

Actions symplectiques de groupes compacts

Yves Benoist

Résumé

Pour toute action symplectique d'un groupe compact connexe sur une variété symplectique compacte connexe, nous montrons que la trace sur la chambre de Weyl de l'image de l'application moment est un polyèdre convexe fermé. Ceci généralise les théorèmes de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg-Kirwan à des actions non hamiltoniennes. Comme conséquence, nous décrivons les actions symplectiques d'un tore sur une variété compacte, qui sont coisotropes (ou sans multiplicité), c'est-à-dire qui admettent une orbite coisotrope.

Symplectic actions of compact groups

Abstract

For any symplectic action of a compact connected group on a compact connected symplectic manifold, we show that the intersection of the Weyl chamber with the image of the moment map is a closed convex polyhedron. This extends Atiyah-Guillemin-Sternberg-Kirwan's convexity theorems to non hamiltonian actions. As a consequence, we describe those symplectic actions of a torus which are coisotropic (or multiplicity free) i.e. which have at least one coisotropic orbit.

1. Notations

Soit M une variété C^∞ connexe, ω une 2-forme symplectique sur M et K un groupe de Lie connexe. On dit que (M, ω) est une K -variété symplectique, si M est munie d'une action de K qui préserve la forme symplectique ω . On note $\widetilde{M} \xrightarrow{p} M$ le revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(M)$ le groupe fondamental que l'on regarde comme un groupe de difféomorphismes de $\widetilde{M}$ et $\widetilde{\omega} = p^*(\omega)$. Pour tout élément ξ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K , on note X_ξ le champ de vecteurs sur M donné par l'action infinitésimale de ξ , $\widetilde{X}_\xi = p^*(X_\xi)$ et $\widetilde{\mu}^\xi$ un hamiltonien pour $\widetilde{X}_\xi$, c'est-à-dire une fonction sur $\widetilde{M}$ dont la différentielle est le produit intérieur $i_{\widetilde{X}_\xi} \widetilde{\omega}$. On peut supposer ces hamiltoniens choisis de sorte que l'application $\xi \rightarrow \widetilde{\mu}^\xi$ soit linéaire. On note alors $\widetilde{\mu}$ l'application de $\widetilde{M}$ dans $\mathfrak{k}^*$ donnée par $\widetilde{\mu}(x)(\xi) = \widetilde{\mu}^\xi(x)$. On dit que $\widetilde{\mu}$ est le *moment* de l'action de $\widetilde{K}$ sur $\widetilde{M}$. Il est bien défini à addition près d'une constante dans $\mathfrak{k}^*$. Il existe donc un morphisme de groupes h de Γ dans $\mathfrak{k}^*$, appelé *morphisme d'holonomie*, tel que, pour tout γ dans Γ , on a $\widetilde{\mu} \circ \gamma = \widetilde{\mu} + h(\gamma)$.

On note $\mathfrak{k}_h := \{\xi \in \mathfrak{k} / i_{X_\xi} \omega \text{ est exacte}\}$. C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{k}$ qui contient la sous-algèbre dérivée $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. L'action est dite *hamiltonienne* si $\mathfrak{k}_h = \mathfrak{k}$ et si on peut choisir le moment de sorte qu'il soit équivariant sous l'action de $\widetilde{K}$ (voir [2],[7] ou [15]). L'action est dite *anhamiltonienne* si $\mathfrak{k}_h = 0$.

Soit E un espace topologique. On dit qu'une application $f : \widetilde{M} \rightarrow E$ est *propre modulo* Γ si, pour tout compact B de E , il existe un compact M_0 de M tel que $f^{-1}(B) \subset p^{-1}(M_0)$. On dit que f est *ouverte* si l'image de tout ouvert est un ouvert. On appelle *fibre* de f l'image inverse $f^{-1}(\lambda)$ d'un point λ de E et *feuille* de f une composante connexe d'une fibre de f . Pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{k}$, on note $\mathfrak{s}^\perp = \{f \in \mathfrak{k}^* / f(\mathfrak{s}) = 0\}$ et $\widetilde{M}^\mathfrak{s}$ l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{s}$ dans $\widetilde{M}$.

