

# Automorphismes des cônes convexes

Yves Benoist

## Résumé

On étudie les sous-groupes de  $GL(m, \mathbb{R})$  qui préservent un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^m$  et dont l'action sur  $\mathbb{R}^m$  est irréductible. En particulier, on décrit les adhérences de Zariski possibles pour ces sous-groupes.

Comme application, on décrit les adhérences de Zariski  $G$  possibles pour les sous-groupes de  $GL(m, \mathbb{R})$  dont tous les éléments ont toutes leurs valeurs propres positives. Par exemple, le groupe  $G = GL(m, \mathbb{R})$  convient si et seulement si  $m \not\equiv 2$  modulo 4.

## Automorphisms of convex cones

## Abstract

One studies the subgroups of  $GL(m, \mathbb{R})$  which preserve a properly convex cone of  $\mathbb{R}^m$  and whose action on  $\mathbb{R}^m$  is irreducible. In particular, one describes the Zariski closure of these subgroups.

As an application, one describes the Zariski closure  $G$  of the subgroups of  $GL(m, \mathbb{R})$  all of whose elements have nothing but positive eigenvalues. For instance, one can get the group  $G = GL(m, \mathbb{R})$  if and only if  $m \not\equiv 2$  modulo 4.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Présentation générale . . . . .	1
1.2	Cônes convexes invariants . . . . .	1
1.3	Quotients compacts des cônes strictement convexes . . . . .	2
1.4	Sous-groupes préservant un cône convexe . . . . .	3
1.5	Groupes linéaires à valeurs propres positives . . . . .	4
1.6	Conventions . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Positivité, représentations et proximalité</b>	<b>6</b>
2.1	Positivité dans l'espace projectif . . . . .	6
2.2	Positivité 3 à 3 et négativité 3 à 3 . . . . .	8
2.3	Représentations des groupes de Lie semisimples . . . . .	9
2.4	Proximalité sur l'espace projectif . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Cônes convexes invariants</b>	<b>15</b>
3.1	Convexes invariants et positivité de l'ensemble limite . . . . .	15
3.2	Positivité de l'ensemble limite et formes bilinéaires . . . . .	18
3.3	Quotients compacts des cônes strictement convexes . . . . .	18
3.4	Convexes invariants et signe des valeurs propres . . . . .	21
3.5	L'ensemble limite sur la sphère . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Sous-groupes préservant un cône convexe</b>	<b>24</b>
4.1	Sous-groupes positivement proximaux . . . . .	24
4.2	Sous-groupes non positivement proximaux . . . . .	26
4.3	Représentations sphériques . . . . .	27
4.4	Signe d'un triplet de la variété des drapeaux . . . . .	28
4.5	L'adhérence de Zariski des automorphismes d'un convexe . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Groupes linéaires à valeurs propres positives</b>	<b>30</b>
5.1	Sous-groupes positivement loxodromiques . . . . .	30
5.2	Positivité dans la variété des drapeaux . . . . .	31
5.3	Construction d'un triplet de la variété des drapeaux . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Construction de Y</b>	<b>36</b>
6.1	Construction de Y pour le groupe linéaire . . . . .	36
6.2	Algèbres de Lie de type A et B . . . . .	37
6.3	Construction de Y pour le type A . . . . .	38
6.4	Construction de Y pour le groupe Spin . . . . .	39
6.5	Construction de Y pour le type B . . . . .	41
6.6	Construction de Y pour le type général . . . . .	41

# 1 Introduction

## 1.1 Présentation générale

Dans cet article, nous étudions les sous-groupes discrets  $\Gamma$  du groupe linéaire  $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$  qui préservent un cône convexe saillant  $C$  de  $\mathbb{R}^m$ .

Nous montrons tout d'abord que, si le cône  $C$  est strictement convexe et si le quotient  $\Gamma \backslash C$  est compact, alors l'adhérence de Zariski de  $\Gamma$  est soit le groupe  $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$  tout entier, soit le groupe des similitudes d'une forme quadratique lorentzienne sur  $\mathbb{R}^m$  (théorème 1.3). Signalons que d'autres aspects de ces quotients compacts des cônes convexes saillants ont été étudiés par Benzecri [8], Kac et Vinberg [20], Koszul [22], Vey [25], Goldman [13], Foulon [11] ...

Ensuite nous décrivons, l'adhérence de Zariski  $G$  de ces sous-groupes  $\Gamma$  sous la seule hypothèse que leur action sur  $\mathbb{R}^m$  est irréductible (on suppose pour simplifier que  $\Gamma$  est Zariski connexe et formé de matrices de déterminant 1). Le groupe  $G$  est alors un groupe de Lie semisimple et  $\mathbb{R}^m$  est une représentation irréductible de  $G$ . Il s'agit donc de décrire les représentations irréductibles ainsi obtenues. Elles sont caractérisées par les deux assertions suivantes : d'une part, la représentation est proximale, c'est-à-dire que son "plus haut poids restreint"  $\lambda$  a multiplicité un et, d'autre part,  $\lambda$  n'est pas égal "modulo 2" au plus haut poids restreint d'une représentation irréductible symplectique proximale (théorème 1.5.a).

Enfin, comme application, nous rappelons que dans un groupe de Lie semisimple linéaire déployé connexe  $G$ , tout sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$  contient un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres réelles c'est-à-dire dont tous les éléments ont toutes leurs valeurs propres réelles (voir l'appendice A.6 de [5]) et nous étudions à quelle condition, on peut trouver dans  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres positives. Nous montrons que c'est vrai pour le groupe  $\Gamma = G$  si et seulement si  $G$  n'admet pas de représentations irréductibles symplectiques. Nous montrons que c'est vrai pour tous les sous-groupes  $\Gamma$  Zariski denses de  $G$  si et seulement si toutes les représentations irréductibles de  $G$  sont égales "modulo 2" à une représentation irréductible proximale orthogonale (théorème 1.6).

Décrivons maintenant plus en détail les principaux résultats de cet article qui ont été annoncés dans [4].

## 1.2 Cônes convexes invariants

Soient  $V \simeq \mathbb{R}^m$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $V^*$  son dual. Un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathrm{GL}(V)$  est dit *irréductible* si il n'existe pas de sous-espace vectoriel propre  $\Gamma$ -invariant de  $V$  et *fortement irréductible* si tous ses sous-groupes d'indice fini sont irréductibles. Un élément de  $\mathrm{GL}(V)$  est dit *proximal* s'il a un point fixe attracteur dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(V)$  et *positivement proximal* si la valeur propre correspondante est positive. Le groupe  $\Gamma$  est dit *proximal* si il contient un élément proximal et *positivement proximal* si, en outre, tout élément proximal de  $\Gamma$  est positivement proximal.

La proposition suivante relie l'existence d'un convexe invariant aux signes des valeurs propres des éléments de  $\Gamma$ .

**Proposition 1.1** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe irréductible de  $GL(m, \mathbb{R})$ . Alors  $\Gamma$  préserve un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^m$  si et seulement si  $\Gamma$  est positivement proximal.*

Pour tout  $a$  dans  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ , on note  $a = (x_a, y_a)$  et on choisit des vecteurs non nuls  $v_a$  dans  $x_a$  et  $f_a$  dans  $y_a$ . Soit  $\mathbb{Q}(V) = \{a \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) / f_a(v_a) = 0\}$ . On dira qu'une partie  $P$  de  $\mathbb{Q}(V)$  est *transverse* si pour tout couple  $(a, b)$  de points distincts de  $P$ , on a  $f_a(v_b) \neq 0$ . On dira que  $P$  est *positive* si, on peut faire le choix des vecteurs  $v_a$  et  $f_a$  de sorte que, pour tout couple  $a, b$  de points de  $P$ , on a  $f_a(v_b) \geq 0$ . On dira que  $P$  est *positive 3 à 3* si tous les triplets de  $P$  sont positifs. On dira que  $P$  est *négative 3 à 3* si aucun triplet transverse de  $P$  n'est positif.

Lorsque  $\Gamma$  est proximal et fortement irréductible, on peut considérer l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{Q}(V)$  (voir [15] et [3]) : c'est le plus petit fermé  $\Gamma$ -invariant de  $\mathbb{Q}(V)$ .

La proposition suivante relie l'existence d'un convexe invariant à la positivité de cet ensemble limite.

**Proposition 1.2** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe fortement irréductible de  $GL(m, \mathbb{R})$ . Alors  $\Gamma$  préserve un convexe saillant de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ , si et seulement si  $\Gamma$  est proximal et l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  est positif.*

Les propositions 1.1 et 1.2 seront démontrées non seulement pour des sous-groupes mais aussi pour des sous-semigroupes (voir les propositions 3.11 et 3.1).

### 1.3 Quotients compacts des cônes strictement convexes

Un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^m$  est dit *strictement convexe* si les segments inclus dans le bord de  $C$  sont radiaux. On dit qu'un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $GL(m, \mathbb{R})$  *divise* un cône convexe saillant  $C$  de  $\mathbb{R}^m$  si il préserve  $C$  et si le quotient  $\Gamma \backslash C$  est compact. On dit alors que  $C$  est *divisible* (voir [25]).

**Exemple** Soient  $q$  une forme quadratique lorentzienne sur  $\mathbb{R}^m$  et  $C$  un cône de futur pour  $q$  i.e. une des composantes connexes convexes de  $\{v \in \mathbb{R}^m / q(v) \neq 0\}$ . Alors  $C$  est divisible: les sous-groupes  $\Gamma$  qui divisent  $C$  sont des réseaux cocompacts du groupe des similitudes de  $q$ .

Le résultat suivant sera démontré en 3.3 à partir des idées de la proposition 1.2.

**Théorème 1.3** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $GL(m, \mathbb{R})$  qui divise un cône ouvert strictement convexe saillant  $C$  qui n'est pas un cône de futur pour une forme quadratique lorentzienne sur  $\mathbb{R}^m$ . Alors  $\Gamma$  est Zariski dense dans  $GL(m, \mathbb{R})$ .*

**Remarques** - Réciproquement, D.Johnson et J.Millson construisent dans [19], en toutes dimensions  $m \geq 3$  et pour certains réseaux cocompacts  $\Gamma$  de  $SO(m-1, 1)$ , des déformations  $\rho_t(\Gamma)$  dans  $SL(m, \mathbb{R})$  qui sont Zariski denses. Il résulte de [22] et [23] que, pour  $t$  petit,  $\rho_t(\Gamma) \times 2^{\mathbb{Z}}$  divise un cône convexe saillant  $C_t$ . On peut montrer que ces cônes  $C_t$  sont strictement convexes.

- Une étude très complète des cônes convexes saillants divisibles en dimension 3 est due à W.Goldman dans [13].

## 1.4 Sous-groupes préservant un cône convexe

La proposition suivante permet de savoir si un groupe linéaire irréductible donné contient des sous-groupes Zariski denses qui préservent un cône convexe (voir propositions 4.2 et 4.6).

**Proposition 1.4** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe irréductible et Zariski connexe de  $GL(m, \mathbb{R})$ .*

*a)  $\Gamma$  contient un sous-groupe Zariski dense qui préserve un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^m$  si et seulement si  $\Gamma$  est proximal et l'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  n'est pas négatif 3 à 3.*

*b) Tout sous-groupe Zariski dense de  $\Gamma$  contient un sous-groupe Zariski dense qui préserve un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^m$  si et seulement si  $\Gamma$  est proximal et l'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  est positif 3 à 3.*

Pour appliquer cette proposition à un groupe de Lie semisimple, nous aurons besoin de quelques notations :

Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Notons  $\mathfrak{a}$  un sous-espace de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\Sigma$  le système de racines (dites restreintes) de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\Sigma^+$  un système de racines positives. On note  $P$  le réseau des poids relatif à  $\Sigma$ . Il est muni de l'ordre habituel :  $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu - \lambda \in \mathbb{N}\Sigma^+$ .

Soit  $(V, \rho)$  une représentation irréductible réelle de  $G$ . Pour  $\lambda$  dans  $P$ , on note  $V_{\lambda}$  l'espace de poids correspondant et  $m_{\lambda} := \dim(V_{\lambda})$  la multiplicité de ce poids. L'ensemble des poids de  $\mathfrak{a}$  dans  $V$  contient un unique élément maximal  $\chi$  appelé le *plus haut poids restreint* de  $V$ . Le groupe  $\rho(G)$  est proximal si et seulement si la multiplicité du plus haut poids restreint est 1. On dit alors que la représentation  $\rho$  est *proximale*. La représentation  $\rho$  est dite *orthogonale* (resp. *symplectique*) si il existe sur  $V$  une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) non dégénérée et  $G$ -invariante. Deux représentations irréductibles proximales de  $G$  seront dites *égales modulo 2* si la différence de leur plus haut poids restreint est dans  $2P$ .

La proposition précédente avec le groupe  $\rho(G)$  devient :

**Théorème 1.5** *Soient  $G$  un groupe de Lie réel linéaire semisimple connexe,  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$  dans  $V$ .*

*a)  $G$  contient un sous-groupe Zariski dense qui préserve un cône convexe saillant de  $V$  si et seulement si  $\rho$  est proximale et  $\rho$  n'est pas égale modulo 2 à une représentation irréductible proximale symplectique.*

b) *Tout sous-groupe Zariski dense de  $G$  contient un sous-groupe Zariski dense qui préserve un cône convexe saillant de  $V$  si et seulement si  $\rho$  est proximale et  $\rho$  est égale modulo 2 à une représentation irréductible proximale orthogonale.*

Nous avons regroupé quelques exemples de ces deux conditions dans le tableau suivant où  $0 < q < p$ .

Exemples de couples $(G, V)$	Condition $a$	Condition $b$
$SL(p, \mathbb{R}), \mathbb{R}^p$	$p \geq 3$	jamais
$SL(p, \mathbb{R}), \Lambda^q \mathbb{R}^p$	$p \neq 2q$ ou $q$ pair	$p = 2q$ et $q$ pair
$SO_0(q, p - q), \mathbb{R}^p$	toujours	toujours
$Sp(p, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{2p}$	jamais	jamais
$SL(p, \mathbb{C}), \mathbb{C}^p$	jamais	jamais
$SO(p, \mathbb{C}), \mathbb{C}^p$	jamais	jamais

**Remarques** - Le but principal de cet article est de décrire l'adhérence de Zariski des sous-groupes irréductibles et Zariski connexes  $\Gamma$  de  $GL(m, \mathbb{R})$  qui préservent un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^m$ . Comme il n'est pas restrictif de supposer que les éléments de  $\Gamma$  sont de déterminant  $\pm 1$  et qu'alors l'adhérence de Zariski de  $\Gamma$  est un groupe semisimple, c'est exactement ce que fait le point  $a$  de ce théorème.

- Nous verrons que  $G$ , lui-même, préserve un cône convexe saillant de  $V$  si et seulement si  $\rho$  est égal modulo 2 à la représentation triviale. Ces représentations  $\rho$  ne sont autres que les représentations sphériques de  $G$  (proposition 4.7).

- Il est facile de déterminer au vu du plus haut poids restreint d'une représentation irréductible proximale si celle-ci est orthogonale, symplectique ou non autoduale (voir par exemple la remarque du lemme 6.6).

## 1.5 Groupes linéaires à valeurs propres positives

Un sous-groupe  $G$  de  $GL(m, \mathbb{R})$  est dit *déployé* si l'ensemble des éléments  $g$  de  $G$  à valeurs propres positives est une partie Zariski dense de  $G$ .

Un sous-groupe  $\Gamma$  de  $GL(m, \mathbb{R})$  est dit à *valeurs propres réelles* (resp. *positives*) si toutes les valeurs propres de tous les éléments de  $\Gamma$  sont réelles (resp. positives).

La première partie du théorème suivant décrit les adhérences de Zariski des groupes linéaires à valeurs propres positives.

**Théorème 1.6** *Soit  $G$  un groupe de Lie réel linéaire semisimple connexe déployé. On a les équivalences*

a)  *$G$  contient un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres positives  $\iff G$  n'admet pas de représentations irréductibles symplectiques.*

b) *Tout sous-groupe Zariski dense de  $G$  contient un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres positives  $\iff$  Toutes les représentations irréductibles de  $G$  sont égales modulo 2 à une représentation irréductible orthogonale.*

Nous avons de nouveau regroupé quelques exemples de ces deux conditions dans le tableau suivant où  $p \geq 2$ . Il est important de remarquer que ces conditions dépendent non seulement de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de notre groupe mais aussi du revêtement  $G$  du groupe adjoint que l'on considère.

