loc}: le pseudogroupe des isométries locales. L'ensemble Ω^{loc}_x n'est rien d'autre que l'orbite de x sous l'action de ce pseudogroupe. De la même façon les ensembles $I^r_{x_1,x_2}$ s'assemblent en un pseudogroupe I^r: le pseudogroupe des r-jets isométriques dont les orbites sont les ensembles Ω^r_x.

Autrement dit, deux points x, y de M sont dans la même I^{loc}-orbite (resp. I^r-orbite) si et seulement si on peut trouver des systèmes de coordonnées centrées en x et y dans lesquels les expressions g_a de g (voir la remarque 1.2.c) sont les mêmes (resp. ont le même $(r-r_0)$-jet à l'origine).

Remarque. Le comportement des I^{loc} (resp. I^r) orbites est beaucoup plus simple que celui des orbites des champs de vecteurs: il n'y a pas de dynamique. En effet, si on connait la A-structure g au voisinage d'un point de M, on connait aussi les orbites de I^{loc} (resp. I^r) au voisinage de ce point. Par contre la description locale d'un champ de vecteurs ne fournit que des informations partielles sur les orbites du champ de vecteurs: elle ne permet pas de savoir si le flot est récurrent!

Définition. *La A-structure g est dite rigide à l'ordre $r_1 = r_0 + i_1$ avec $0 \leq i_1 \leq k-1$ si, pour tout x dans M et $r = r_0 + i$ avec $i_1 \leq i \leq k-1$, l'application naturelle*

$$I^{r+1}_{x,x} \to I^r_{x,x}$$

est injective.

Exemples - Une structure pseudoriemannienne est rigide à l'ordre 1 car on peut entièrement déterminer un r-jet isométrique à partir de son 1-jet grâce à l'application exponentielle.

- Soit g une A-structure d'ordre 0, c'est à dire une application $g : M \to Z$ de classe C^k . Elle est rigide (à l'ordre 0) si et seulement si g est une immersion.

Nous avons introduit tous les objets qui interviennent dans la proposition de l'introduction. Notre but est maintenant de la démontrer.

On peut remarquer que la question est locale et que l'on peut donc supposer que M est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. Cependant nous n'utiliserons pas cette hypothèse car même si elle permet de trivialiser le fibré $Z(M)$, elle ne permet pas de trivialiser l'action des difféomorphismes de M sur les sections de ce fibré!

2. I^r-orbites.

2.1 Le théorème de stratification.

Nous admettrons le théorème classique suivant.

Théorème. *Soit G un groupe algébrique réel agissant algébriquement sur une variété algébrique Y. Alors il existe une partition de Y en sous-variétés lisses et localement fermées G-invariantes*

$$Y = Y_0 \cup \cdots \cup Y_l$$

telle que, pour tout $j = 0, \ldots, l$:

- $Y_0 \cup \cdots \cup Y_j$ est fermé dans Y,

- *il existe une structure de variété C^∞ sur l'espace des orbites $G\backslash Y_j$ de sorte que l'application quotient $Y_j \to W_j := G\backslash Y_j$ est une fibration C^∞.*

Exemples - $G = \mathbb{R}^*$ agit par homothétie sur $Y = \mathbb{R}^n$. On peut prendre $Y_0 = \{0\}$ et $Y_1 = \mathbb{R}^n - \{0\}$. La variété quotient $G\backslash Y_1$ est l'espace projectif réel.

- $G = O(2,1)$ agit sur $Y = \mathbb{R}^3$ en préservant la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. On peut prendre $Y_0 = \{0\}$, $Y_1 = \{x \neq 0 \ / \ q(x) = 0\}$, $Y_2 = \{x \ / \ q(x) > 0\}$ et $Y_3 = \{x \ / \ q(x) < 0\}$.