2. Le moment pour l'action d'un tore

Théorème 1 Soient $T = \mathbb{T}^d$ un tore, (M, ω) une T -variété symplectique connexe, $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(M)$, $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ le moment de l'action de $\widetilde{T}$ sur $\widetilde{M}$ et $h : \Gamma \rightarrow \mathfrak{t}^*$ le morphisme d'holonomie. On suppose que $\tilde{\mu}$ est propre modulo Γ .

a) L'image $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est un polyèdre convexe fermé et l'application $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est ouverte et à fibres connexes.

b) Pour tout λ dans $\mathfrak{t}^*$, on a l'égalité $\overline{\Gamma \cdot \tilde{\mu}^{-1}(\lambda)} = \tilde{\mu}^{-1}(\lambda + \overline{h(\Gamma)})$.

c) On a l'égalité $\tilde{\mu}(\widetilde{M}) + \mathfrak{t}_h^\perp = \tilde{\mu}(\widetilde{M})$.

d) Si M est compacte, le quotient $\tilde{\mu}(\widetilde{M})/\mathfrak{t}_h^\perp$ est compact, le sous-groupe T_h de T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_h$ est fermé et $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est l'enveloppe convexe de $\tilde{\mu}(\widetilde{M}^{\mathfrak{t}_h})$.

La condition “ $\tilde{\mu}$ propre modulo Γ ” est automatiquement vérifiée lorsque M est compact. Ce théorème généralise le théorème d'Atiyah, Guillemin et Sternberg de convexité du moment pour une action hamiltonienne ([1], [9]). Le point b) décrit l'adhérence de l'image dans M des feuilles de l'application moment. Il est conjecturé dans [4] §II.3.1, sous l'hypothèse que l'action de T est “localement hamiltonienne”.

Remarques Le fait que T_h soit fermé est démontré dans [6] sous l'hypothèse que la classe de cohomologie de ω est dans $H^2(M, \mathbb{Q})$. Lorsque M n'est pas compacte, le sous-groupe T_h n'est pas toujours fermé. En voici un exemple. Fixons un nombre réel irrationnel α et posons $M = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z, t) / x, y, z \in \mathbb{T}^1, t \in \mathbb{R}\}$, $\omega = (\alpha dx - dy) \wedge dz + dy \wedge dt$ et $T = \mathbb{T}^2$. Le groupe T agit sur M par translation sur les deux premières coordonnées. Cette action est symplectique. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_h$ est la droite de pente α dans $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^2$. Donc le groupe correspondant T_h n'est pas fermé.

Signalons aussi qu'il existe des actions symplectiques anhamiltoniennes du tore $\mathbb{T}^1$ sur une variété compacte avec des points fixes ([16])

Notre démonstration suit la stratégie de la jolie preuve du cas hamiltonien donnée par Condevaux, Dazord et Molino dans [4] (voir aussi [11] et [14] pour une rédaction plus détaillée). On montre tout d'abord une version locale de ce théorème à l'aide d'un modèle local de l'action au voisinage d'une orbite comme dans [8]. Ceci permet de munir l'espace des feuilles de $\tilde{\mu}$ d'une structure “euclidienne convexe”. Le point clef consiste à démontrer que cet espace de feuilles est séparé. Un argument général sur les structures euclidiennes convexes permet alors de conclure.

3. Le moment pour l'action d'un groupe compact

Dans cette partie, on note K un groupe compact connexe, T un tore maximal de K , $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. Son dual $\mathfrak{t}^*$ s'identifie au sous-espace vectoriel $(\mathfrak{t}^*)^T$ des points fixes de T dans $\mathfrak{t}^*$. On note $\mathfrak{t}_+^*$ une chambre de Weyl positive, c'est un cône convexe fermé de $\mathfrak{t}^*$ qui rencontre chaque orbite coadjointe de K en exactement un point.