Exemples de groupes $G$	Condition $a$	Condition $b$
$SL(p, \mathbb{R})$	$p \not\equiv 2 \text{ modulo } 4$	jamais
$Spin(p, p+1)$	$p \text{ et } p+1 \not\equiv 2 \text{ modulo } 4$	$p \text{ et } p+1 \not\equiv 2 \text{ modulo } 4$
$Sp(p, \mathbb{R})$	jamais	jamais
$Spin(p, p)$	$p \not\equiv 2 \text{ modulo } 4$	$p \equiv 0 \text{ modulo } 4$
$PSL(p, \mathbb{R})$	toujours	$p \leq 4$
$SO_0(p, p+1)$	toujours	toujours
$PSp(p, \mathbb{R})$	toujours	toujours
$SO_0(p, p)$ et $PSO_0(p, p)$	toujours	toujours

**Remarque** En particulier, tout sous-groupe Zariski dense de  $SL(2, \mathbb{R})$  contient un élément à valeurs propres négatives (ce fait est démontré dans [10]) et il existe des sous-groupes Zariski dense de  $SL(3, \mathbb{R})$  à valeurs propres positives (par exemple, les groupes d'holonomie des structures projectives convexes sur les surfaces construits dans [13]).

Le théorème 1.6 se démontre de la même façon que le théorème 1.5 avec l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans la variété des drapeaux, ce qui revient à travailler simultanément avec toutes les représentations irréductibles proximales de  $G$ .

## 1.6 Conventions

Comme nous l'avons déjà vu, deux topologies sur le groupe  $GL(m, \mathbb{R})$  jouent un rôle central dans cet article: la topologie de groupe de Lie réel, on parle alors de parties ouvertes, fermées, connexes, denses... et la topologie de Zariski, on parle alors de parties Zariski ouvertes, Zariski fermées, Zariski connexes, Zariski denses... Les fermés de la topologie de Zariski sont par définition les ensembles des zéros d'une famille de polynômes.

Dans tout cet article et sauf mention explicite du contraire, les espaces vectoriels, les algèbres de Lie, les groupes de Lie et leurs représentations sont RÉELS ET DE DIMENSION FINIE.

## 2 Positivité, représentations et proximalité

Dans ce chapitre, nous décrivons les trois ingrédients essentiels de cet article : positivité, représentations et proximalité.

### 2.1 Positivité dans l'espace projectif

Dans cette partie nous étudions à quelle condition une famille “d’hyperplans pointés” de l’espace projectif est formée “d’hyperplans tangents” à une partie convexe.

Soient  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $m \geq 2$ ,  $V^*$  son dual,  $\mathbb{P}(V)$  l’espace projectif de  $V$ ,  $(e_i)$  une base de  $V$  et  $(e_i^*)$  la base de  $V^*$  duale. Pour tous  $a, b$  dans  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ , on note  $a = (x_a, y_a)$ , on choisit des vecteurs non nuls  $v_a$  dans  $x_a$  et  $f_a$  dans  $y_a$ , on note  $\eta_{ab} \in \{-1, 0, 1\}$  le signe de  $f_a(v_b)$  et  $\zeta_{ab} := \eta_{ab}\eta_{ba}$ . Ces signes dépendent des choix de  $f_a$  et  $v_b$ , mais pas les produits que nous considérerons plus loin. On note  $\mathbb{Q}(V) := \{a \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) / f_a(v_a) = 0\}$ . Lorsque  $V$  est de dimension 3, un élément de  $\mathbb{Q}(V)$  peut être représenté indifféremment par l’un des deux dessins suivants :

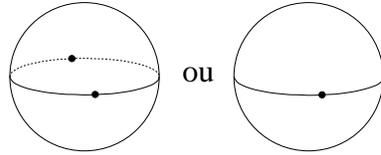


Figure 1: Un élément de  $\mathbb{Q}(V)$

On dira qu’une partie  $\Lambda$  de  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$  est *transverse* si, pour tout couple  $(a, b)$  de points distincts de  $\Lambda$ , on a  $f_a(v_b) \neq 0$ . On dira que  $\Lambda$  est *positive* si on peut faire le choix des vecteurs  $v_a$  et  $f_a$  de sorte que pour tout couple  $(a, b)$  de points de  $\Lambda$ , on a  $f_a(v_b) \geq 0$ . Géométriquement, cette condition signifie que les vecteurs  $f_a$  sont dans le cône dual du cône convexe engendré par les vecteurs  $v_a$ . Soit  $p \geq 2$ . On dira que  $\Lambda$  est *positive p à p* si toute partie de  $\Lambda$  à  $p$  éléments est positive. Un triplet de  $\Lambda$  est dit *négatif* si ce n’est pas un triplet transverse et positif. On dira que  $\Lambda$  est *négatif 3 à 3* si tous ses triplets sont négatifs.

On appelle *signe d’un triplet*  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{Q}(V)$ , le produit  $\varepsilon_{abc} := \zeta_{ab}\zeta_{bc}\zeta_{ca}$ . Le triplet  $(a, b, c)$  est donc positif (resp. négatif) si et seulement si  $\varepsilon_{abc} \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ).

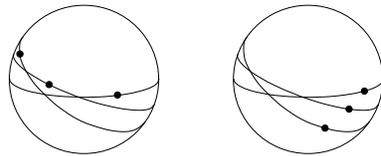


Figure 2: Un triplet positif et un triplet négatif

Les parties positives, positives 3 à 3 et négatives 3 à 3 de  $\mathbb{Q}(V)$  joueront un rôle central dans cet article. Cela est dû à l'existence des trois exemples fondamentaux suivants (cf. le lemme 3.4):

**Exemples** - Soit  $p \geq 2$ . L'orbite fermée du groupe orthogonal  $SO(p, 1)$  dans  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^{p+1})$  est positive.

- Soit  $p \geq q \geq 2$ . L'orbite fermée du groupe orthogonal  $SO(p, q)$  dans  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^{p+q})$  est positive 3 à 3 mais n'est pas positive.

- Soit  $p \geq 1$ . L'orbite fermée du groupe symplectique  $Sp(p, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^{2p})$  est négative 3 à 3.

**Démonstration** Notons  $H$  le groupe orthogonal ou le groupe symplectique selon le cas,  $b$  la forme bilinéaire non dégénérée sur  $V$  que  $H$  préserve,  $\Lambda_H^{\mathbb{Q}}$  l'orbite fermée de  $H$  dans  $\mathbb{Q}(V)$  et vérifions simplement la positivité 3 à 3 ou la négativité 3 à 3 de  $\Lambda_H^{\mathbb{Q}}$ . Il est facile de décrire cette orbite  $\Lambda_H^{\mathbb{Q}}$  : On note  $v \rightarrow v^{\sharp}$  l'isomorphisme de  $V$  sur son dual défini par  $v^{\sharp}(v') = b(v, v')$ . On a l'égalité :  $\Lambda_H^{\mathbb{Q}} = \{(x, x^{\sharp}) / (x, x^{\sharp}) \in \mathbb{Q}(V)\}$ . Cette orbite s'identifie donc avec l'ensemble des droites isotropes de  $V$ .

Soient  $v_1, v_2, v_3$  trois vecteurs isotropes non nuls de  $V$ . Le signe  $\varepsilon_{123}$  du triplet correspondant de  $\Lambda_H^{\mathbb{Q}}$  est égal au signe du produit  $b_{12}b_{21}b_{13}b_{31}b_{23}b_{32}$  où  $b_{ij} := b(v_i, v_j)$ . Si  $b$  est symétrique, on a  $\varepsilon_{123} = 1$ . Si  $b$  est antisymétrique, on a  $\varepsilon_{123} = -1$ .  $\square$

Voici un critère de positivité pour  $\Lambda$ .

**Lemme 2.1** Soit  $\Lambda$  une partie de  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$  qui contient au moins 4 éléments. On suppose que  $\Lambda$  contient une partie  $\Lambda'$  dense dans  $\Lambda$  et transverse. Alors  $\Lambda$  est positif si et seulement si, pour tout quadruplet  $(a, b, c, d)$  de  $\Lambda$ , on a  $\eta_{ac}\eta_{bc}\eta_{ad}\eta_{bd} \geq 0$ . En particulier,  $\Lambda$  est positif si et seulement si  $\Lambda$  est positif 4 à 4.

**Démonstration** C'est la même que celle du lemme précédent. On peut supposer que  $\Lambda$  est transverse. Il est clair que, pour tout quadruplet  $(a, b, c, d)$  de  $\Lambda$ , le produit  $\eta_{ac}\eta_{bc}\eta_{ad}\eta_{bd}$  ne dépend pas des choix faits. Lorsque  $\Lambda$  est positif, ces produits sont positifs ou nuls.

Démontrons la réciproque. Par hypothèse, pour tout quadruplet  $(a, b, c, d)$  d'éléments distincts de  $\Lambda$ , on a l'égalité  $\eta_{ac}\eta_{bc}\eta_{ad}\eta_{bd} = 1$  (\*).

Supposons tout d'abord que  $\Lambda$  a quatre éléments  $a, b, c, d$ . Choisissons le vecteur  $v_a$  arbitrairement. Le produit des égalités (\*) pour  $(a, b, c, d)$ ,  $(c, a, b, d)$  et  $(b, c, a, d)$  donne  $\eta_{ab}\eta_{ba}\eta_{ac}\eta_{ca}\eta_{bc}\eta_{cb} = 1$ . On en déduit des choix de signes pour  $v_b, v_c, f_a, f_b$  et  $f_c$  de sorte que  $\eta_{ab} = \eta_{ba} = \eta_{ac} = \eta_{ca} = \eta_{bc} = \eta_{cb} = 1$  puis pour  $v_d$  et  $f_d$  de sorte que  $\eta_{ad} = \eta_{da} = 1$ . Les égalités (\*) assurent que  $\eta_{bd} = \eta_{db} = \eta_{cd} = \eta_{dc} = 1$ . En outre notre hypothèse appliquée au quadruplet  $(a, b, a, c)$  prouve que  $\eta_{aa} \geq 0$ . On en déduit que  $\Lambda$  est positif.

Si  $\Lambda$  a plus de quatre éléments, on fixe  $a$  dans  $\Lambda$  et on choisit  $v_a$  arbitrairement. Pour toute partie  $\Lambda_0$  de  $\Lambda$  à quatre éléments contenant  $a$ , il existe donc des choix de signes pour  $f_a$  et pour  $v_b$  et  $f_b$  avec  $b$  dans  $\Lambda_0 - \{a\}$  de sorte que, pour tous  $b, c$  dans  $\Lambda_0$ , on a  $f_b(v_c) \geq 0$ . Ces choix de signes ne dépendent pas de la partie  $\Lambda_0$  : On s'en convainc en

comparant ces signes pour des parties  $\Lambda_0$  et  $\Lambda'_0$  ayant trois éléments en commun. Donc  $\Lambda$  est positif.  $\square$

**Remarques** - Un couple  $(a, b)$  est positif si et seulement si  $\eta_{aa}\eta_{bb}\eta_{ab}\eta_{ba} \geq 0$ .

- Un triplet transverse du complémentaire  $\mathbb{Q}(V)^c$  peut être positif 2 à 2 sans être positif.

Exemple :  $f_1 = e_1^*$ ,  $f_2 = e_2^*$ ,  $f_3 = e_3^*$ ,  $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$ ,  $v_2 = e_1 + e_2 - e_3$  et  $v_3 = e_1 - e_2 + e_3$ .

- La même démonstration permet de montrer que :

*Si  $\Lambda \cap \mathbb{Q}(V)^c$  contient une partie  $\Lambda'$  dense dans  $\Lambda$  et transverse. Alors  $\Lambda$  est positif si et seulement si, pour tout triplet  $(a, b, c)$  de  $\Lambda$ , on a  $\eta_{aa}\eta_{bb}\eta_{cc}\eta_{ab}\eta_{bc}\eta_{ca} \geq 0$ . Sous cette hypothèse,  $\Lambda$  est positif si et seulement si  $\Lambda$  est positif 3 à 3.*

- Soit  $p \geq 3$ . Si on ne fait pas l'hypothèse de transversalité, la partie  $\Lambda$  peut être positive  $p$  à  $p$  sans être positive  $p+1$  à  $p+1$ . Exemple :  $f_i = e_i^*$  pour  $1 \leq i \leq p+1$ ,  $v_i = e_{i+1} + e_{i+2}$  pour  $1 \leq i \leq p-1$ ,  $v_p = e_{p+1} + e_1$  et  $v_{p+1} = e_1 - e_2$ .

- Un quadruplet transverse de  $\mathbb{Q}(V)$  peut être positif 3 à 3 sans être positif. En voici un exemple élémentaire :  $f_i = e_i^*$ , pour  $1 \leq i \leq 4$ ,  $v_1 = e_2 + e_3 + e_4$ ,  $v_2 = e_1 + e_3 + e_4$ ,  $v_3 = e_1 + e_2 - e_4$  et  $v_4 = e_1 + e_2 - e_3$ . Un autre exemple est donné dans la figure 3.

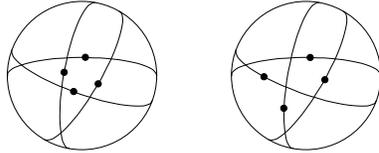


Figure 3: Un quadruplet positif et un quadruplet positif 3 à 3

## 2.2 Positivité 3 à 3 et négativité 3 à 3

Dans cette partie, nous donnons un critère très pratique de positivité 3 à 3 et de négativité 3 à 3 (lemme 2.3) que nous appliquerons aux ensembles limites (cf. proposition 4.6).

Commençons une interprétation de la positivité 3 à 3 et de la négativité 3 à 3.

**Lemme 2.2** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Lambda$  une partie de  $\mathbb{Q}(V)$  qui contient une partie  $\Lambda'$  dense dans  $\Lambda$  et transverse. Alors  $\Lambda$  est positif 3 à 3 (resp. négatif 3 à 3) si et seulement si on peut faire le choix des vecteurs  $v_a$  et  $f_a$  de sorte que, pour tout couple  $(a, b)$  de points de  $\Lambda$ , on a  $f_a(v_b)f_b(v_a) \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ).*

**Démonstration** On peut supposer  $\Lambda$  transverse.

Si on peut faire les choix de sorte que, pour tous  $a, b$  dans  $\Lambda$ , on a  $\zeta_{ab} \geq 0$  (resp.  $\zeta_{ab} \leq 0$ ), alors, pour tous  $a, b, c$  distincts dans  $\Lambda$ , on a  $\varepsilon_{abc} = 1$  (resp.  $\varepsilon_{abc} = -1$ ) et  $\Lambda$  est positif 3 à 3 (resp. négatif 3 à 3).

Réciproquement, supposons que  $\Lambda$  est positif 3 à 3 (resp. négatif 3 à 3). Alors pour tous  $a, b, c$  distincts dans  $\Lambda$ , on a  $\varepsilon_{abc} = 1$  (resp.  $\varepsilon_{abc} = -1$ ). Fixons  $a$  dans  $\Lambda$  et choisissons

arbitrairement tous les vecteurs  $f_b$  ainsi que le vecteur  $v_a$ . On choisit alors les autres vecteurs  $v_b$  de sorte que  $\zeta_{ab} = 1$  (resp.  $\zeta_{ab} = -1$ ). Notre hypothèse assure alors que, pour tous  $b, c$  distincts dans  $\Lambda$ , on a  $\zeta_{bc} = 1$  (resp.  $\zeta_{bc} = -1$ ).  $\square$

On note  $\text{End}V \simeq V \otimes V^*$  l'espace vectoriel des endomorphismes de  $V$  et  $m \longrightarrow m^\sharp$  l'isomorphisme de  $\text{End}V$  sur son dual défini par  $m^\sharp(m') = \text{tr}(mm')$ . Pour  $a$  dans  $\mathbb{Q}(V)$ , on note  $j_0(a) \in \mathbb{P}(\text{End}V)$  la droite engendrée par  $v_a \otimes f_a$ . L'application  $j_0$  est une injection de  $\mathbb{Q}(V)$  dans  $\mathbb{P}(\text{End}V)$ . L'image  $j_0(\mathbb{Q}(V))$  est l'ensemble des droites engendrées par une matrice de rang 1 et de trace nulle. La formule  $j(a) := (j_0(a), j_0(a)^\sharp)$  définit donc une injection  $j$  de  $\mathbb{Q}(V)$  dans  $\mathbb{Q}(\text{End}V)$ .

**Lemme 2.3** Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Lambda$  une partie de  $\mathbb{Q}(V)$ . Alors

- a) La partie  $j(\Lambda)$  de  $\mathbb{Q}(\text{End}V)$  est toujours positive 3 à 3.  
b) Si  $\Lambda$  contient une partie  $\Lambda'$  dense dans  $\Lambda$  et transverse, alors on a l'équivalence (  $\Lambda$  est positif 3 à 3 ou est négatif 3 à 3 )  $\iff j(\Lambda)$  est positive.