- $G = \mathbb{R}$ agit sur le tore $\mathbb{T}^2$ par translation parallèlement à une droite de pente irrationnelle. Les orbites de cette action sont toutes denses. On ne peut pas dans ce cas trouver de partition comme dans le théorème: l'action de G sur Y n'est pas algébrique.

2.2 Etude des $\mathbf{I}^r$-orbites.

Démontrons maintenant l'analogue de la proposition pour les I^r-orbites.

Lemme. *Soit g une A-structure sur M d'ordre r_0 et de classe C^k, $k \geq 1$. Pour tout $r = r_0 + i$ avec $0 \leq i \leq k-1$, il existe un ouvert dense U_r de M tel que dans U_r les I^r-orbites sont des sous-variétés fermées de classe C^{k-i}.*

Démonstration. Comme le problème est local, il suffit de trouver un ouvert non vide U de M dans lequel les I^r-orbites sont des sous-variétés fermées.

Comme l'ensemble des r-jets isométriques de g est égal à l'ensemble des r-jets isométriques de la A-structure g^i, on peut, quitte à remplacer g par g^i, supposer que $r = r_0$.

Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} R^rM & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow p_r & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\overline{g}} & W \end{array}$$

où $W := D^r\backslash Z$ est l'ensemble des D^r-orbites dans Z, π est l'application quotient, et où $\overline{g}$ est l'unique application qui fait commuter le diagramme. Remarquons que les I^r-orbites ne sont rien d'autre que les images inverses $\overline{g}^{-1}(w)$ des points w de W.

Soient $Z = Z_0 \cup \cdots \cup Z_l$ une stratification pour l'action de D^r dans Z, j le plus grand entier tel que $g(R^rM) \cap Z_j \neq \emptyset$ et d_j la dimension des D^r-orbites dans Z_j. Soit $\rho_{\max}$ la valeur maximum prise par le rang de g sur l'ouvert $g^{-1}(Z_j)$. Comme g est D^r-équivariant, l'ouvert

$$\{\psi \in R^rM \ / \ g(\psi) \in Z_j \text{ et } \mathrm{rang}_\psi(g) = \rho_{\max}\}$$

est de la forme $p_r^{-1}(U)$ où U est un ouvert de M.

On a encore le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^rU & \xrightarrow{g} & Z_j \\ \downarrow p_r & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{\overline{g}} & W_j \end{array}$$

mais cette fois $W_j := D^r \backslash Z_j$ est une variété C^∞, π est une fibration et g est une application de rang constant ρ. On en déduit que $\overline{g}$ est une application de rang constant $\rho - d_j$. Donc, pour tout w dans W_j les images inverses $\{x \in U \ / \ \overline{g}(x) = w\}$ sont des sous-variétés fermées. On a vu que ce sont les I^r-orbites dans U.$\diamond$

On posera désormais:

$$U_r = \{x \in M \ / \ \begin{array}{l} \text{il existe un voisinage } V \text{ de } x \text{ et un entier } j \leq l \\ \text{tel que } g^{r-r_0}(p_r^{-1}(V) \subset Z_j \text{ et l'application} \\ g^{r-r_0} \text{ est de rang constant sur } \ p_r^{-1}(V)\} \end{array}$$

Notre raisonnement prouve que U_r est un ouvert dense dans lequel les I^r-orbites sont des sous variétés fermées qui feuillètent U_r.

2.3 Etude de $\mathbf{I}^r$.

Nous rassemblons dans cette partie les renseignements géométriques dont nous aurons besoin sur l'ensemble I^r pour pouvoir intégrer certains r-jets isométriques en germes d'isométries.

Notons $D^r M$ l'ouvert de $J^r(M, M)$ formé des r-jets ψ de difféomorphismes locaux de M dans M et notons encore

$$q_r : D^r M \to M \times M$$

la projection définie par $q_r(\psi) = (x_1, x_2)$ où x_1 est le point de départ de ψ et $x_2 = \psi(x_1)$. La projection q_r est une fibration dont chaque fibre $D^r_{x_1,x_2} := q_r^{-1}((x_1, x_2))$ est difféomorphe à D^r.