Soit (M, ω) une K -variété symplectique. On peut toujours choisir le moment $\tilde{\mu}$ de sorte que $\tilde{\mu}$ soit équivariant pour l'action du groupe dérivé $[\widetilde{K}, \widetilde{K}]$. Ce que l'on fait. Le moment est alors bien défini à addition près d'une constante dans le sous-espace vectoriel $(\mathfrak{t}^*)^K$ des points fixes de K . L'image $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est alors une réunion d'orbites coadjointes et est donc entièrement déterminée par son intersection avec la chambre de Weyl.

Théorème 2 Soient K un groupe compact connexe, (M, ω) une K -variété symplectique connexe, $\tilde{M}$ le revêtement universel de M , $\Gamma = \pi_1(M)$, $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ le moment de l'action de $\tilde{K}$ sur $\tilde{M}$, et $h : \Gamma \rightarrow (\mathfrak{k}^*)^K$ le morphisme d'holonomie. On suppose que $\tilde{\mu}$ est propre modulo Γ .

- a) L'intersection $\tilde{\mu}(\tilde{M}) \cap \mathfrak{k}_+^*$ est un polyèdre convexe fermé.
- b) Pour tout λ dans $\mathfrak{k}^*$, on a l'égalité $\overline{\Gamma \cdot \tilde{\mu}^{-1}(\lambda)} = \tilde{\mu}^{-1}(\lambda + \overline{h(\Gamma)})$.
- c) On a l'égalité $\tilde{\mu}(\tilde{M}) + \mathfrak{k}_h^\perp = \tilde{\mu}(\tilde{M})$
- d) Si M est compacte, le quotient $\tilde{\mu}(\tilde{M})/\mathfrak{k}_h^\perp$ est compact et le sous-groupe de Lie K_h de K d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_h$ est fermé et contient le groupe dérivé $[K, K]$.

La condition “ $\tilde{\mu}$ propre modulo Γ ” est automatiquement vérifiée lorsque M est compact. Ce théorème généralise le théorème de Kirwan de convexité du moment pour une action hamiltonienne ([12]).

Notre démonstration adapte la méthode décrite dans [4] et [9] pour se ramener à un théorème de convexité pour une action symplectique d'un tore. Cette méthode consiste à construire une sous-variété symplectique T -invariante Σ qui rencontre un ouvert connexe et dense de K -orbites et sur laquelle les moments de l'action de K et de T coïncident.

4. Nilvariétés et actions coïsotropes d'un tore

Une action symplectique d'un tore T sur (M, ω) est dite *coïsothrope* (ou sans multiplicité, voir [10]) si il existe une orbite de T dans M qui est coïsothrope ou, ce qui est équivalent, si le crochet de Poisson de deux fonctions T -invariantes sur M est toujours nul.

Construisons tout d'abord des exemples d'actions coïsootropes anhamiltoniennes :

On dit que (M, ω) est une nilvariété symplectique si M est une nilvariété compacte, c'est à dire le quotient $M = \Gamma \backslash N$ d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N par un sous-groupe Γ discret et cocompact de N et si ω est une forme symplectique dont la relevée $p^*\omega$ est une 2-forme invariante par translation à gauche sur N . Dans ce cas, choisissons un tore central T de M c'est-à-dire une sous-variété compacte de M image d'un sous-groupe connexe du centre de N . Ce tore central T est un tore qui agit sur M par translation. Cette action est symplectique et anhamiltonienne car elle est libre alors que le gradient symplectique de toute fonction sur une variété compacte s'annule. Lorsque T est une sous-variété coïsothrope de M , l'action de T sur M est coïsothrope ; remarquons que cela ne peut se produire que si N est commutatif ou nilpotent à deux crans.

Soient T_0, T_1 deux groupes qui agissent respectivement sur une variété symplectique (M_0, ω_0) et (M_1, ω_1) . L'action de $T_0 \times T_1$ sur la variété symplectique $(M_0 \times M_1, \omega_0 \times \omega_1)$ est appelée action produit. Le produit de deux actions symplectiques est coïsothrope si et seulement si chacune des deux actions est coïsothrope.