**Remarque** - Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\text{End}V$  contenant  $j_0(\Lambda)$ . On peut alors considérer  $j(\Lambda)$  comme une partie de  $\mathbb{Q}(W)$ . Notre condition équivaut à :  $j(\Lambda)$  est positive dans  $\mathbb{Q}(W)$ .

**Démonstration** a) Cela résulte des exemples du §2.1.

b) On peut supposer  $\Lambda$  transverse.

On choisit pour vecteurs :  $v_{j(a)} = v_a \otimes f_a$  et  $f_{j(a)} = v_{j(a)}^\sharp$  de sorte que  $f_{j(a)}(v_{j(b)}) = f_a(v_b)f_b(v_a)$  et  $\eta_{j(a)j(b)} = \zeta_{ab}$ . Si  $\Lambda$  est positif 3 à 3 ou négatif 3 à 3, on peut supposer les choix des vecteurs  $v_a$  et  $f_a$  faits comme dans le lemme 2.2. Mais alors les signes  $\eta_{j(a)j(b)} = \zeta_{ab}$  sont, pour  $a, b$  distincts dans  $\Lambda$ , tous égaux (à 1 ou à  $-1$  selon le cas). Ceci prouve que  $j(\Lambda)$  est positif.

Réciproquement, supposons  $j(\Lambda)$  positif. Pour tous  $a, b, c, d$  distincts dans  $\Lambda$  on a  $\zeta_{ac}\zeta_{ad}\zeta_{bc}\zeta_{bd} = 1$ . Autrement dit,  $\varepsilon_{acd} = \varepsilon_{bcd}$ . De proche en proche, on en déduit que les signes  $\varepsilon_{abc}$  des triplets de  $\Lambda$  sont tous égaux. Si ils sont tous égaux à 1,  $\Lambda$  est positif 3 à 3, sinon, ils sont tous égaux à  $-1$  et  $\Lambda$  est négatif 3 à 3.  $\square$

## 2.3 Représentations des groupes de Lie semisimples

Cette partie est constituée de rappels sans démonstration sur les groupes de Lie semisimples et leurs représentations.

### - Algèbres de Lie semisimples

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semisimple,  $\mathfrak{a}$  un sous-espace de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . On note  $\Sigma := \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  le système de racines restreintes: c'est l'ensemble des poids non nuls de l'action adjointe de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{g}$ . On note  $W$  le groupe de Weyl de ce système de racines et on munit le dual  $\mathfrak{a}^*$  d'un produit scalaire  $W$ -invariant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On choisit un système de racines positives  $\Sigma^+$ , on note  $\mathfrak{a}^+$  la chambre de Weyl correspondante  $\mathfrak{a}^+ := \{X \in \mathfrak{a} / \forall \alpha \in \Sigma^+ \alpha(X) \geq 0\}$ . On note  $\mathfrak{n}$  la sous-algèbre de Lie

nilpotente maximale de  $\mathfrak{g}$  associé à  $\Sigma^+$ ,  $\mathfrak{n}^-$  la sous-algèbre de Lie nilpotente maximale de  $\mathfrak{g}$  associé à  $-\Sigma^+$ ,  $\mathfrak{l}$  le centralisateur dans  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{a}$  de sorte que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$  et  $w_0$  l'élément de  $W$  qui envoie  $\Sigma^+$  sur  $-\Sigma^+$ .

On note  $P$  le réseau des poids de  $\Sigma$ ,  $P := \{\lambda \in \mathfrak{a} / \forall \alpha \in \Sigma \quad 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}\}$  et  $P_+ := \{\lambda \in P / \forall \alpha \in \Sigma^+ \quad \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0\}$  l'ensemble des poids dominants et  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  l'action de  $-w_0$  sur  $P_+$ .

### - Représentations irréductibles

Soit  $(\rho, V)$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$ . Les poids de l'action de  $\mathfrak{a}$  dans  $V$  sont appelés *les poids restreints de  $\rho$* . On munit  $P$  de l'ordre habituel :  $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu - \lambda \in \mathbb{N}\Sigma^+$ . L'ensemble des poids restreints de  $\rho$  admet un plus grand élément  $\chi$  appelé *le plus haut poids restreint de  $\rho$* . C'est un élément de  $P_+$  et l'espace de poids  $\chi$  n'est autre que l'espace  $V^{\mathfrak{n}}$  des vecteurs annulés par  $\mathfrak{n}$ . On dit que  $\rho$  est *proximale* si  $\dim V^{\mathfrak{n}} = 1$ . Le plus haut poids restreint définit alors une bijection de l'ensemble des représentations irréductibles proximales de  $\mathfrak{g}$  sur une partie  $P'_+$  de  $P_+$ . Il est montré dans [1] que cette partie n'est autre que l'intersection  $P_+ \cap P'$  où  $P'$  est le sous-réseau de  $P$  intersection de  $\mathfrak{a}^*$  avec l'ensemble des poids de l'algèbre de Lie complexifiée de  $\mathfrak{g}$ .

### - Groupes de Lie semisimples

Soit  $G$  un groupe de Lie semisimple linéaire connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On note  $A, N, N^-$  les sous-groupes connexes de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}^-$  et  $L$  le centralisateur de  $A$  dans  $G$ .

Soit  $(\rho, V)$  une représentation irréductible de  $G$ . On notera abusivement de la même manière la représentation de  $\mathfrak{g}$  différentielle de  $\rho$ . On sait que l'action de  $L$  sur  $V^{\mathfrak{n}}$  est irréductible. On note  $P''_+$  l'ensemble des plus hauts poids restreints des représentations irréductibles proximales de  $G$ . C'est l'intersection de  $P'_+$  avec un sous-réseau  $P''$  de  $P'$  (cela résultera par exemple du lemme 6.1). On a les inclusions  $2P_+ \subset P''_+ \subset P'_+ \subset P_+$  (cela résultera par exemple de la proposition 4.7).

Pour tout  $\chi$  dans  $P'_+$  (resp.  $P''_+$ ), on note  $(\rho^\chi, V^\chi)$  la représentation irréductible proximale de  $\mathfrak{g}$  (resp.  $G$ ) de plus haut poids restreint  $\chi$ . Le plus haut poids restreint de la représentation duale n'est autre que  $\chi^*$ . En particulier  $\rho^\chi$  est autoduale si et seulement si  $\chi = \chi^*$ .

### - Variété des drapeaux

On note  $X$  la "variété des drapeaux" de  $\mathfrak{g}$  : c'est l'ensemble des sous-algèbres paraboliques minimales de  $\mathfrak{g}$ . C'est un espace homogène sous  $G$  car toutes les sous-algèbres paraboliques minimales sont conjuguées sous  $G$  à la sous-algèbre  $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$  que nous noterons  $x_0$ .

Pour tout  $\chi$  dans  $P''_+$  et  $x$  dans  $X$ , on note  $\varphi^\chi(x)$  l'unique élément de  $\mathbb{Q}(V^\chi)$  stabilisé par  $x$ . Par exemple,  $\varphi^\chi(x_0)$  est le couple  $a_\chi := (x_\chi, y_{\chi^*})$  formé des droites de plus haut poids restreints de  $V^\chi$  et de son dual  $V^{\chi^*}$ . Cette application  $\varphi^\chi : X \rightarrow \mathbb{Q}(V^\chi)$  est  $G$ -équivariante.

D'après la décomposition de Bruhat, l'action diagonale de  $G$  sur  $X \times X$  a une orbite ouverte et dense. Une partie  $\Lambda$  de  $X$  est dite *transverse* si tout couple  $(x, y)$  de points

distincts de  $P$  est dans cette orbite ouverte. Ceci signifie que, pour tout  $\chi$  dans  $P_+''$ , son image  $\varphi^\chi(P)$  dans  $\mathbb{Q}(V^\chi)$  est transverse.

Les rappels ci-dessus se généralisent sans peine aux algèbres de Lie réductives  $\mathfrak{g}$ .

## 2.4 Proximalité sur l'espace projectif

Cette partie est constituée de rappels sans démonstration sur les actions proximales (cf [1], [3], [12], [14] et [15])

Notons  $GL(V)$  le groupe des endomorphismes inversibles de  $V$ . Les actions de  $GL(V)$  sur les espaces  $\mathbb{P}(V)$ ,  $\mathbb{P}(V^*)$ ,  $\mathbb{P}(\text{End}V)$ ,  $\mathbb{Q}(V)$  ... que nous considérerons sont celles induites par son action sur  $V$ .

Pour tout élément  $g$  de  $GL(V)$ , on note  $\lambda_1(g) \geq \dots \geq \lambda_m(g)$  la suite des modules des valeurs propres de  $g$  répétées avec multiplicité. On dit que  $g$  est *proximal* si  $\lambda_1(g) > \lambda_2(g)$ . On note alors  $x_g^+ \in \mathbb{P}(V)$  (resp.  $y_g^- \in \mathbb{P}(V^*)$ ) la droite propre de  $g$  (resp.  ${}^t g$ ) associée à la valeur propre de module  $\lambda_1(g)$ . Remarquons que le noyau de  $y_g^-$  est l'unique hyperplan  $g$ -invariant supplémentaire à  $x_g^+$ . On dit que  $g$  est *biproximal* si  $g$  et  $g^{-1}$  sont proximaux. On note alors  $y_g^+ := y_{g^{-1}}^-$ ,  $a_g^+ := (x_g^+, y_g^+)$  le point fixe attracteur de  $g$  dans  $\mathbb{Q}(V)$  et  $a_g^- = (x_g^-, y_g^-) := a_{g^{-1}}^+$  le point fixe répulseur.

Soit  $\Gamma$  un sous-semigroupe de  $GL(V)$ . On note  $\Gamma^-$  le semigroupe  $\Gamma^- := \{g^{-1} / g \in \Gamma\}$ . Un sous-semigroupe  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  est dit *d'indice fini* si il contient le noyau d'un morphisme de  $\Gamma$  dans un groupe fini. On dit que  $\Gamma$  est *fortement irréductible* si il n'existe pas de parties  $\Gamma$ -invariantes de  $V$  égales à une réunion finie de sous-espaces vectoriels autres que  $\{0\}$  et  $V$ . On dit que  $\Gamma$  est *proximal*<sup>1</sup> si il contient un élément proximal<sup>1</sup>.

**Remarque** Soit  $\Gamma$  un sous-semigroupe fortement irréductible de  $GL(V)$ . On note  $G$  l'adhérence de Zariski de  $\Gamma$  et  $\rho$  l'injection de  $G$  dans  $GL(V)$ . Alors le groupe de Lie  $G$  est réductif et la représentation  $\rho$  est irréductible. Mieux, la restriction de  $\rho$  à la composante connexe de  $G$  est encore irréductible.

Réciproquement, soit  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe,  $\Gamma$  un sous-semigroupe Zariski dense de  $G$  et  $(V, \rho)$  une représentation irréductible de  $G$ , alors  $\rho(\Gamma)$  est un sous-semigroupe fortement irréductible de  $GL(V)$ .

Autrement dit, ce sont là deux points de vue essentiellement équivalents. Le second point de vue permet l'utilisation des théorèmes de structure des groupes de Lie semisimples et de leurs représentations. C'est lui que nous adopterons.

Un élément  $g$  d'un groupe réductif  $G$  est dit *loxodromique* si  $g$  a un point fixe attracteur  $z_g^+$  dans  $X$ . Il a alors un point fixe répulseur  $z_g^- := z_{g^{-1}}^+$ . Lorsque  $G$  est connexe,  $g$  est

---

<sup>1</sup>Cette définition diffère légèrement de la *proximalité de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{P}(V)$*  définie dans [12] (et appelée proximalité dans [14]) : "pour tous  $x, x'$  dans  $\mathbb{P}(V)$ , on peut trouver  $g$  dans  $\Gamma$  tels que  $gx$  et  $gx'$  soient arbitrairement proches". On a l'équivalence :

$\Gamma$  irréductible et proximal sur  $\mathbb{P}(V) \Leftrightarrow \Gamma$  fortement irréductible et proximal.

loxodromique si et seulement si, pour toute représentation irréductible proximale  $(V, \rho)$  de  $G$ , l'élément  $\rho(g)$  est proximal. On a alors l'égalité, pour tout  $\chi$  dans  $P''_+$ ,  $\varphi^\chi(z_g^+) = a_{\rho^\chi(g)}^+$ .

**Définition 2.4** Une partie  $F$  de  $V$ ,  $\mathbb{P}(V)$ ,  $\mathbb{Q}(V)$ ,  $X \dots$  est dite  $\Gamma$ -invariante si on a  $\forall g \in \Gamma, gF \subset F$ . Lorsque  $\Gamma$  est un groupe, cette condition équivaut à  $\forall g \in \Gamma, gF = F$ .

On note par la même lettre  $d$  des distances sur  $\mathbb{P}(V)$ ,  $\mathbb{P}(V^*)$ ,  $\mathbb{Q}(V)$  et  $X$  que l'on déduit d'une structure euclidienne sur  $V$ .

**Lemme 2.5** Soit  $\Gamma$  un sous-semigroupe irréductible de  $GL(V)$  et  $G$  l'adhérence de Zariski de  $\Gamma$ .

1) On a les équivalences.

$\Gamma$  est proximal  $\iff G$  est proximal  $\iff \Gamma^-$  est proximal.

2) On suppose désormais  $\Gamma$  proximal. Alors

a) L'ensemble  $\Gamma_{prox}$  des éléments proximaux de  $\Gamma$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ .

b) Soit  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  l'adhérence de l'ensemble  $\{x_g^+ / g \in \Gamma_{prox}\}$ . Tout fermé  $\Gamma$ -invariant non vide de  $\mathbb{P}(V)$  contient  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$ . En particulier, l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  est minimale.

b') Soit  $\Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$  l'adhérence de l'ensemble  $\{y_g^- / g \in \Gamma_{prox}\}$ . Tout fermé  $\Gamma^-$ -invariant non vide de  $\mathbb{P}(V^*)$  contient  $\Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$ . En particulier, l'action de  $\Gamma^-$  sur  $\Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$  est minimale.

c) Pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $x^+$  dans  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  et  $y^-$  dans  $\Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$ , l'ensemble  $\{g \in \Gamma_{prox} / d(x_g^+, x^+) \leq \varepsilon, d(y_g^-, y^-) \leq \varepsilon\}$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ .

3) On suppose maintenant  $\Gamma$  proximal et fortement irréductible.

a) L'ensemble  $\Gamma_{bip}$  des éléments biproximaux de  $\Gamma$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ .

b) Soit  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  l'adhérence de l'ensemble  $\{a_g^+ / g \in \Gamma_{bip}\}$ . Tout fermé  $\Gamma$ -invariant non vide de  $\mathbb{Q}(V)$  contient  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$ . En particulier, l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  est minimale.

c) Pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $a^+$  dans  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  et  $a^-$  dans  $\Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{Q}}$ , l'ensemble  $\{g \in \Gamma_{bip} / d(a_g^+, a^+) \leq \varepsilon, d(a_g^-, a^-) \leq \varepsilon\}$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ .

d) L'ensemble  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  contient une partie dense et transverse.

**Remarque** Le dernier point de ce lemme affirme que l'ensemble  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  vérifie l'hypothèse des lemmes 2.1 et 2.3.

**Démonstration** Lorsque  $\Gamma$  est fortement irréductible, le lemme 2.5 résulte du lemme suivant si on remarque que l'inverse d'un élément loxodromique est encore loxodromique et qu'un élément loxodromique dans  $G$  est proximal.

On se ramène au cas fortement irréductible à l'aide du lemme 2.9 ci-dessous.  $\square$

**Lemme 2.6** Soit  $G$  un groupe de Lie linéaire réductif ayant un nombre fini de composantes connexes,  $X$  la variété des drapeaux de  $\mathfrak{g}$  et  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski dense de  $G$ .

a) L'ensemble  $\Gamma_{lox}$  des éléments de  $\Gamma$  loxodromiques dans  $G$  est Zariski dense dans  $G$ .

b) Soit  $\Lambda_\Gamma^X$  l'adhérence de l'ensemble  $\{z_g^+ / g \in \Gamma_{lox}\}$ . Tout fermé  $\Gamma$ -invariant non vide de  $X$  contient  $\Lambda_\Gamma^X$ . En particulier, l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma^X$  est minimale.

- c) Pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $z^+$ ,  $z^-$  dans  $\Lambda_\Gamma^X$ , l'ensemble  $\{g \in \Gamma_{lox} / d(z_g^+, z^+) \leq \varepsilon, d(z_g^-, z^-) \leq \varepsilon\}$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ .  
d) L'ensemble  $\Lambda_\Gamma^X$  contient une partie dense et transverse.

Les ensembles  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$ ,  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  et  $\Lambda_\Gamma^X$  sont les *ensembles limites* de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{P}(V)$ ,  $\mathbb{Q}(V)$  et  $X$ .