L'ensemble $I^r = I^r(M)$ des r-jets isométriques de g est une partie de $D^r M$ et l'ensemble $I^r_{x_1,x_2}$ est l'intersection $I^r \cap D^r_{x_1,x_2}$. On note Ω^r ou $\Omega^r(M)$ l'ensemble

$$\Omega^r = q_r(I^r)$$

des couples d'éléments de M qui sont reliés par un r-jet isométrique.

Pour x dans M, on note 1^r_x le r-jet en x de l'identité: c'est l'élément neutre du groupe $I^r_{x,x}$.

Lemme. *Soient g une A-structure d'ordre r_0 de classe C^k, $r = r_0 + i$ avec $0 \leq i \leq k-1$ et $x \in U_r$ (c.f. 2.2). Alors*

a) Au voisinage du point (x, x), Ω^r est une sous-variété fermée de classe C^{k-i} de $M \times M$.

b) Au voisinage du point 1^r_x, I^r est une sous-variété fermée de classe C^{k-i} de $D^r M$.

c) L'application $q_r : I^r \to \Omega^r$ est une submersion au voisinage de 1^r_x.

Remarque. L'affirmation *c)* signifie que deux points x_1, x_2 de U_r suffisamment proches qui sont reliés par un r-jet isométrique sont alors reliés par un r-jet isométrique proche de l'identité.

Démonstration. a) Dans tous ces énoncés, on peut supposer $r = r_0$ i.e. $i = 0$. On reprend les notations du lemme 2.2. Comme $\overline{g}$ est une application C^k de rang localement constant, l'ensemble $\Omega^r(U_r) = \{(x_1, x_2) \in U_r \times U_r \ / \ \overline{g}(x_1) = \overline{g}(x_2)\}$ est une sous-variété fermée de classe C^k au voisinage de (x, x).

b) et c) Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} m_r : R^rM \times R^rM & \to & D^rM \\ (\psi_1, \psi_2) & \to & \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \end{array}$$

C'est un D^r-fibré principal pour l'action diagonale de D^r: $(\psi_1, \psi_2)\varphi = (\psi_1 \circ \varphi, \psi_2 \circ \varphi)$. Autrement dit, si on se donne deux r-repères ψ_1, ψ_2 de M, on en déduit un r-jet de difféomorphisme f de M dans lui-même: celui qui envoie le premier r-repère sur le second. Lorsque f est donné, le choix du premier r-repère est arbitraire, le second s'en déduit. Soit

$$L^r = \{(\psi_1, \psi_2) \in R^rM \times R^rM \ / \ g(\psi_1) = g(\psi_2)\}.$$

On a l'égalité

$$L^r = m_r^{-1}(I^r) \ .$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer les deux assertions suivantes, pour tout ψ dans R^r_xM:

b') Au voisinage du point (ψ, ψ), L^r est une sous-variété fermée de classe C^k de $R^rM \times R^rM$.

c') L'application $(p_r, p_r) : L^r \to \Omega^r$ est une submersion au voisinage de (ψ, ψ).

La première assertion résulte, comme en *a)* de ce que g est de rang localement constant. Démontrons la deuxième. Comme L^r contient la diagonale, l'image de l'application tangente en (ψ, ψ) contient la diagonale de $T_xM \times T_xM$. Soit

$$L^r_\psi := \{\psi' \in R^rM \ / \ g(\psi') = g(\psi)\} \ .$$

Il suffit donc de prouver que la surjection

$$p_r : L^r_\psi \to \Omega^r_x$$

est une submersion en ψ. On déduit du diagramme 2.2, le diagramme commutatif suivant formé de suites exactes, où $z = g(\psi)$, $w = \pi(z) = \overline{g}(x)$, W' est une sous-variété localement fermée de W_j image par $\overline{g}$ d'un petit voisinage de x, $Z' = \pi^{-1}(W')$ et où $D^r.z$ est la fibre de π contenant z.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & T_\psi(R^r_xM) & \to & T_z(D^r.z) & \to 0 & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to & T_\psi(L^r_\psi) & \to & & T_\psi(R^rM) & \to & T_zZ' & \to 0 & \\ & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to & T_x(\Omega^r_x) & \to & & T_xM & \to & T_wW' & \to 0 & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