Théorème 3 a) Toute action coïsothrope d'un tore T sur une variété symplectique compacte connexe (M, ω) est isomorphe au produit d'une action coïsothrope hamiltonienne et d'une action coïsothrope anhamiltonienne.

b) Toute action coïsothrope anhamiltonienne d'un tore T sur une variété compacte connexe (M, ω) est isomorphe à l'action d'un tore central coïsothrope sur une nilvariété symplectique.

Remarque Les actions coïsootropes hamiltoniennes ont déjà été décrites par Delzant dans [5] : *L'application $M \rightarrow \mu(M)$ est une bijection entre l'ensemble des actions coïsootropes hamiltoniennes effectives de T sur une variété symplectique (M, ω) compacte connexe et l'ensemble des polyèdres convexes compacts de $\mathfrak{t}^*$ "à directions entières".*

Pour démontrer le théorème 3, on commence par déterminer le revêtement $\tilde{T}$ de T qui agit effectivement sur le revêtement universel $\tilde{M}$ de M . On introduit alors une classe d'actions symplectiques coïsootropes dites adaptées qui contient l'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ et on montre qu'une action symplectique coïsootrope adaptée est entièrement déterminée par le convexe image de l'application moment. Le point clef est, comme dans [5] et [13], une interprétation faisceautique du groupe des symplectomorphismes équivariants de $\tilde{M}$.

On en déduit que l'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ est un produit d'une action hamiltonienne coïsootrope du tore T_h sur une variété symplectique compacte M_h par une action coïsootrope d'un groupe de Lie commutatif simplement connexe $\tilde{T}_a$ sur une variété symplectique $\tilde{M}_a$ difféomorphe à un espace vectoriel. On montre alors que le choix de cette décomposition peut être fait de sorte que le groupe fondamental Γ de $\tilde{M}$ n'agisse que sur le facteur $\tilde{M}_a$ et est inclus dans un sous-groupe de Lie nilpotent N du groupe des symplectomorphismes équivariants de $\tilde{M}_a$, sous-groupe qui agit simplement transitivement sur $\tilde{M}_a$.

Les démonstrations de ces trois théorèmes sont détaillées dans [3].

Références

- [1] M. ATIYAH - Convexity and commuting hamiltonians, Bull. London Math. Soc. 14 (1982) p.1-15.
- [2] M. AUDIN - The topology of torus actions on symplectic manifolds, PM 93 Birkhäuser (1991).
- [3] Y. BENOIST - Actions symplectiques de groupes compacts, preprint 60 pages (1998).
- [4] M. CONDEVAUX, P. DAZORD, P. MOLINO - Géométrie du moment, Travaux du séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie, Univ. Lyon I (1988) p.131-160.
- [5] T. DELZANT - Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment, Bull. Soc. Math. Fr. 116 (1988) p.315-339.
- [6] V. GINZBURG - Some remarks on symplectic actions of compact groups, Math. Zeit. 210 (1992) p.625-640.
- [7] V. GUILLEMIN - Moment maps and combinatorial invariants of hamiltonian T^n -spaces. PM 122 Birkhäuser (1994).
- [8] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG - Symplectic technics in physics, Camb. Univ. Press (1984).
- [9] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG - Convexity properties of the moment mapping, Inv.Math. 67 (1982) p.491-513 et 77 (1984) p.533-546.
- [10] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG - Multiplicity free spaces, Journ. Diff. Geom. 19 (1984) p.31-56.
- [11] J. HILGERT, K. NEEB, W. PLANCK - Symplectic convexity theorems and coadjoint orbits, Compos. Math. 94 (1994) p.129-180.
- [12] F. KIRWAN - Convexity properties of the moment mapping, Inv.Math. 77 (1984) p.547-552.
- [13] F. KNOP - Toward a classification of multiplicity free manifolds, Notes de cours (1997).
- [14] E. LERMAN, E. MEINREKEN, S. TOLMAN, C. WOODWARD - Non abelian convexity by symplectic cuts, preprint (1996).
- [15] D. MCDUFF, D. SALAMON - Introduction to symplectic topology, Oxford Math. Mono. (1995).
- [16] D. MCDUFF - The moment map for circle actions on symplectic manifolds, Journ. Geom. Phys. 5 (1988) p.149-160.