**Démonstration** Le point  $a$  est dans l'appendice de [5]. Les autres points résultent du lemme 3.6 de [3] (Les résultats de [5] et [3] sont démontrés sous une hypothèse de Zariski connexité qui est superflue, nous laissons les détails au lecteur).  $\square$

**Exemple** Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe et  $(\rho, V)$  une représentation réelle irréductible de  $G$ . Alors  $\rho(G)$  est proximal si et seulement si la représentation  $\rho$  est proximale. Dans ce cas, l'ensemble limite  $\Lambda_{\rho(G)}^{\mathbb{P}}$  est l'unique orbite fermée de  $G$  dans  $\mathbb{P}(V)$  : c'est l'orbite de la droite de plus haut poids.

Remarquons qu'un élément  $g$  de  $\text{GL}(V)$  est biproximal si et seulement si l'élément de  $\text{End}V$  défini par  $m \rightarrow gmg^{-1}$  est proximal. Cette remarque est le point de départ du lemme suivant.

**Lemme 2.7** Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-semigroupe fortement irréductible et proximal de  $\text{GL}(V)$ . On note  $W_\Gamma$  le sous-espace vectoriel de  $\text{End}V$  engendré par les droites de  $j_0(\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}})$  et  $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{GL}(W_\Gamma)$  le morphisme donné par  $\alpha(g)m = gmg^{-1}$ , pour tout  $g$  dans  $\Gamma$  et  $m$  dans  $W_\Gamma$ . Alors

- a) le sous-semigroupe  $\alpha(\Gamma)$  de  $\text{GL}(W_\Gamma)$  est fortement irréductible et proximal.  
b) On a les égalités  $j_0(\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}) = \Lambda_{\alpha(\Gamma)}^{\mathbb{P}}$  et  $j(\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}) = \Lambda_{\alpha(\Gamma)}^{\mathbb{Q}}$ .

**Démonstration** L'adhérence de Zariski  $G$  de  $\Gamma$  est un groupe algébrique réductif que l'on peut supposer Zariski connexe. Soient  $\chi$  (resp.  $\chi^*$ ) le plus haut poids restreint de  $G$  dans  $V$  (resp.  $V^*$ ) et  $x_\chi$  (resp.  $y_{\chi^*}$ ) la droite de plus haut poids. Alors  $\chi + \chi^*$  est le plus haut poids restreint de l'action de  $G$  dans  $\text{End}V$  et l'espace de poids correspondant est la droite  $x_\chi \otimes y_{\chi^*}$ . Comme les représentations de  $G$  sont semisimples, le  $G$ -module engendré par  $x_\chi \otimes y_{\chi^*}$  est irréductible et proximal. Ce module contient  $j_0(\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}})$  il est donc égal à  $W_\Gamma$ .

b) Ces égalités se déduisent des deux assertions suivantes. Pour tout  $g$  proximal dans  $\text{GL}(V)$ , on a  $j_0((x_g^+, y_g^+)) = x_g^+ \otimes y_g^+ = x_{\alpha(g)}^+$  et, pour tout  $g$  biproximal dans  $\text{GL}(V)$ , on a  $j((x_g^+, y_g^+)) = (x_{\alpha(g)}^+, y_{\alpha(g)}^+)$ .  $\square$

Les deux lemmes suivants clarifient les liens entre les propriétés de proximalité de  $\Gamma$  et celles de ses sous-semigroupes d'indice fini.

**Lemme 2.8** Soient  $V = \mathbb{R}^m$ ,  $\Gamma$  un sous-semigroupe fortement irréductible de  $\text{GL}(V)$  et  $\Gamma_1$  un sous-semigroupe d'indice fini de  $\Gamma$ . Alors

- a)  $\Gamma$  est proximal si et seulement si  $\Gamma_1$  est proximal. Dans ce cas,  
b) l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{P}(V)$  (resp.  $\mathbb{Q}(V)$ ,  $X$ ) est égal à celui de  $\Gamma_1$  et  
c) pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ , l'ensemble des éléments loxodromiques de  $g\Gamma_1$  est Zariski dense dans  $g\Gamma_1$ .

La démonstration du lemme 2.8 est laissée au lecteur. C'est une adaptation facile de celle du lemme 2.6.

**Lemme 2.9** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$ ,  $\Gamma$  un sous-semigroupe irréductible de  $GL(V)$ ,  $\Gamma_0$  la composante Zariski connexe de  $\Gamma$  et  $V_0$  un  $\Gamma_0$ -sous-module irréductible de  $V$ . Alors,  $\Gamma$  est proximal si et seulement si la restriction de  $\Gamma_0$  à  $V_0$  est proximale et  $V$  est un  $\Gamma_0$ -module sans multiplicité (i.e. le commutant  $\text{Hom}_{\Gamma_0}(V, V)$  est un anneau commutatif). Dans ce cas,  $V$  est somme directe de ses  $\Gamma_0$ -sous-modules irréductibles  $V_i$  et l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{P}(V)$  est égal à la réunion des ensembles limites de  $\Gamma_0$  dans les  $\mathbb{P}(V_i)$ .*

Le lemme 2.9 ne jouera qu'un rôle annexe dans la suite pour étendre à des sous-groupes irréductibles des énoncés que nous démontrerons pour des sous-groupes fortement irréductibles. C'est pourquoi nous laissons encore sa démonstration au lecteur.

### 3 Cônes convexes invariants

Le but de ce chapitre est de démontrer les propositions 1.1, 1.2 et le théorème 1.3 de l'introduction.

#### 3.1 Convexes invariants et positivité de l'ensemble limite

On commence par relier, pour un sous-groupe irréductible de  $GL(m, \mathbb{R})$  l'existence d'un convexe invariant à la positivité de son ensemble limite: c'est la proposition 3.1 qui précise la proposition 1.2 de l'introduction.

Un cône convexe  $C$  de  $V$  est dit *saillant* si son adhérence ne contient pas de droites. Il est dit *strictement convexe* si les seuls segments inclus dans le bord de  $C$  sont les segments radiaux. Une partie  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(V)$  est dite *convexe* (resp. *convexe saillante*, *strictement convexe*) si c'est l'image d'un cône convexe  $C$  (resp. convexe saillant, strictement convexe) de  $V$ . On note  $C^\perp := \{f \in V^* / f(v) \geq 0 \ \forall v \in C\}$  le cône convexe de  $V^*$  dual de  $C$  et  $\Omega^\perp$  le convexe de  $\mathbb{P}(V^*)$  dual de  $\Omega$ : c'est l'image dans  $\mathbb{P}(V)$  de  $C^\perp$ .

On suppose implicitement dans tout cet article que les cônes convexes saillants contiennent un vecteur non nul et que les convexes saillants sont non vides.

**Proposition 3.1** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-semigroupe irréductible de  $GL(V)$ .*

- 1) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
  - (i) *Il existe un convexe saillant  $\Gamma$ -invariant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(V)$ .*
  - (ii)  *$\Gamma$  est proximal et le produit des ensembles limites  $\Lambda_\Gamma^\mathbb{P} \times \Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}^*}$  est une partie positive de  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ .*
- 2) *Dans ce cas, il existe un plus petit convexe saillant  $\Gamma$ -invariant  $\Omega_{\min}$  de  $\mathbb{P}(V)$  ainsi qu'un plus grand  $\Omega_{\max}$ .*
- 3) *Si  $\Gamma$  est un groupe et est fortement irréductible, l'assertion (i) équivaut à*
  - (iii)  *$\Gamma$  est proximal et l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^\mathbb{Q}$  est une partie positive de  $\mathbb{Q}(V)$ .*

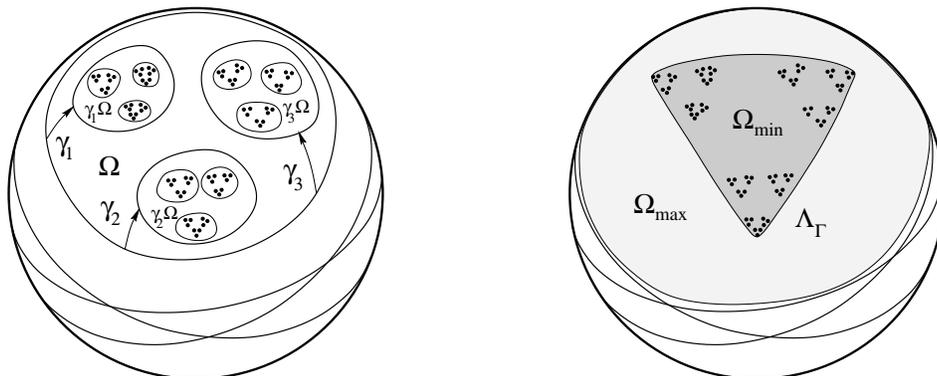


Figure 4: La dynamique de  $\Gamma$  lorsque  $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \bar{\Omega} \subset \overset{\circ}{\Omega}$

Voici deux situations décrites par cette proposition:

**1<sup>er</sup> cas:**  $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \bar{\Omega} \subset \overset{\circ}{\Omega}$ .

Dans ce cas, les éléments de  $\Gamma$  sont des contractions pour la distance de Hilbert sur  $\overset{\circ}{\Omega}$  et l'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{P}}$  est inclus dans l'intérieur  $\overset{\circ}{\Omega}$ .

**2<sup>ème</sup> cas:**  $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \Omega = \Omega$ .

Dans ce cas, les éléments de  $\Gamma$  sont des isométries pour la distance de Hilbert sur  $\overset{\circ}{\Omega}$  et l'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{P}}$  est inclus dans le bord  $\partial \Omega$ .

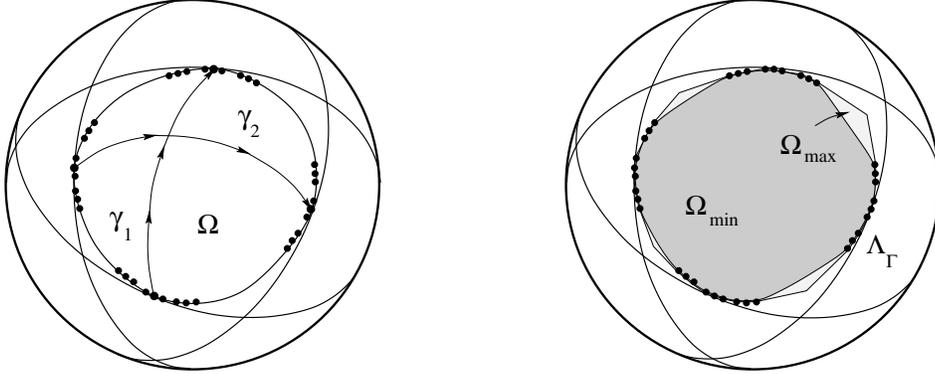


Figure 5: La dynamique de  $\Gamma$  lorsque  $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \Omega = \Omega$

**Remarque** Comme  $\Gamma$  est irréductible, tout convexe  $\Gamma$ -invariant de  $\mathbb{P}(V)$  autre que  $\emptyset$  et  $\mathbb{P}(V)$  est saillant et d'intérieur non vide.

Nous ne démontrerons la proposition 3.1 que pour  $\Gamma$  fortement irréductible, car c'est sous cette hypothèse que nous l'utiliserons. Le cas général peut s'en déduire à l'aide des lemmes 2.9 et 3.3.

**Démonstration** 1) (i)  $\implies$  (ii) Montrons tout d'abord que  $\Gamma$  est proximal. Comme  $\Gamma$  est fortement irréductible, la composante connexe  $G$  de l'adhérence de Zariski de  $\Gamma$  est un groupe de Lie réductif et l'inclusion  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une représentation irréductible. On peut supposer que  $\Gamma$  est inclus dans  $G$  et que  $\Gamma$  contient les matrices scalaires. Comme  $G$  est réductif, on peut introduire les mêmes notations  $A, \mathfrak{a}, \Sigma^+, \mathfrak{a}^+, L, N \dots$  que dans la partie 2.3. Notons  $M$  le sous-groupe compact maximal de  $L$  de sorte que  $L = MA$  et notons  $\chi$  le plus haut poids restreint de  $V$ . Comme  $V$  est irréductible, le sous-espace  $V_\chi$  de  $V$  de poids  $\chi$  est une représentation irréductible de  $L$ . On doit montrer que  $V_\chi$  est de dimension 1.

Notons  $\pi$  la projection sur  $V_\chi$  parallèlement aux autres espaces de poids. Soit  $g$  un élément de  $\Gamma$  loxodromique dans  $G$ . On peut supposer que  $g$  est dans  $M \exp(\mathfrak{a}^+)$  de sorte qu'il existe une suite  $n_k$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\|g\|^{-1} g)^{n_k} = \pi$ . Introduisons le convexe fermé

saillant  $\Omega_\chi := \overline{\Omega} \cap \mathbb{P}(V_\chi)$ . Ce convexe est non vide car si  $x$  est un élément de  $\Omega$  qui n'est pas dans le noyau de  $\pi$ , la limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{n_k} x$  est dans  $\Omega_\chi$ .

Notons  $\overline{\Gamma}$  et  $\overline{G}$  les adhérences de  $\Gamma$  et  $G$  dans  $\text{End}(V)$ . L'élément  $\pi$  est donc dans  $\overline{\Gamma}$ . Introduisons les sous-semigroupes de  $\text{GL}(V_\chi)$  :  $H = \pi \overline{G} \pi \cap \text{GL}(V_\chi)$  et  $\Delta = H \cap \overline{\Gamma}$ . On vérifie aisément les trois assertions suivantes :

- *Le convexe saillant  $\Omega_\chi$  de  $\mathbb{P}(V_\chi)$  est  $\Delta$ -invariant.*
- *$\Delta$  est un sous-semigroupe Zariski dense de  $H$  qui contient les homothéties.*
- *Le semigroupe  $H$  est égal au groupe  $\pi L \pi$  qui est compact modulo les homothéties.*

[La première résulte de la  $\Gamma$ -invariance de  $\Omega$ , la deuxième de la Zariski densité de  $\Gamma$  dans  $G$  et du fait que  $\Gamma$  contient les homothéties. Pour montrer la dernière, on utilise la densité du produit  $N^- L N$  dans  $G$ .]

On en déduit que  $\Delta$  est dense dans  $H$  et donc que le convexe saillant  $\Omega_\chi$  est  $L$ -invariant. Pour tout vecteur  $v$  de  $V_\chi$  qui engendre une droite de  $\Omega_\chi$ , la moyenne  $\int_M m.v \, dm$  est alors un vecteur  $M$ -invariant et non nul. Comme l'action du groupe compact  $M$  sur  $V_\chi$  est irréductible, on en déduit l'égalité  $\dim(V_\chi) = 1$ .

Montrons maintenant que le produit  $\Lambda := \Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}} \times \Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$  est positif. L'argument précédent prouve que le point fixe attracteur  $x_g^+$  de tout élément proximal de  $\Gamma$  est dans  $\overline{\Omega}$ . Donc, l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  est inclus dans  $\overline{\Omega}$ . Remarquons que le convexe  $\Omega^\perp$  dual de  $\Omega$  est  $\Gamma^-$ -invariant ; en effet, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ , on a  ${}^t g(\Omega^\perp) \subset \Omega^\perp$ . Le même raisonnement que ci-dessus prouve alors que l'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$  est inclus dans  $\Omega^\perp$ . Donc  $\Lambda$  est positif.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Par hypothèse, il existe une partie  $F_\Gamma$  de  $V$  dont l'image dans  $\mathbb{P}(V)$  est  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  et une partie  $F_{\Gamma^-}^*$  de  $V^*$  dont l'image dans  $\mathbb{P}(V^*)$  est  $\Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$  tels que, pour tous  $v$  dans  $F_\Gamma$  et  $f$  dans  $F_{\Gamma^-}^*$ , on a  $f(v) \geq 0$ . Notons  $C_\Gamma$  le cône convexe fermé de  $V$  engendré par  $F_\Gamma$  et  $C_{\Gamma^-}^*$  le cône convexe fermé de  $V^*$  engendré par  $F_{\Gamma^-}^*$ . Pour tous  $v$  dans  $C_\Gamma$  et  $f$  dans  $C_{\Gamma^-}^*$ , on a encore  $f(v) \geq 0$ . L'image  $\Omega_\Gamma$  de  $C_\Gamma$  dans  $\mathbb{P}(V)$  et l'image  $\Omega_{\Gamma^-}^*$  de  $C_{\Gamma^-}^*$  dans  $\mathbb{P}(V^*)$  ne dépendent pas des choix faits. Le convexe fermé  $\Omega_\Gamma$  est saillant non vide et  $\Gamma$ -invariant.