L'assertion recherchée est la surjectivité de la flèche verticale de gauche, elle se déduit d'une simple chasse au diagramme.$\diamond$

Corollaire. *Soient g une A-structure d'ordre r_0 de classe C^k rigide à l'ordre $r_1 = r_0 + i_1$ avec $0 \leq i_1 \leq k-2$, $r = r_0 + i$ avec $i_1 + 1 \leq i \leq k-1$ et $x \in U_r \cap U_{r-1}$.*

Alors l'application naturelle $\rho_r : I^r \to I^{r-1}$ est une immersion au voisinage de 1^r_x.

Démonstration. D'après le lemme, l'injection $\Omega^r \hookrightarrow \Omega^{r-1}$ est une immersion au voisinage de (x, x). Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^r & \to & I^{r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^r & \to & \Omega^{r-1} \end{array}$$

est commutatif, il suffit de montrer que la restriction de ρ_r en une application de $I^r_{x,x}$ dans $I^{r-1}_{x,x}$ est une immersion au voisinage de 1^r_x. Cela résulte de ce que cette restriction est un morphisme de groupes injectif.$\diamond$

3. I^{loc}-orbites.

Rappelons maintenant quelques généralités sur les relations aux dérivées partielles que nous appliquerons à la relation $I^r \subset J^r(M, M)$.

3.1 Relations aux dérivées partielles.

On reprend les notations de 1.1.2. Soient M (resp. N) une variété C^∞ de dimension n (resp. q), $r \geq 0$ et $P^r := J^r(M, N) \stackrel{\pi_r}{\to} M$ le fibré des r-jets d'applications de M dans N.

Définition. *Une section $\tau : M \to P^r$ de classe C^0 est dite holonome si elle est égale au r-jet $J^r f$ d'une application $f : M \to N$ de classe C^r.*

La section τ est de classe C^k si et seulement si l'application f est de classe C^{k+r}.

Définition. *Un n-plan Π de TP^r est dit holonome si il est tangent à une section holonome τ de classe C^1, i.e. si on peut écrire $\Pi = \mathrm{Im}(T_x\tau)$ pour un point x de M.*

On note H^r l'ensemble des n-plans holonomes de TP^r. C'est une famille de n-plans sur P^r qui sont transverses aux fibres de la projection π_r.

Remarque. On a une identification naturelle de fibrés au dessus de P^r

$$\begin{array}{rcl} P^{r+1} & \leftrightarrow & H^r \\ q & \leftrightarrow & \Pi_q \end{array}$$

donné par $\Pi_q = \mathrm{Im}(T_x\sigma^r)$ pour toute section σ de P telle que $q = \sigma^{r+1}(x)$.

En effet, connaître la dérivée en x du r-jet de σ équivaut à connaître le $(r+1)$-jet en x de σ.

Lemme. *Une section $\tau : M \to P^r$ est holonome si et seulement si elle est tangente en tout point à un n-plan holonome, i.e. si* $\mathrm{Im}(T_x\tau) \in H^r$ *, pour tout x dans M.*

Démonstration. On peut supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et N un ouvert de $\mathbb{R}^q$. Une section τ de P^r est la donnée, pour tout multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de longueur $|\alpha|$ inférieure ou égale à r, de fonctions $t_\alpha : M \to N$. On note $\bar{\imath}$ le n-uplet dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i$^{\text{ème}}$ qui est égale à 1.