2) D'après le raisonnement précédent,  $\Omega_\Gamma$  est le plus petit convexe fermé saillant non vide et  $\Gamma$ -invariant de  $\mathbb{P}(V)$ . Il suffit de prendre pour  $\Omega_{\min}$  l'intérieur de  $\Omega_\Gamma$  et pour  $\Omega_{\max}$  le convexe de  $\mathbb{P}(V)$  dual de  $\Omega_{\Gamma^-}^*$ .

3) Lorsque  $\Gamma$  est un groupe, on a l'égalité  $\Gamma = \Gamma^-$ . Comme  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  est inclus dans le produit  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}} \times \Lambda_{\Gamma^-}^{\mathbb{P}^*}$  et que la projection de  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  sur chacun des deux facteurs est surjective, notre équivalence s'en déduit.  $\square$

**Corollaire 3.2** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$ ,  $\Gamma$  un sous-semigroupe fortement irréductible de  $\text{GL}(V)$  et  $\Gamma_0$  un sous-semigroupe d'indice fini de  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma$  préserve un convexe saillant de  $\mathbb{P}(V)$  si et seulement si  $\Gamma_0$  en préserve un.*

**Remarque** Rappelons que notre but est d'étudier les sous-groupes fortement irréductibles de  $\text{GL}(m, \mathbb{R})$  qui préservent un cône convexe saillant. Il n'est pas restrictif de supposer que les éléments de  $\Gamma$  sont de déterminant 1. Il résulte alors de la proposition 3.1 que l'adhérence de Zariski de  $\Gamma$  est un groupe de Lie semisimple.

Nous n'avons démontré la proposition 3.1 que lorsque  $\Gamma$  est fortement irréductible. Enonçons maintenant sans démonstration un lemme qui, avec le lemme 2.9, permet d'en déduire le cas général.

**Lemme 3.3** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$ ,  $\Gamma$  un sous-semigroupe irréductible de  $\mathrm{GL}(V)$ ,  $\Gamma_0$  la composante Zariski connexe de  $\Gamma$  et  $V_0$  un  $\Gamma_0$ -sous-module irréductible de  $V$ . Alors,  $\Gamma$  préserve un convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(V)$  si et seulement si  $\Gamma_0$  préserve un convexe saillant  $\Omega_0$  de  $\mathbb{P}(V_0)$  et  $V$  est un  $\Gamma_0$ -module sans multiplicité. Dans ce cas, on peut prendre  $\Omega_0 = \overline{\Omega} \cap \mathbb{P}(V_0)$ .*

### 3.2 Positivité de l'ensemble limite et formes bilinéaires

Le lemme suivant explique pourquoi les représentations symplectiques et orthogonales joueront un rôle dans le théorème 1.5.

**Lemme 3.4** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-groupe fortement irréductible de  $\mathrm{GL}(V)$  qui est proximal. On suppose que  $\Gamma$  préserve une forme bilinéaire non dégénérée  $b$  sur  $V$ .*

- a) *Si  $b$  est antisymétrique,  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  est négatif 3 à 3.*
- b) *Si  $b$  est symétrique,  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{Q}}$  est positif 3 à 3.*

**Démonstration** Soit  $H := \{g \in \mathrm{GL}(V) / \forall v, w \in V \ b(gv, gw) = b(v, w)\}$  le groupe symplectique ou le groupe orthogonal. On peut supposer que  $\Gamma = H$  et que  $H$  est non compact. L'ensemble limite  $\Lambda_H^{\mathbb{Q}}$  n'est autre que l'orbite fermée de  $H$  dans  $\mathbb{Q}(V)$ . Notre assertion résulte donc des exemples du §2.1.  $\square$

**Corollaire 3.5** *Un sous-groupe fortement irréductible de  $\mathrm{GL}(V)$  qui préserve une forme bilinéaire symplectique sur  $V$  ne peut pas préserver un convexe saillant de  $\mathbb{P}(V)$ .*

**Démonstration** Cela résulte du théorème 3.1 et du lemme 3.4.  $\square$

### 3.3 Quotients compacts des cônes strictement convexes

Le but de cette partie est de montrer le théorème 1.3 de l'introduction.

Rappelons que tout sous-groupe fermé  $\Gamma$  de  $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$  qui préserve un cône ouvert convexe saillant  $C$  de  $\mathbb{R}^m$  agit proprement sur  $C$ , autrement dit, pour tout compact  $K$  de  $C$ , l'ensemble  $\{g \in \Gamma / gK \cap K \neq \emptyset\}$  est fermé. Cela résulte de l'existence sur  $C$  d'une distance complète  $\Gamma$ -invariante: la distance de Hilbert. On dit que  $\Gamma$  divise  $C$  si le quotient  $\Gamma \backslash C$  est compact.

De la même façon, tout sous-groupe fermé  $\Gamma$  de  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$  qui préserve un ouvert convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  agit proprement sur  $\Omega$ . On dit que  $\Gamma$  divise  $\Omega$  si le quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  est compact.

Voici une reformulation du théorème 1.3 de l'introduction. On appelle *ellipsoïde* une partie de l'espace projectif  $\mathbb{P}(V)$  image d'un cône de futur d'une forme quadratique lorentzienne sur  $V$ .

**Théorème 3.6** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $SL(m, \mathbb{R})$  qui divise un ouvert strictement convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Si  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde, alors  $\Gamma$  est Zariski dense dans  $SL(m, \mathbb{R})$ .*

**Démonstration du théorème 1.3**

C'est une conséquence du théorème 3.6 ci-dessus et du point *b* du lemme suivant □

**Lemme 3.7** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $GL(m, \mathbb{R})$  qui divise un cône ouvert strictement convexe saillant  $C$  de  $\mathbb{R}^m$ . Alors*

- a)  $\Gamma$  est un sous-groupe fortement irréductible de  $GL(m, \mathbb{R})$ .
- b)  $\Gamma$  contient une homothétie positive non triviale.

**Démonstration** a) On peut supposer  $\Gamma$  Zariski connexe. Le théorème de Vey (cf. [25]) affirme que lorsqu'un groupe linéaire discret  $\Gamma$  divise un cône ouvert convexe saillant  $C$ , l'espace vectoriel  $V$  est une somme directe de sous espace irréductibles  $V_i$  et le cône  $C$  est un produit de cônes ouverts convexes  $C_i$  de ces espaces  $V_i$ . Comme  $C$  est strictement convexe,  $V$  est donc irréductible.

b) Soit  $H$  le groupe des homothéties positives de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\Delta$  l'adhérence dans  $GL(m, \mathbb{R})$  du groupe  $H\Gamma$  et  $\Delta_0$  la composante connexe de  $\Delta$ .

Montrons que le groupe  $\Delta_0$  commute à  $\Gamma$ . Pour cela introduisons le groupe  $[\Gamma, \Delta_0]$  engendré par les commutateurs  $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$  avec  $\gamma \in \Gamma$  et  $\delta \in \Delta_0$ . D'une part, ce groupe  $[\Gamma, \Delta_0]$  est connexe, d'autre part, on a les inclusions  $[\Gamma, \Delta_0] \subset \overline{[\Gamma, H\Gamma]} \subset \overline{[\Gamma, \Gamma]} \subset \Gamma$ . Il est donc discret et on a  $[\Gamma, \Delta_0] = \{1\}$ .

Comme le commutant d'une représentation irréductible proximale est réduit aux scalaires, on a l'égalité  $\Delta_0 = H$ . Ceci prouve que le groupe  $H\Gamma$  est fermé. Comme ce groupe  $H\Gamma$  agit proprement sur  $C$  et que le quotient  $\Gamma \backslash C$  est compact, le groupe  $H/(H \cap \Gamma)$  est compact. C'est ce que l'on voulait. □

Pour démontrer le théorème 3.6, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.8** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $SL(m, \mathbb{R})$  qui divise un ouvert strictement convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Alors l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  est égal au bord  $\partial\Omega$  du convexe.*

**Démonstration** Remarquons que, par le lemme 3.7 et la proposition 3.1, le groupe  $\Gamma$  est fortement irréductible et proximal. Donc l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  est bien défini. Comme  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  est le plus petit fermé  $\Gamma$  invariant de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ , on a l'inclusion  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}} \subset \partial\Omega$ . Si on n'avait pas égalité, comme  $\Omega$  est strictement convexe, l'ouvert  $\Omega_{min}$  de la proposition 3.1 qui est égal à l'intérieur de l'enveloppe convexe de  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$  dans  $\overline{\Omega}$  ne serait pas égal à  $\Omega$ . Ceci contredirait l'assertion suivante due à Vey (cf. [25]) : *lorsqu'un groupe linéaire discret  $\Gamma$  divise un ouvert convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ , l'enveloppe convexe de l'orbite  $\Gamma x$  de chaque point de  $\Omega$  est égale à  $\Omega$ .* □

**Démonstration du théorème 3.6**

Soit  $G$  la composante connexe de l'adhérence de Zariski de  $\Gamma$ . On vient de voir que  $G$  est

un groupe de Lie semisimple et que la représentation de  $G$  dans  $V = \mathbb{R}^m$  est irréductible et proximale. L'ensemble limite  $\Lambda_G^{\mathbb{P}}$  est l'orbite sous  $G$  de la droite de plus haut poids  $x_\chi$ . D'après le lemme 3.8 ci-dessus, cette orbite contient le bord  $\partial\Omega$  de notre convexe. Il y a deux cas:  $Gx_\chi = \partial\Omega$  ou  $Gx_\chi = \mathbb{P}(V)$ .

**1<sup>er</sup> cas:**  $\partial\Omega$  est  $G$ -homogène.

Un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$  agit encore transitivement sur la  $G$ -orbite de la droite de plus haut poids. Donc  $\partial\Omega$  est encore homogène sous  $K$ . Choisissons un des deux cônes convexes saillants  $C$  au-dessus de  $\Omega$ . Ce cône  $C$  est  $K$ -invariant et on construit, en prenant le centre de gravité d'une  $K$ -orbite dans  $C$ , un vecteur  $v_0$  non nul et  $K$ -invariant de  $C$ . Le même raisonnement appliqué au cône dual permet de construire un hyperplan  $K$ -invariant  $W$  de  $V$  tel que  $W \cap \overline{C} = \{0\}$ . Le convexe  $\overline{\Omega}$  s'identifie alors naturellement avec l'intersection  $(v_0 + W) \cap \overline{C}$ . Comme les orbites de  $K$  dans  $W$  sont incluses dans des sphères euclidiennes, le bord  $\partial\Omega$  s'identifie à une sphère euclidienne de  $v_0 + W$  et  $\Omega$  est un ellipsoïde. Ce cas est exclu par hypothèse.

**2<sup>ème</sup> cas:**  $\mathbb{P}(V)$  est  $G$ -homogène.

Comme  $\Gamma$  ne préserve pas de formes symplectiques sur  $V$  (corollaire 3.5), il résulte du lemme 3.9 ci-dessous que  $\Gamma$  est Zariski dense dans  $\mathrm{SL}(V)$ .  $\square$

**Lemme 3.9** *Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe et  $(\rho, V)$  une représentation fidèle irréductible et proximale de  $G$ . Alors  $G$  agit transitivement sur  $\mathbb{P}(V)$  si et seulement si on est dans un des deux cas suivants :*

- $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$  et  $V = \mathbb{R}^m$ , avec  $m \geq 2$ .
- $G = \mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$  et  $V = \mathbb{R}^{2d}$ , avec  $d \geq 2$ .

**Démonstration** Soit  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  l'algèbre de Lie complexifiée de  $G$  et  $(\rho, V_{\mathbb{C}})$  la représentation de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  dans l'espace vectoriel complexifié. Cette représentation est encore irréductible et fidèle.

Notons  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ,  $\Delta^+ \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$  un système de racines positives,  $\mathfrak{u}^+ \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  la sous-algèbre nilpotente maximale correspondante,  $\chi \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$  le plus haut poids de  $V_{\mathbb{C}}$  et  $-\chi^*$  son plus bas poids. Comme  $\rho$  est proximale, on peut choisir les vecteurs de plus haut poids  $v_\chi$  et de plus bas poids  $v_{-\chi^*}$  dans  $V$ . Comme  $G$  agit transitivement sur  $\mathbb{P}(V)$ , on a l'égalité  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}v_{-\chi^*} = V_{\mathbb{C}}$ . On en déduit que  $v_\chi$  est dans  $\mathfrak{u}^+v_{-\chi^*}$  et donc que  $\chi + \chi^*$  est une racine positive. Comme la représentation  $\rho$  de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  est fidèle, ceci implique que  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  est simple.

Or, il est très rare qu'une racine soit somme de deux poids fondamentaux ou plus. D'après [6], p.250-275, cela ne peut se produire que pour la plus grande racine et dans l'un des deux cas suivants (pour les autres algèbres de Lie simples complexes, la plus grande racine est un poids fondamental) :

- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$  et  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^m$ , avec  $m \geq 2$
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(d, \mathbb{C})$  et  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{2d}$ , avec  $d \geq 2$ .

Dans le premier cas,  $\rho(G)$  est un sous-groupe de  $\mathrm{SL}(V)$  de même dimension donc  $G = \mathrm{SL}(V)$ . Dans le deuxième cas  $\rho(G)$  est un sous-groupe irréductible de  $\mathrm{SL}(V)$  qui préserve une forme symplectique sur  $V_{\mathbb{C}}$ . La partie réelle ou imaginaire  $\omega$  de cette forme symplectique restreinte à  $V$  est non nulle. Elle est alors non dégénérée et  $\rho(G)$  est un sous-groupe de  $\mathrm{Sp}(V, \omega)$  de même dimension donc  $G = \mathrm{Sp}(V, \omega)$ .  $\square$

### 3.4 Convexes invariants et signe des valeurs propres

Lorsque  $\Gamma$  est un sous-groupe irréductible de  $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ , nous allons maintenant relier l'existence d'un convexe  $\Gamma$ -invariant aux signes des valeurs propres des éléments de  $\Gamma$ . C'est la proposition 3.11 qui précise la proposition 1.1 de l'introduction.

Un élément  $g$  de  $\mathrm{GL}(V)$  est dit *positivement proximal* si il est proximal et si  $\lambda_1(g)$  est une valeur propre de  $g$ . Remarquons que, lorsque  $g$  est proximal, un et un seul des deux éléments  $g$  ou  $-g$  est positivement proximal. On note  $s_g \in \{-1, 1\}$  ce signe.

**Définition 3.10** *Un sous-semigroupe  $\Gamma$  de  $\mathrm{GL}(V)$  est dit positivement proximal si il est proximal et si tout élément proximal de  $\Gamma$  est positivement proximal.*

**Proposition 3.11** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-semigroupe irréductible de  $\mathrm{GL}(V)$ . Alors  $\Gamma$  préserve un cône convexe saillant de  $V$ , si et seulement si  $\Gamma$  est positivement proximal.*

**Remarque** Comme  $\Gamma$  est irréductible, tout cône convexe  $\Gamma$ -invariant de  $V$  autre que  $\emptyset$ ,  $\{0\}$  et  $V$  est saillant et d'intérieur non vide.

Comme pour la proposition 3.1, nous ne démontrerons cette proposition que lorsque  $\Gamma$  est fortement irréductible, car c'est sous cette hypothèse que nous l'utiliserons. Le cas général s'en déduisant à l'aide des lemmes 2.9 et 3.3.

Le lemme suivant relie cette proposition à la proposition 3.1.

**Lemme 3.12** *Soient  $\Gamma$  un sous-semigroupe de  $\mathrm{GL}(V)$ . Alors  $\Gamma$  préserve un convexe saillant de  $\mathbb{P}(V)$  si et seulement si il existe un morphisme de semigroupes  $s : \Gamma \rightarrow \{\pm 1\}$  tel que le semigroupe  $\Gamma^s := \{s(g)g / g \in \Gamma\}$  préserve un cône convexe saillant de  $V$ .*

En outre, pour tout  $g$  proximal dans  $\Gamma$ , on a l'égalité  $s(g) = s_g$ .

**Démonstration du lemme** C'est clair.  $\square$

**Remarques** Le noyau  $\Gamma_s$  du morphisme  $s$  n'est pas toujours Zariski dense dans  $\Gamma$ . En voici un exemple : prendre pour  $\Gamma_s$  un sous-groupe Zariski dense de  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$  qui préserve un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^3$  et pour  $\Gamma$  le produit  $\{\pm Id\} \times \Gamma_0$ .

Cependant, si  $\Gamma$  est Zariski connexe,  $\Gamma_0$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ .

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.13** Soit  $E$  une partie finie de  $GL(V)$  formée d'éléments positivement proximaux. On suppose que la partie  $\Lambda_E := \{(x_g^+, y_g^-) / g \in E\}$  de  $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$  est transverse. Pour  $n \geq 1$ , on note  $\Gamma_n^+$  le sous-semigroupe de  $GL(V)$  engendré par  $\{g^n / g \in E\}$ . Alors, on peut trouver  $n_0 \geq 1$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

- a)  $\Gamma_n^+ - \{e\}$  est formé d'éléments proximaux.
- b)  $\Gamma_n^+$  est positivement proximal si et seulement si  $\Lambda_E$  est positive.