La section τ est holonome si et seulement si $t_\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} t_0$, pour tout α. La section τ est tangente en tout point à un n-plan holonome si et seulement si, pour tout multiindice β avec $|\beta| \leq r-1$ et $i = 1, \ldots, n$, on a $\partial_{x_i} t_\beta = t_{\beta+\bar{\imath}}$. C'est bien la même chose.$\diamond$

Définition. *Une partie R de P^r est appelée une relation aux dérivées partielles. On appelle solution de R une application $f : M \to N$ de classe* C^r *telle que $J^r f$ prend ses valeurs dans R.*

On dit que la solution f passe par un point p de R si ce point est dans l'image de $J^r f$.

En pratique R sera toujours une sous-variété localement fermée de classe C^k de P^r avec $k \geq 1$. Ce que nous supposons désormais.

3.2 Existence et unicité.

Définition. *R est dit* C^k *complet si la fibration naturelle ρ_r de P^r sur P^{r-1} induit un* C^k*-difféomorphisme de R sur son image R_0.*

La complétude signifie que, quand on connait le $(r-1)$-jet de f, on connait son r-jet et que ce r-jet dépend de façon C^k du $(r-1)$-jet. Nous verrons que c'est la complétude qui assure l'unicité et la régularité des solutions. L'existence locale de solutions sera une conséquence de la consistance de R :

Définition. *R est dit consistant si, pour tout p dans R, il existe une section $\tau : M \to P^r$ à valeurs dans R, passant par p et tangente en p à un n-plan holonome.*

Théorème. (Frobenius) *Soient $k \geq 1$ et $R \subset P^r$ une sous-variété localement fermée de classe* C^k*,* C^k*-complète et consistante. Alors, pour tout p dans R, il existe un germe de solution passant par p. Il est unique et de classe* C^k*.*

Autrement dit, si la relation R exprime le r-jet d'une solution en fonction de son $(r-1)$-jet et si par chaque point de R passe une "solution à l'ordre $r+1$", alors il passe aussi un germe de solution.

Bien sûr, Frobenius ne connaissait pas le langage des jets. Mais on va voir que l'essence de ce théorème est le théorème de Frobenius classique.

Démonstration. Comme R est C^k-complet, la restriction à R de la projection ρ_r admet un inverse $\Phi : R_0 \to R \subset P^r \simeq H^{r-1}$. C'est un champ de n-plans holonomes de classe C^k sur R_0.

Soient p_0 un point de R_0, $p = \Phi(p_0) \in R$ et $x_0 = \pi_{r-1}(p_0) \in M$. La consistance assure tout d'abord que ce champ de n-plans est tangent à R_0. En effet, la section τ donnée par la définition fournit une section $\rho_r \circ \tau : M \to R_0$ qui passe par p_0 et est tangente en p_0 au n-plan holonome p.

La projection $\pi_{r-1} : R_0 \to M$ est donc une submersion et l'application $\Phi : R_0 \to TR_0$ est un champ C^k de n-plans transverses aux fibres. On recherche une application locale $f : M \to N$ de classe C^{k+r} telle que

$$J^r f(x_0) = p \ \text{ et } \ J^r f(M) \subset R \ .$$

Il revient au même de chercher une section

$$\begin{array}{l} \mu : M \to R_0 \text{ de classe } \mathrm{C}^{k+1} \text{ passant par } p_0 \\ \text{et tangente en tout point au champ de } n\text{-plans } \Phi \ . \end{array}$$

Le lien entre μ et σ est l'égalité $\mu = J^{r-1} f$.