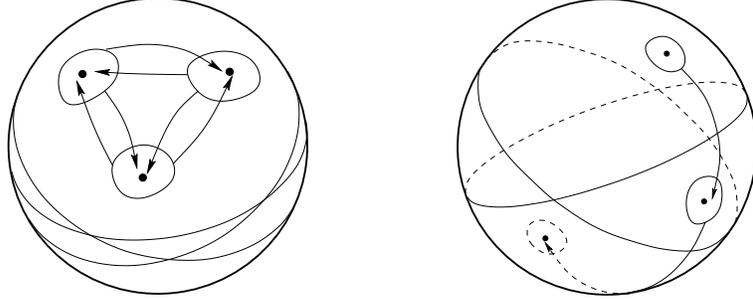


Figure 6: Le ping-pong pour  $\Lambda_E$  positif et  $\Lambda_E$  non positif

**Démonstration** Pour tout élément proximal  $g$  de  $GL(V)$  et  $\varepsilon > 0$ , on note  $Y_g^-$  l'hyperplan de  $\mathbb{P}(V)$  noyau de  $y_g^-$ ,  $b_g^\varepsilon := \{x \in \mathbb{P}(V) / d(x, x_g^+) \leq \varepsilon\}$ ,  $B_g^\varepsilon := \{x \in \mathbb{P}(V) / d(x, Y_g^-) \geq \varepsilon\}$ . L'élément  $g$  est dit  $\varepsilon$ -proximal si  $d(x_g^+, Y_g^-) \geq 2\varepsilon$ ,  $g(B_g^\varepsilon) \subset b_g^\varepsilon$  et si la restriction de  $g$  à  $B_g^\varepsilon$  est  $\varepsilon$ -Lipschitzienne. On peut fixer  $\varepsilon \geq 0$  tel que, pour tous  $g, h$  dans  $E$ , on a  $d(x_g^+, Y_h^-) \geq 6\varepsilon$ . Pour  $n$  suffisamment grand et  $g$  dans  $E$ , les éléments  $g^n$  sont alors  $\varepsilon$ -proximaux. On peut donc supposer, pour alléger les notations, que les éléments  $g$  de  $E$  sont  $\varepsilon$ -proximaux, mais il faut alors démontrer nos assertions avec  $n_0 = 1$ .

a) Soit  $w = h_l \cdots h_1$  un mot avec  $h_k$  dans  $E$ . On a  $w(b_{h_l}^\varepsilon) \subset w(B_{h_l}^\varepsilon) \subset b_{h_l}^\varepsilon$  et la restriction de  $w$  à  $b_{h_l}^\varepsilon$  est  $\varepsilon$ -Lipschitzienne. On en déduit que  $w$  a un point fixe attracteur dans  $b_{h_l}^\varepsilon$  et donc est proximal.

b) Pour tout  $g$  dans  $E$ , on choisit des vecteurs non nuls  $v_g^+$  dans  $x_g^+$  et  $f_g^-$  dans  $y_g^-$  tels que  $f_g^-(v_g^+) > 0$ . On note  $\tilde{b}_g^\varepsilon$  (resp.  $\tilde{B}_g^\varepsilon$ ) le fermé conique et connexe de  $V - \{0\}$  qui contient le vecteur  $v_g^+$  et dont l'image dans  $\mathbb{P}(V)$  est  $b_g^\varepsilon$  (resp.  $B_g^\varepsilon$ ). Pour  $g, h$  dans  $E$ , on note  $\eta_{gh} \in \{-1, 1\}$  le signe de  $f_g^-(v_h^+)$  de sorte que  $\tilde{b}_h^\varepsilon \subset \eta_{gh} \tilde{B}_g^\varepsilon$ .

Soit  $w = h_l \cdots h_1$  un mot avec  $h_k$  dans  $E$ . On note  $\eta_w$  le signe  $\eta_w := \eta_{h_l h_{l-1}} \cdots \eta_{h_2 h_1} \eta_{h_1 h_l}$  de sorte que  $w(\tilde{b}_{h_l}^\varepsilon) \subset \eta_w \tilde{b}_{h_l}^\varepsilon$ . Autrement dit,  $\eta_w w$  est positivement proximal. À l'aide du lemme 2.1, on en déduit les équivalences :

$\Lambda_E$  est positive  $\Leftrightarrow \forall w \in \Gamma^+, \eta_w = 1 \Leftrightarrow \Gamma^+$  est positivement proximal.  $\square$

### Démonstration de la proposition 3.11

Supposons que  $\Gamma$  préserve un cône convexe saillant  $C$  de  $V$ . La proposition 3.1 prouve que  $\Gamma$  est proximal. Or tout élément proximal de  $GL(V)$  qui préserve un tel cône est positivement proximal. Donc  $\Gamma$  est positivement proximal.

Réciproquement, supposons que  $\Gamma$  est positivement proximal. Soit  $\Lambda := \Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}} \times \Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}^*}$ . D'après le lemme 2.5, la partie  $\Lambda'' := \{(x_g^+, y_g^-) / g \in \Gamma\}$  est dense dans  $\Lambda$  et on peut

trouver une partie  $\Lambda'$  de  $\Lambda''$  dense dans  $\Lambda$  et transverse. Comme  $\Gamma$  est positivement proximal, le lemme 3.13 prouve que toute partie finie de  $\Lambda'$  est positive. Donc, par le lemme 2.1,  $\Lambda$  est positif. La proposition 3.1 prouve que  $\Gamma$  préserve un convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(V)$ . Notons  $C$  l'un des deux cônes convexes de  $V$  dont l'image dans  $\mathbb{P}(V)$  est  $\Omega$ . Le sous-semigroupe  $\Gamma_0 := \{g \in \Gamma / g(C) \subset C\}$  est encore fortement irréductible et proximal. On veut montrer que  $\Gamma = \Gamma_0$ . Si ce n'est pas le cas, d'après le lemme 2.8, il existe un élément  $g_1$  de  $\Gamma - \Gamma_0$  proximal. Un tel élément n'est pas positivement proximal. Contradiction.  $\square$

**Corollaire 3.14** *Soit  $\Gamma$  un sous-semigroupe fortement irréductible de  $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ . Alors  $\Gamma$  est positivement proximal si et seulement si, tout élément loxodromique de  $\Gamma$  est positivement proximal.*

**Démonstration** On peut choisir dans la démonstration précédente l'élément  $g_1$  loxodromique.  $\square$

### 3.5 L'ensemble limite sur la sphère

Nous donnons dans cette partie une interprétation de la condition “positivement proximal” à l'aide de l'ensemble limite de  $\Gamma$  sur la sphère, interprétation qui mérite d'être signalée même si nous ne l'utiliserons pas par la suite.

Soient  $\mathbb{S}(V) := \{\text{demidroites de } V\}$  la sphère de  $V$  et  $p := \mathbb{S}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$  le revêtement à deux feuillets.

**Proposition 3.15** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-semigroupe fortement irréductible et proximal de  $\mathrm{GL}(V)$ . Notons  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}} := p^{-1}(\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}})$ .*

a) *Si  $\Gamma$  est positivement proximal, il existe une unique décomposition  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}} = F \cup -F$  où  $F$  est un fermé  $\Gamma$ -invariant tel que  $F \cap -F = \emptyset$ . Tout fermé  $\Gamma$ -invariant de  $\mathbb{S}(V)$  contient  $F$  ou  $-F$ . En particulier, l'action de  $\Gamma$  sur  $F$  est minimale.*

b) *Si  $\Gamma$  n'est pas positivement proximal, tout fermé  $\Gamma$ -invariant de  $\mathbb{S}(V)$  contient  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}}$ . En particulier, l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}}$  est minimale.*

**Démonstration** Cela résulte du lemme 2.5.

a) Soit  $C$  un cône convexe fermé saillant  $\Gamma$ -invariant de  $V$ . On prend  $F := \Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}} \cap C$ . La minimalité de l'action de  $\Gamma$  sur  $F$  résulte de celle sur  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{P}}$ . Les autres assertions s'en déduisent.

b) Supposons, par l'absurde, qu'il existe un fermé  $\Gamma$ -invariant  $F$  de  $\mathbb{S}(V)$  qui ne contient pas  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}}$ . On peut, quitte à réduire  $F$ , supposer que  $F$  est inclus dans  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}}$  et que l'action de  $\Gamma$  sur  $F$  est minimale. On a alors  $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{S}} = F \cup -F$  car l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{P}(V)$  est minimale. On a aussi  $F \cap -F = \emptyset$  car l'action de  $\Gamma$  sur  $F$  est minimale. Or tout élément proximal de  $\mathrm{GL}(V)$  qui préserve un tel fermé  $F$  est positivement proximal. Donc  $\Gamma$  est positivement proximal. Contradiction.  $\square$

## 4 Sous-groupes préservant un cône convexe

Dans ce chapitre nous démontrons la proposition 1.4 et le théorème 1.5.

### 4.1 Sous-groupes positivement proximaux

On cherche tout d'abord à comprendre à quelle condition un sous-groupe  $\Gamma$  fortement irréductible de  $GL(V)$  contient un sous-groupe Zariski dense positivement proximal. C'est la proposition 4.2 qui n'est qu'une reformulation de la proposition 1.4.a de l'introduction.

Remarquons que la réponse à cette question pour les sous-semigroupes est sans intérêt :

**Lemme 4.1** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$ . Tout sous-semigroupe fortement irréductible et proximal de  $GL(V)$  contient un sous-semigroupe Zariski dense qui préserve un convexe saillant de  $\mathbb{P}(V)$ .*

**Démonstration** Cela résulte du lemme 3.13 ci-dessus et du lemme 7.2 de [2]. Nous laissons les détails au lecteur car ce lemme ne nous sera pas utile.  $\square$

Par contre, pour les sous-groupes, la réponse s'avère intéressante.

**Proposition 4.2** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-groupe irréductible, Zariski connexe et proximal de  $GL(V)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\Gamma$  contient un sous-groupe Zariski dense  $\Delta$  dont l'ensemble limite  $\Lambda_{\Delta}^{\mathbb{Q}}$  est positif.
- (ii) L'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  n'est pas négatif 3 à 3.
- (iii) L'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  contient une partie infinie transverse positive.

Nous aurons besoin des trois lemmes suivants.

Le premier lemme nous permettra de construire une partie infinie positive de  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ .

**Lemme 4.3** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$ ,  $g$  un élément biproximal de  $GL(V)$  et  $a$  un élément de  $\mathbb{Q}(V)$  tel que le triplet  $(a, a_g^+, a_g^-)$  est transverse et positif. Alors il existe un entier  $p \geq 1$  tel que l'ensemble  $\{g^{pn}.a / n \in \mathbb{Z}\}$  est transverse et positif.*

**Démonstration** Quitte à remplacer  $g$  par  $g^2$ , on peut supposer que  $g$  et  $g^{-1}$  sont positivement proximaux. Notons  $v, f, v_g^{\pm}$  et  $f_g^{\pm}$  des vecteurs non nuls de  $x_a, y_a, x_g^{\pm}$  et  $y_g^{\pm}$ . Comme le triplet  $(a, a_g^+, a_g^-)$  est transverse et positif, on peut donc supposer les choix faits de sorte que,

- (a)  $f_g^-(v) > 0, f_g^-(v_g^+) > 0,$
- (b)  $f_g^+(v) > 0, f_g^+(v_g^-) > 0,$
- (c)  $f(v_g^+) > 0, f(v_g^-) > 0.$

Pour  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , notons  $v_n := g^n v, f_n := g^n f$  et  $a_n := g^n a$ . Les conditions (a) et (b) assurent que la demidroite portée par  $v_n$  converge quand  $n$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) vers la demidroite portée par  $v_g^+$  (resp.  $v_g^-$ ). On déduit alors de (c) qu'il existe un entier

$p > 0$  tel que, pour tout entier  $n$  tel que  $|n| \geq p$ , on a  $f(v_n) > 0$ . Et donc si  $m, n$  sont deux entiers tels que  $|n - m| \geq p$ , on a  $f_m(v_n) > 0$ . Par suite, la famille  $\{a_{pn} / n \in \mathbb{Z}\}$  est transverse positive.  $\square$

**Remarque** La même démonstration prouve que si  $(a, a_g^+, a_g^-)$  est transverse négatif, alors il existe un entier  $p \geq 1$  tel que l'ensemble  $\{g^{pn}.a / n \in \mathbb{Z}\}$  est transverse et négatif 3 à 3.

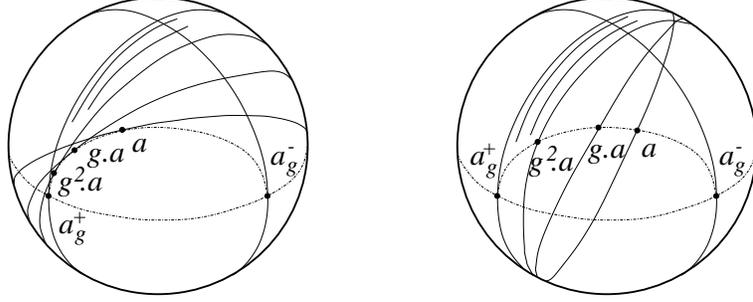


Figure 7: L'orbite  $g^n.a$  selon que le triplet  $(a_g^+, a_g^-, a)$  est positif ou négatif

Le deuxième lemme explique comment construire des sous-groupes Zariski denses.

**Lemme 4.4** Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-groupe fortement irréductible, Zariski connexe et proximal de  $GL(V)$ . Soient  $t \geq 2$  et  $a_1^\pm, a_2^\pm, \dots, a_t^\pm$  des éléments de  $\Lambda_\Gamma^\mathbb{Q}$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des éléments  $g_1, \dots, g_t$  de  $\Gamma$  tels que

- i) Pour tout  $i = 1, \dots, t$ ,  $g_i$  et  $g_i^{-1}$  sont positivement proximaux.
- ii) Pour tout  $i = 1, \dots, t$ ,  $d(a_{g_i}^+, a_i^+) \leq \varepsilon$  et  $d(a_{g_i}^-, a_i^-) \leq \varepsilon$ .
- iii) Pour tout  $n \geq 1$ , le sous-groupe  $\Delta_n$  engendré par  $(g_i^n)_{1 \leq i \leq t}$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ .

**Démonstration** Cela résulte du lemme 7.2 de [2] ... en prenant soin, si besoin est, de remplacer les  $g_i$  par leur carré de sorte qu'ils soient positivement proximaux.  $\square$

Le troisième lemme est une variante du lemme 3.13. Il permet de repérer si les sous-groupes construits dans le lemme précédent préservent un convexe saillant de  $\mathbb{P}(V)$ .

Un élément  $g$  de  $GL(V)$  est dit *positivement biproximal* si il est biproximal et si  $s_g = s_{g^{-1}}$ . Autrement dit,  $g$  est positivement biproximal si l'action de  $g$  sur  $\text{End}V$  est positivement proximale.

**Lemme 4.5** Soit  $E$  une partie finie de  $GL(V)$  formée d'éléments proximaux et telle que l'inverse de tout élément de  $E$  est encore dans  $E$ . On suppose que la partie  $\Lambda_E^\mathbb{Q} := \{a_g^+ / g \in E\}$  de  $\mathbb{Q}(V)$  est transverse. On suppose aussi que, pour tout  $n \geq 1$ , le sous-groupe  $\Delta_n$  de  $GL(V)$  engendré par  $\{g^n / g \in E\}$  est irréductible. Alors, on peut trouver  $n_0 \geq 1$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

- a)  $\Delta_n - \{e\}$  est formé d'éléments proximaux.
- b)  $\Delta_n$  est positivement proximal si et seulement si  $\Lambda_E^\mathbb{Q}$  est positive et les éléments de  $E$

sont positivement proximaux.

c)  $\Lambda_{\Delta_n}^{\mathbb{Q}}$  est positive si et seulement si  $\Lambda_E^{\mathbb{Q}}$  est positive et les éléments de  $E$  sont positivement biproximaux.

d)  $\Lambda_{\Delta_n}^{\mathbb{Q}}$  est positive 3 à 3 si et seulement si  $\Lambda_E^{\mathbb{Q}}$  est positive 3 à 3.

e)  $\Lambda_{\Delta_n}^{\mathbb{Q}}$  est négative 3 à 3 si et seulement si  $\Lambda_E^{\mathbb{Q}}$  est négative 3 à 3.

**Démonstration** a) & b) C'est la même que celle du lemme 3.13. La différence avec les hypothèses de ce lemme est que, pour  $g$  dans  $E$ , le couple  $((x_g^+, y_g^-), (x_{g^{-1}}^+, y_{g^{-1}}^-))$  n'est pas transverse. Cela n'est pas gênant, car on n'a à considérer que des mots  $w = h_l \cdots h_1$  très réduits c'est-à-dire tels que, en notant  $h_0 = h_l$ , pour tout  $k = 1, \dots, l$ , on a  $h_k^{-1} \neq h_{k-1}$ .

c) Cela résulte du point b, de la proposition 3.1 et du lemme 3.12. En effet, lorsque les éléments de  $E$  sont positivement biproximaux, on peut modifier  $E$  en changeant le signe de certains de ses éléments de sorte qu'ils deviennent tous positivement proximaux.

d) & e) Supposons donc que  $\Lambda_E^{\mathbb{Q}}$  est positif 3 à 3 (resp. négatif 3 à 3) et montrons que  $\Lambda_{\Delta_n}^{\mathbb{Q}}$  aussi. Introduisons, avec les notations du lemme 2.7, le sous-groupe fortement irréductible et proximal  $\alpha(\Delta_n)$  de  $\text{GL}(W_{\Delta_n})$ . Le lemme 2.3 prouve que  $\Lambda_{\alpha(E)}^{\mathbb{Q}}$  est positif. Le point c ci-dessus prouve alors que  $\Lambda_{\alpha(\Delta_n)}^{\mathbb{Q}}$  est aussi positif. De nouveau le lemme 2.3 prouve que  $\Lambda_{\Delta_n}^{\mathbb{Q}}$  est positif 3 à 3 (resp. négatif 3 à 3).  $\square$

**Remarque** - Il est élémentaire de vérifier le fait suivant : *Soit  $g$  un élément biproximal de  $\text{GL}(V)$ . Alors le groupe engendré par  $g$  préserve un convexe saillant d'intérieur non vide de  $\mathbb{P}(V)$  si et seulement si  $g$  est positivement biproximal.*

- L'hypothèse d'irréductibilité n'est pas essentielle ... mais nous n'avons considéré l'ensemble limite que sous cette hypothèse.

#### Démonstration de la proposition 4.2

(i)  $\Rightarrow$  (ii) L'ensemble limite de  $\Delta$  est inclus dans celui de  $\Gamma$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $(a, a^+, a^-)$  un triplet transverse et positif de  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ . Grâce au lemme 2.5, on peut supposer qu'il existe un élément biproximal  $g$  de  $\Gamma$  tel que  $a_g^{\pm} = a^{\pm}$ . Le lemme 4.3 fournit alors une partie infinie transverse positive de  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Partons d'une famille  $a_1^{\pm}, \dots, a_t^{\pm}$  transverse et positive de  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ , et notons  $g_1, \dots, g_t$  des éléments de  $\Gamma$  comme dans le lemme 4.4. Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, la famille  $a_{g_1}^{\pm}, \dots, a_{g_t}^{\pm}$  est encore transverse et positive. Pour tout  $n \geq 1$ , le sous-groupe  $\Delta_n$  engendré par  $g_1^n, \dots, g_t^n$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ . Le lemme 4.5 prouve alors que, si  $n$  est suffisamment grand, son ensemble limite  $\Lambda_{\Delta_n}^{\mathbb{Q}}$  est positif.  $\square$

## 4.2 Sous-groupes non positivement proximaux

D'après la proposition 4.2, un sous-groupe fortement irréductible  $\Gamma$  de  $\text{GL}(V)$  dont l'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  est négatif 3 à 3 ne contient pas de sous-groupe Zariski dense positivement proximal.

De tels groupes  $\Gamma$  existent. Il y en a même beaucoup. C'est ce qu'affirme la proposition suivante qui est duale de la proposition 4.2 et qui n'est qu'une reformulation de la proposition 1.4.b de l'introduction.

**Proposition 4.6** *Soient  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Gamma$  un sous-groupe irréductible, Zariski connexe et proximal de  $\mathrm{GL}(V)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\Gamma$  contient un sous-groupe Zariski dense  $\Delta$  dont l'ensemble limite  $\Lambda_{\Delta}^{\mathbb{Q}}$  est négatif 3 à 3.
- (ii) L'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  n'est pas positif 3 à 3.
- (iii) L'ensemble limite  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  contient une partie infinie transverse négative 3 à 3.

### Démonstration de la proposition 4.6

On recopie celle de la proposition 4.2.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) L'ensemble limite de  $\Delta$  est inclus dans celui de  $\Gamma$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $(a, a^+, a^-)$  un triplet transverse et négatif de  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ . Grâce au lemme 2.5, on peut supposer qu'il existe un élément biproximal  $g$  de  $\Gamma$  tel que  $a_g^{\pm} = a^{\pm}$ . La remarque du lemme 4.3 fournit alors une partie infinie transverse et négative 3 à 3 de  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Partons d'une famille  $a_1^{\pm}, \dots, a_t^{\pm}$  transverse et négative 3 à 3 de  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ , et notons  $g_1, \dots, g_t$  des éléments de  $\Gamma$  comme dans le lemme 4.4. Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, la famille  $a_{g_1}^{\pm}, \dots, a_{g_t}^{\pm}$  est encore transverse et négative 3 à 3. Pour tout  $n \geq 1$ , le sous-groupe  $\Delta_n$  engendré par  $g_1^n, \dots, g_t^n$  est Zariski dense dans  $\Gamma$ . Le lemme 4.5 prouve alors que, si  $n$  est suffisamment grand, son ensemble limite  $\Lambda_{\Delta_n}^{\mathbb{Q}}$  est négatif 3 à 3.  $\square$

## 4.3 Représentations sphériques

Dans cette partie, nous décrivons les sous-groupes fermés connexes et irréductibles de  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$  qui préservent un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^m$  : ce sont exactement les groupes  $\rho(G)$  de la proposition suivante.

On conserve les notations de la partie 2.3. La proposition suivante est probablement connue. Faute de référence, nous en donnons une démonstration.

**Proposition 4.7** *Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe,  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ ,  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  une représentation irréductible de  $G$  et  $V^K := \{v \in V \mid \forall k \in K \quad kv = v\}$ . Les cinq assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\rho(G)$  préserve un cône convexe saillant  $C$  de  $V$ .
- (ii)  $\rho$  est proximale et l'orbite fermée  $\Lambda_{\rho(G)}^{\mathbb{Q}}$  de  $G$  dans  $\mathbb{Q}(V)$  est positive.
- (iii)  $V^K \neq 0$  (et on a alors  $\dim V^K = 1$ ).
- (iv)  $\rho$  est proximale et le caractère de  $L$  donné par l'action sur  $V^{\mathfrak{n}}$  est positif.
- (v)  $\rho$  est proximale et son plus haut poids restreint  $\chi$  est dans  $2P$ .

L'équivalence (iii)  $\Leftrightarrow$  (v) est due à Helgason ([17] th. 5.4.1).

La représentation  $\rho$  est alors appelée *sphérique*.

**Remarque** Le théorème d'Helgason affirme en outre que *tout élément  $\chi$  de  $2P_+$  est le plus haut poids restreint d'une représentation sphérique de  $G$* . Ce qui prouve l'inclusion  $2P_+ \subset P_+''$ .

**Démonstration** On note  $\chi$  le plus haut poids restreint de  $V$ .

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) Cela résulte de la proposition 3.1.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $v$  un vecteur non nul de  $C$ . La moyenne  $\int_K k.v dk$  est alors un vecteur non nul  $K$ -invariant de  $C$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Soient  $v_0$  un vecteur non nul  $K$ -invariant de  $V$  et  $f_{-\chi}$  un vecteur non nul de poids  $-\chi$  de  $V^*$ . D'après la décomposition d'Iwasawa, tout élément  $g$  de  $G$  peut s'écrire  $g = n^-ak$  avec  $n^- \in N^-$ ,  $a \in A$ ,  $k \in K$ . On a alors l'égalité  $f_{-\chi}(g.v_0) = \chi(a)f_{-\chi}(v_0)$ . Comme  $V$  est irréductible, ce coefficient n'est pas identiquement nulle, donc  $f_{-\chi}(v_0) \neq 0$ . Il garde donc un signe constant et on peut prendre pour  $C$  le plus petit cône convexe contenant  $G.v_0$ .

Cet argument prouve aussi que  $\dim V^K = 1$  car la restriction de  $f_{-\chi}$  à  $V^K$  n'a pas de noyau.

(i)  $\Rightarrow$  (iv) En effet,  $\overline{C} \cap V^N$  est un cône convexe saillant non nul  $L$ -invariant de  $V^N$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i) On reprend l'argument ci-dessus. On note encore  $\chi$  le caractère de  $L$  donné par l'action de  $L$  sur un vecteur  $v_\chi$  non nul de poids  $\chi$  de  $V$ . D'après la décomposition de Bruhat, l'ensemble  $U$  des éléments  $g$  de  $G$  qui peuvent s'écrire  $g = n^-ln$  avec  $n \in N^-$ ,  $l \in L$ ,  $n \in N$  est un ouvert dense de  $G$ . Pour de tels éléments  $g$ , on peut calculer le coefficient  $f_{-\chi}(g.v_\chi) = \chi(l)f_{-\chi}(v_\chi)$ . Comme  $V$  est irréductible, cette fonction de  $g$  n'est pas identiquement nulle, donc  $f_{-\chi}(v_\chi) \neq 0$ . L'hypothèse  $\chi(L) \subset ]0, \infty[$  assure que ce coefficient garde un signe constant sur  $U$ . On peut donc prendre pour  $C$  le plus petit cône convexe contenant  $G.v_\chi$ .  $\square$

## 4.4 Signe d'un triplet de la variété des drapeaux

Poursuivons la démonstration du théorème 1.5 en expliquant pourquoi la positivité 3 à 3 des ensembles limites  $\Lambda_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  ne dépend de la représentation  $\rho$  que "modulo 2".

Soit  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe. On garde les notations de la partie 2.3. Pour tout  $\chi$  dans  $P_+''$  et  $x$  dans la variété  $X$  des drapeaux de  $\mathfrak{g}$ , on rappelle que  $(\rho^\chi, V^\chi)$  désigne la représentation irréductible proximale de  $G$  de plus haut poids restreint  $\chi$  et  $\varphi^\chi(x)$  l'unique élément de  $\mathbb{Q}(V^\chi)$  stabilisé par  $x$ .

**Définition 4.8** Pour tout triplet transverse  $(x, y, z)$  de  $X$  et  $\chi$  dans  $P_+''$ , on note  $\varepsilon_{xyz}^\chi \in \{-1, 1\}$  le signe du triplet  $(\varphi^\chi(x), \varphi^\chi(y), \varphi^\chi(z))$ .

**Lemme 4.9** Soient  $(x, y, z)$  un triplet transverse de  $X$  et  $\chi, \chi' \in P_+''$ . Alors

a)  $\varepsilon_{xyz}^{\chi+\chi'} = \varepsilon_{xyz}^\chi \varepsilon_{xyz}^{\chi'}$ .

b)  $\varepsilon_{xyz}^{\chi^*} = \varepsilon_{xyz}^\chi$ .

- c) Si  $\chi$  est dans  $2P_+$ , on a  $\varepsilon_{xyz}^\chi = 1$ .
- d) Si  $\rho^\chi$  est orthogonale, on a  $\varepsilon_{xyz}^\chi = 1$ .
- e) Si  $\rho^\chi$  est symplectique, on a  $\varepsilon_{xyz}^\chi = -1$ .

L'application  $\chi \longrightarrow \varepsilon_{xyz}^\chi$  définit donc un morphisme de groupe noté  $\varepsilon_{xyz}$  de  $P''/2P$  dans  $\{-1, 1\}$ . Ce morphisme sera appelé le *signe* du triplet transverse  $(x, y, z)$ .

**Démonstration** a) Remarquons que  $V^{\chi+\chi'}$  est la sous-représentation du produit tensoriel  $V^\chi \otimes V^{\chi'}$  engendrée par le produit tensoriel  $x_\chi \otimes x_{\chi'}$  des droites de plus haut poids. Choisissons un élément loxodromique  $g_{xy}$  de  $G$  ayant  $x$  pour point fixe attracteur et  $y$  pour point fixe répulseur. Choisissons de même des éléments  $g_{yz}$  et  $g_{zx}$ . Par définition du signe d'un triplet, si  $n$  est pair et suffisamment grand, l'élément  $\varepsilon_{xyz}^\chi \rho^\chi(g_{xy}^n g_{zx}^n g_{yz}^n)$  est positivement proximal. On en déduit que l'élément  $\varepsilon_{xyz}^\chi \varepsilon_{xyz}^{\chi'} \rho^\chi(g_{xy}^n g_{zx}^n g_{yz}^n) \otimes \rho^{\chi'}(g_{xy}^n g_{zx}^n g_{yz}^n)$  est positivement proximal et que son point attracteur est dans  $\mathbb{P}(V^{\chi+\chi'})$ . Comme l'élément  $\varepsilon_{xyz}^{\chi+\chi'} \rho^{\chi+\chi'}(g_{xy}^n g_{zx}^n g_{yz}^n)$  est positivement proximal, on en déduit l'égalité des signes annoncée.

- b) L'identification naturelle de  $\mathbb{Q}(V)$  et de  $\mathbb{Q}(V^*)$  ne modifie pas le signe des triplets.
- c) D'après la proposition 4.7 l'image  $\varphi^\chi(X) = \Lambda_{\rho^\chi(G)}^\mathbb{Q}$  est positive.
- d) & e) Cela résulte du lemme 3.4. □

## 4.5 L'adhérence de Zariski des automorphismes d'un convexe

Nous pouvons enfin terminer la démonstration du théorème 1.5 : celui-ci est une conséquence immédiate des propositions 1.4 et 4.10.

**Proposition 4.10** *Soit  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe et  $(\rho, V)$  une représentation irréductible proximale de  $G$ . Alors, on a les équivalences.*

- a)  $\Lambda_{\rho(G)}^\mathbb{Q}$  est négatif 3 à 3  $\iff \rho$  est égale modulo 2 à une représentation irréductible proximale symplectique.
- b)  $\Lambda_{\rho(G)}^\mathbb{Q}$  est positif 3 à 3  $\iff \rho$  est égale modulo 2 à une représentation irréductible proximale orthogonale.

**Démonstration** Les implications réciproques résultent du lemme 4.9. Pour montrer les implications directes, il suffit donc de vérifier que, si  $\Lambda_{\rho(G)}^\mathbb{Q}$  est positif 3 à 3 ou négatif 3 à 3, alors  $\rho$  est égale modulo 2 à une représentation irréductible proximale autoduale. Pour cela, notons  $\chi$  le plus haut poids restreint de  $(\rho, V)$  et notons  $(\tau, W)$  la représentation irréductible proximale de plus haut poids restreint  $\chi + \chi^*$ . Il résulte des lemmes 2.3 et 2.7 que l'ensemble limite  $\Lambda_{\tau(G)}^\mathbb{Q}$  est positif, puis de la proposition 4.7 que  $(\tau, W)$  est une représentation sphérique. Donc  $\chi + \chi^*$  est dans  $2P$ . Écrivons  $\chi = \sum_{\omega \in F} n_\omega \omega$  où cette somme est indexée par l'ensemble  $F$  des poids fondamentaux de  $P_+$  et où les coefficients  $n_\omega$  sont des entiers positifs. Posons  $n'_\omega = \inf(n_\omega, n_{\omega^*})$  et  $\chi' = \sum_{\omega \in F} n'_\omega \omega$ . La différence  $\chi - \chi'$  est aussi dans  $2P$ . Donc  $\chi'$  est dans  $P''_+$  et est le plus haut poids restreint d'une représentation proximale autoduale. □

## 5 Groupes linéaires à valeurs propres positives

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème 1.6.

### 5.1 Sous-groupes positivement loxodromiques

Commençons par donner un énoncé, le théorème 5.3, qui généralise le théorème 1.6 de l'introduction à des groupes non déployés.

Soit  $G$  un groupe de Lie réel linéaire semisimple connexe. Pour tout élément loxodromique  $g$  de  $G$  et tout  $\chi$  dans  $P_+''$ , on note  $s_g^\chi := s_{\rho^\chi(g)} \in \{-1, 1\}$  le signe pour lequel  $s_g^\chi \rho^\chi(g)$  est positivement proximal.

**Lemme 5.1** *Soient  $g$  un élément loxodromique de  $G$  et  $\chi, \chi' \in P_+''$ . Alors*

$$a) s_g^{\chi+\chi'} = s_g^\chi s_g^{\chi'}$$

$$b) s_g^{\chi^*} = s_{g^{-1}}^\chi$$

$$c) \text{ Si } \chi \text{ est dans } 2P_+, \text{ on a } s_g^\chi = 1.$$

L'application  $\chi \longrightarrow s_g^\chi$  définit aussi un morphisme de groupes de  $P''/2P$  dans  $\{-1, 1\}$ .