Comme le problème est local, on peut supposer que $R_0 = M \times M'$ où M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et M' un ouvert de $\mathbb{R}^{n'}$; la projection π_r étant la projection sur le premier facteur. Le champ de n-plans Φ est alors donné par une application de classe C^k

$$F : M \times M' \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n'}) \ .$$

La section μ cherchée est donnée par une application $m : M \to M'$ de classe C^{k+1}. La condition sur μ se traduit par l'équation:

$$dm(x) = F(x, m(x)) \quad \forall x \in M \ .$$

Notons $D_x F$ (resp. $D_y F$) la différentielle partielle de F par rapport à la première (resp. deuxième) variable. Le théorème de Frobenius classique assure l'existence locale, l'unicité et la régularité des solutions de cette équation passant par un point $p_0 = (x_0, y_0)$ donné, sous l'hypothèse que la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n'}$

$$D_x F(x,y) + D_y F(x,y) \circ F(x,y) \quad \text{est symétrique,} \ \ \forall (x,y) \in M \times M' \ .$$

Cette forme bilinéaire n'est rien d'autre que la différentielle seconde d'une solution passant par (x, y). Elle est donc symétrique dès que, pour tout $p_0 = (x_0, y_0)$ dans $M \times N$ il existe une application $m_0 : M \to M'$ passant par p_0 telle que on ait l'égalité

$$dm_0(x) = F(x, m_0(x)) \quad \text{à l'ordre 1 au point } x_0.$$

C'est précisément ce qu'affirme l'hypothèse de récurrence.$\diamond$

3.3 Etude des I^{loc}-orbites.

On peut maintenant démontrer la proposition de l'introduction. Elle résulte du lemme 2.2 et du lemme suivant:

Lemme. *Soit g une A-structure (d'ordre r_0, de classe C^∞) rigide (à l'ordre r_1) sur M. Alors il existe $r_2 \geq 0$ et un ouvert dense U de M tel que, pour tout x dans U il existe un voisinage ouvert V de x dans lequel I^{r_2}-orbites et I^{loc}-orbites coïncident.*

Remarques a) On peut prendre pour r_2 une fonction polynomiale explicite $r_2(r_1, n)$ de r_1 et n, par exemple $r_2(r_1, n) = r_1 + 2(\dim(D^{r_1}) + n + 1)$. On peut prendre pour ouvert U l'intersection des ouverts U_r pour $r_1 \leq r \leq r_2 + 1$.

b) Dans cet ouvert U, les I^{loc}-orbites sont donc des sous-variétés fermées qui forment un feuilletage de U.

c) Si g est seulement de classe C^k, avec $k > r_2(r_1, n) - r_0$, le lemme est encore valable.

d) Il existe probablement aussi un ouvert dense U de M dans lequel I^{r_2}-orbites et I^{loc}-orbites coïncident. Nous n'en aurons pas besoin.

e) Par contre, dans l'ouvert U de la remarque a), il se pourrait que I^r-orbites et I^{loc}-orbites ne coïncident pas car il se pourrait que certains r-jets isométriques ne s'intègrent pas en des isométries locales. En voici un exemple: prendre $M = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{R}^2$ et g une A-structure rigide d'ordre 0 et de classe C^∞ donnée par une immersion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(0) = g(1)$ et telle que le point $0 \in \mathbb{R}$ est un zéro isolé mais d'ordre infini de la fonction $x \to g(x+1) - g(x)$. On choisit en outre le jet en 0 de g en position suffisamment générale pour que les points 0 et 1 soient dans tous les ouverts U_r. Par construction, les points 0 et 1 sont dans la même I^r-orbite pour tout r mais ils ne sont pas dans la même I^{loc}-orbite.

Démonstration. On choisit r_2 et U comme dans la remarque. Soient x un point de U et d_x^r la dimension de I^r au voisinage de 1_x^r. Comme la suite $r \to d_x^r$ est décroissante, on peut trouver un entier r entre r_1 et $r_2 - 1$ tel que $d_x^{r-1} = d_x^r = d_x^{r+1}$. On choisit alors, à l'aide du lemme 2.3 et de son corollaire, un voisinage ouvert V de x dans M et des voisinages ouverts $I_*^{r'}$ de $1_x^{r'}$ dans $I^{r'}(V)$ tels que:

α) $I_*^{r'}$ est une sous-variété localement fermée de $P^{r'}$ pour $r' = r-1, r$ et $r+1$.
β) L'application $\rho_{r+1} : I_*^{r+1} \to I_*^r$ est un difféomorphisme.
γ) L'application $\rho_r : I_*^r \to I_*^{r-1}$ est un difféomorphisme.
δ) L'application $q_r : I_*^r \to \Omega^r(V)$ est surjective.

Montrons que dans V, I^r-orbites et I^{loc}-orbites coïncident. D'après δ), il suffit de voir que tout élément θ de I_*^r est le r-jet d'une isométrie locale. Autrement dit, on cherche une solution passant par θ à la relation aux dérivées partielles $R := I_*^r$. On la trouve grâce au théorème de Frobenius. La seule chose à vérifier est la complétude et la consistance de I_*^r. La complétude résulte de γ). La consistance résulte de β) et du lemme suivant.◇

Lemme. *Soit $x_0 \in U_r$. Pour tout $(r+1)$-jet isométrique $\theta' \in I^{r+1}$ suffisamment proche de l'identité $1_{x_0}^{r+1}$, le n-plan holonome $\Pi_{\theta'}$ est tangent à I^r.*

Remarque. Un tel énoncé n'est pas exact pour un $(r+1)$-jet isométrique quelconque, même si I^r est lisse: prendre le $(r+1)$-jet en 0 de l'application $x \to x+1$ dans l'exemple de la remarque e) ci-dessus.

Démonstration. On peut supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que $r = r_0$. Il résulte de la discussion en 2.3 que, dans un voisinage ouvert P_*^r du point $1_{x_0}^r$ dans $D^r M \subset P^r$, la sous-variété I_*^r est définie par une équation:

$$I_*^r = \{\theta \in P_*^r \;/\; G(\theta) = 0\}$$

où G est une application de rang constant: si on identifie $D^r M$ à $M \times M \times D^r$, Z à une sous-variété d'un espace vectoriel et g à une application C^∞ de M dans Z, on a tout simplement $G(x_1, x_2, \varphi) = g(x_2) - \varphi \cdot g(x_1)$.

Il suffit donc de vérifier que le n-plan holonome est inclus dans le noyau de la différentielle de G. C'est exactement ce qu'exprime l'appartenance $\theta' \in I_*^{r+1}$.

Détaillons ce dernier point: soit $f \in \mathrm{C}^\infty(M, M)$ une application dont le $(r+1)$-jet en x est notre élément θ' et notons $\theta := J^r f(x)$ le r-jet correspondant. Dire que θ' est un $(r+1)$-jet isométrique, c'est dire que le 1-jet en x de l'application $y \to G(J^r f(y))$ est nul. Autrement dit, on a l'égalité entre les applications tangentes:

$$T_\theta G \circ T_x(J^r f) = 0$$

et donc

$$\Pi_{\theta'} \subset \mathrm{Ker}(T_\theta G) = T_\theta I^r \;.\diamond$$

Le corollaire de l'introduction se déduit facilement de la proposition car une I^{loc}-orbite d'intérieur non vide est ouverte.

Références.

[B-F-L] **Y.Benoist, P.Foulon, F.Labourie** - Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables, Jour. Am. Math. Soc. 5 (1992) p.33-74.

[B-L] **Y.Benoist, F.Labourie** - Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Inv. Math.111 (1993) p.285-308.

[Gr] **M.Gromov** - Rigid transformation groups, dans Géométrie différentielle, D.Bernard et Y.Choquet-Bruhat (éditeurs), Travaux en cours 33 (1988) p.65-139.

URA 748 du CNRS
Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 75251 Paris cedex 05.
benoist @ mathp7.jussieu.fr