**Démonstration** C'est la même que celle du lemme 4.9. □

**Définition 5.2** *Un élément  $g$  de  $G$  est dit positivement loxodromique si, pour toute représentation irréductible proximale  $(\rho, V)$  de  $G$ , l'élément  $\rho(g)$  est positivement proximal.*

*Un sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$  de  $G$  est dit positivement loxodromique si tous les éléments loxodromiques de  $\Gamma$  sont positivement loxodromiques.*

**Exemple** Un élément positivement loxodromique dans  $SL(p, \mathbb{R})$  est simplement un élément à valeurs propres réelles positives et distinctes.

Plus généralement, lorsque  $G$  est déployé, un élément loxodromique de  $G$  est positivement loxodromique si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

**Remarques** - Un élément  $g$  de  $G$  est positivement loxodromique si et seulement si  $g^{-1}$  est positivement loxodromique.

- Soient  $\rho_1, \dots, \rho_l$  des représentations irréductibles proximales de  $G$  dont les plus hauts poids  $\chi_1, \dots, \chi_l$  engendrent  $P_+''$ . Pour qu'un élément  $g$  (resp. un sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$ ) soit positivement loxodromique, il faut et il suffit que, pour tout  $i$ ,  $\rho_i(g)$  (resp.  $\rho_i(\Gamma)$ ) soit positivement proximal. Cela résulte du lemme 5.1 et du corollaire 3.14.

Rappelons que tout sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$  de  $G$  contient un sous-groupe Zariski dense  $\Gamma'$  dont tous les éléments sauf l'identité sont loxodromiques (par exemple, les groupes de Schottky de [3]). L'existence d'un sous-groupe Zariski dense dont tous les éléments sauf

l'identité sont positivement loxodromiques est une question plus délicate. Le théorème suivant qui généralise le théorème 1.6 de l'introduction répond à cette question (voir aussi la proposition 5.6).

**Théorème 5.3** *Soit  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe. On a les équivalences*

a)  *$G$  contient un sous-groupe Zariski dense positivement loxodromique  $\iff G$  n'admet pas de représentations irréductibles proximales symplectiques.*

b) *Tout sous-groupe Zariski dense de  $G$  contient un sous-groupe Zariski dense positivement loxodromique  $\iff$  Toutes les représentations irréductibles proximales de  $G$  sont égales modulo 2 à une représentation irréductible proximale orthogonale.*

Ce chapitre est essentiellement consacré à la démonstration de ce théorème.

### Démonstration du théorème 1.6

Cela résulte du théorème 5.3 ci-dessus. En effet, lorsque  $G$  est déployé,

- tout sous-groupe Zariski dense à valeurs propres positives est positivement loxodromique,
- tout sous-groupe Zariski dense positivement loxodromique contient un sous-groupe Zariski dense à valeurs propres positives et
- toutes les représentations irréductibles de  $G$  sont proximales. □

## 5.2 Positivité dans la variété des drapeaux

Rassemblons dans cette partie des énoncés analogues à ceux des chapitres 3 et 4. La différence étant que l'on travaille maintenant simultanément avec toutes les représentations irréductibles proximales de  $G$ .

Voici une notion de positivité pour une partie de la variété des drapeaux. Nous dirons  $G$ -positivité car cette notion dépend du revêtement  $G$  du groupe adjoint choisi.

**Définition 5.4** *Une partie  $\Lambda$  de  $X$  est dite  $G$ -positive (resp.  $G$ -positive 3 à 3) si, pour tout  $\chi$  dans  $P_+''$ , son image  $\varphi^\chi(\Lambda)$  dans  $\mathbb{Q}(V^\chi)$  est positive.*

*Une partie  $\Lambda$  de  $X$  est dite  $G$ -négative 3 à 3 si elle ne contient pas de triplets transverse  $G$ -positifs.*

La proposition suivante est analogue aux propositions 3.1 et 3.11

**Proposition 5.5** *Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe et  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski dense de  $G$ . Alors, on a l'équivalence*

*$\Gamma$  contient un sous-groupe d'indice fini positivement loxodromique  $\iff$  L'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^X$  est  $G$ -positif.*

**Démonstration** Soient  $\rho_1, \dots, \rho_l$  des représentations irréductibles proximales de  $G$  dont les plus hauts poids engendrent  $P_+''$ . D'après les propositions 3.1 et 3.11, on a les équivalences:

$\Lambda_\Gamma^X$  est  $G$ -positif  $\iff \forall i, \Lambda_{\rho_i(\Gamma)}^{\mathbb{Q}}$  est  $G$ -positif

$\iff \forall i, \rho_i(\Gamma)$  contient un sous-groupe d'indice fini positivement proximal.

$\iff \Gamma$  contient un sous-groupe d'indice fini positivement loxodromique.  $\square$

La proposition suivante est analogue aux propositions 4.2 et 4.6.

**Proposition 5.6** *Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe et  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski dense de  $G$ . Alors, on a les équivalences*

a)  $\Gamma$  contient un sous-groupe Zariski dense positivement loxodromique  $\iff$  L'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^X$  n'est pas  $G$ -négatif 3 à 3.

b) Tout sous-groupe Zariski dense de  $\Gamma$  contient un sous-groupe Zariski dense positivement loxodromique  $\iff$  L'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^X$  est  $G$ -positif 3 à 3.

**Démonstration** La démonstration est la même que celle de la proposition 4.2, en remplaçant les trois lemmes 4.3, 4.4 et 4.5 par les trois lemmes analogues suivants.  $\square$

**Lemme 5.7** *Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe,  $g$  un élément loxodromique de  $G$  et  $z$  un élément de la variété des drapeaux  $X$  tel que le triplet  $(z, z_g^+, z_g^-)$  est transverse et  $G$ -positif. Alors, il existe un entier  $p \geq 1$  tel que l'ensemble  $\Lambda := \{g^{pn}.z / n \in \mathbb{Z}\}$  est transverse et  $G$ -positif.*

**Démonstration** Cela résulte du lemme 4.3.  $\square$

**Remarque** La même démonstration prouve que si  $(z, z_g^+, z_g^-)$  est transverse, alors il existe un entier  $p \geq 1$  tel que tout triplet de l'ensemble  $\{g^{pn}.a / n \in \mathbb{Z}\}$  est transverse et a même signe que le triplet de départ.

**Lemme 5.8** *Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe et  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski dense de  $G$ . Soient  $t \geq 2$  et  $z_1^\pm, z_2^\pm, \dots, z_t^\pm$  des éléments de  $\Lambda_\Gamma^X$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des éléments positivement loxodromiques  $g_1, \dots, g_t$  de  $\Gamma$  tels que*

i) Pour tout  $i = 1, \dots, t$ ,  $d(z_{g_i}^+, z_i^+) \leq \varepsilon$  et  $d(z_{g_i}^-, z_i^-) \leq \varepsilon$ .

ii) Pour tout  $n \geq 1$ , le sous-groupe  $\Delta_n$  engendré par  $(g_i^n)_{1 \leq i \leq t}$  est Zariski dense dans  $G$ .

**Démonstration** C'est le lemme 7.2 de [2]  $\square$

**Lemme 5.9** *Soient  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe,  $E$  une partie finie de  $G$  formée d'éléments loxodromiques et telle que l'inverse de tout élément de  $E$  est encore dans  $E$ . On suppose que la partie  $\Lambda_E^X := \{z_g^+ / g \in E\}$  de  $X$  est transverse. On suppose aussi que, pour tout  $n \geq 1$ , le sous-groupe  $\Delta_n$  de  $G$  engendré par  $\{g^n / g \in E\}$*

est Zariski dense dans  $G$ . Alors, on peut trouver  $n_0 \geq 1$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

- $\Delta_n - \{e\}$  est formé d'éléments loxodromiques et l'ensemble limite  $\Lambda_{\Delta_n}^X$  est transverse.
- $\Delta_n$  est positivement loxodromique si et seulement si  $\Lambda_E^X$  est  $G$ -positive et les éléments de  $E$  sont positivement loxodromiques.
- L'ensemble des signes des triplets de  $\Lambda_{\Delta_n}^X$  est égal à l'ensemble des signes des triplets de  $\Lambda_E^X$

**Démonstration** Les points  $a$  et  $b$  résultent du lemme 4.5. Pour démontrer le point  $c$ , on choisit des voisinages disjoints suffisamment petits  $U_g$  des attracteurs  $z_g^+$  des éléments  $g$  de  $E$  et on remarque que si l'entier  $n$  est choisi assez grand, l'ensemble limite  $\Lambda_{\Delta_n}^X$  est inclus dans la réunion de ces parties  $U_g$ . Il suffit alors de remarquer que, pour tout triplet  $(x, y, z)$  d'éléments distincts de  $\Lambda_{\Delta_n}^X$ , il existe un (unique) élément  $h$  du groupe libre  $\Delta_n$  tels que les trois points  $h.x$ ,  $h.y$  et  $h.z$  sont dans trois voisinages  $U_g$  distincts.  $\square$

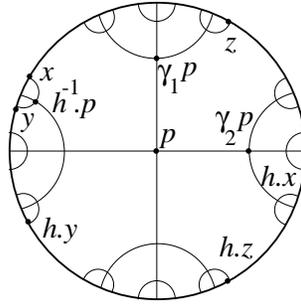


Figure 8: L'élément  $h$  déterminé par trois points limites  $x, y, z$

### Démonstration de la proposition 5.6

a) Le sens direct résulte de la proposition 5.5. Réciproquement, si  $\Lambda_{\Gamma}^X$  contient un triplet transverse  $G$ -positif, on construit à l'aide des trois lemmes ci-dessus, le sous-groupe Zariski dense cherché.

b) Si  $\Lambda_{\Gamma}^X$  contient un triplet transverse  $G$ -négatif, on construit à l'aide des trois lemmes ci-dessus, un sous-groupe Zariski dense dont l'ensemble limite ne contient aucun triplet  $G$ -positif. La réciproque résulte du point  $a$  ci-dessus.  $\square$

### Démonstration du théorème 5.3.b

La proposition 5.6 ci-dessus appliquée à  $\Gamma = G$  et la proposition 4.10 permettent de réécrire l'assertion  $b$  du théorème 5.3 sous la forme suivante :

$b')$   $X$  est  $G$ -positif 3 à 3  $\iff \forall \chi \in P_+''$ ,  $\varphi^\chi(X)$  est positif 3 à 3.

Cette assertion  $b'$  n'est rien d'autre que la définition de la  $G$ -positivité 3 à 3.  $\square$

**Remarque** En utilisant les mêmes propositions, l'assertion  $a$  du théorème 5.3 devient  $a')$   $X$  contient un triplet transverse  $G$ -positif si et seulement si,  $\forall \chi \in P_+''$ ,  $\varphi^\chi(X)$  contient un triplet transverse positif.

L'implication directe de cette assertion  $a'$  est évidente. La réciproque est plus délicate: on

sait que, pour tout  $\chi$ , on peut trouver un triplet transverse dans  $X$  dont l'image par  $\varphi^\chi$  est positive et on voudrait un triplet qui soit valable pour tous les  $\chi$ ... c'est ce qu'affirme la proposition 5.13 ci-dessous. Mais, avant de l'énoncer, donnons un exemple qui prouve que, dans l'équivalence  $a'$ , on ne peut pas remplacer l'ensemble  $X$  par l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma^X$  d'un sous-groupe Zariski dense.

**Exemple** *Il existe un sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$  du groupe  $G = \mathrm{SL}(5, \mathbb{R})$  tel que*  
- *Pour toute représentation irréductible  $\rho$  de  $G$ , le groupe  $\rho(\Gamma)$  contient un sous-groupe Zariski dense qui est positivement proximal.*  
- *Mais  $\Gamma$  ne contient pas de sous-groupe Zariski dense positivement loxodromique.*

**Démonstration de l'exemple** D'après la proposition 4.2 il suffit de construire un sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$  tel que  $\Lambda_\Gamma^X$  contient des triplets de tous signes possibles sauf des triplets  $G$ -positifs. D'après les trois lemmes ci-dessus, il suffit de construire un ensemble de 5 drapeaux transverses de  $\mathbb{R}^5$  qui contient des triplets de tous signes possibles sauf des triplets  $G$ -positifs. La construction explicite de ces 5 drapeaux est peu éclairante. Elle est laissée au lecteur.  $\square$

### 5.3 Construction d'un triplet de la variété des drapeaux

Pour démontrer le théorème 5.3, on doit construire un triplet  $G$ -positif de la variété des drapeaux. On montre, dans cette partie, comment certains éléments  $Y$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  permettent de construire un tel triplet. Le dernier chapitre de cet article sera consacré à la construction d'un tel élément  $Y$ .

**Définition 5.10** *Pour tout élément  $Y$  de  $\mathfrak{g}$  et toute représentation irréductible proximale  $(\rho^\chi, V^\chi)$  de  $\mathfrak{g}$ , on note  $n^\chi(Y) := \inf\{n \in \mathbb{N} / f_{\chi^*}(Y^n v_\chi) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  où  $v_\chi$  (resp.  $f_{\chi^*}$ ) est un vecteur de plus haut poids restreint de  $V^\chi$  (resp. de son dual  $(V^\chi)^*$ ).*

Par convention, on pose  $n^\chi(Y) = \infty$  lorsque,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{\chi^*}(Y^n v_\chi) = 0$ .

Citons le lemme suivant analogue au lemme 4.9.

**Lemme 5.11** *Soient  $Y$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\chi, \chi'$  dans  $P_+''$ . Alors*

- a)  $n^{\chi+\chi'}(Y) = n^\chi(Y) + n^{\chi'}(Y)$ .
- b)  $n^{\chi^*}(Y) = n^\chi(Y)$ .
- c) Si  $\chi$  est dans  $2P_+$ ,  $n^\chi(Y)$  est pair ou infini.
- d) Si  $\rho^\chi$  est orthogonale,  $n^\chi(Y)$  est pair ou infini.
- e) Si  $\rho^\chi$  est symplectique,  $n^\chi(Y)$  est impair ou infini.

**Démonstration** C'est la même que celle du lemme 4.9.  $\square$

Le lemme suivant relie cet entier  $n^\chi(Y)$  à la positivité des triplets.

**Lemme 5.12** Soient  $Y$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\chi$  dans  $P_+''$ . Alors on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que  
a) Si  $n^\chi(Y) < \infty$ , la famille  $\{e^{tY} a_\chi / |t| < \varepsilon\}$  de  $\mathbb{Q}(V^\chi)$  est transverse.  
b) Si  $n^\chi(Y)$  est pair, cette famille  $\{e^{tY} a_\chi / |t| < \varepsilon\}$  est positive.  
c) Si  $n^\chi(Y)$  est impair, cette famille  $\{e^{tY} a_\chi / |t| < \varepsilon\}$  est négative 3 à 3.

**Démonstration** Posons  $n := n^\chi(Y)$ . Rappelons que l'élément  $a_\chi$  est le couple  $(x_\chi, y_{\chi^*})$  formé des droites de plus haut poids de  $V^\chi$  et de son dual. On choisit des vecteurs  $v_\chi$  et  $f_{\chi^*}$  dans ces droites et on calcule

$$(e^{tY} f_{\chi^*})(e^{t'Y} v_\chi) = f_{\chi^*}((e^{(t'-t)Y} v_\chi) = \frac{(t' - t)^n}{n!} f_{\chi^*}(Y^n v_\chi) + o((t' - t)^n).$$

Notons  $c_{t,t'}$  cette expression. Elle ne s'annule pas si  $t' \neq t$ . Elle garde un signe constant lorsque  $n$  est pair. Lorsque  $n$  est impair,  $c_{t,t'}$  et  $c_{t',t}$  ont des signes opposés.  $\square$

On peut maintenant poursuivre la

**Démonstration du théorème 5.3.a**

Le point délicat consiste à construire un triplet transverse  $G$ -positif dans  $X$  qui nous permettra d'appliquer la proposition 5.6. L'existence d'un tel triplet résulte de la proposition 5.13 ci-dessous et du lemme 5.12 ci-dessus.  $\square$

**Proposition 5.13** Soit  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe. Si  $G$  n'admet pas de représentations irréductibles proximales symplectiques, alors il existe un élément  $Y$  dans  $\mathfrak{g}$  tel que, pour toute représentation irréductible proximale  $(\rho^\chi, V^\chi)$  de  $G$ , l'entier  $n^\chi(Y)$  est pair.

La démonstration de cette proposition occupe le dernier chapitre de cet article.

## 6 Construction de $Y$

Ce chapitre est entièrement consacré à la démonstration de la proposition 5.13. La vérification de ce point technique utile pour la démonstration du théorème 1.6 n'est pas très éclairante. Le lecteur peut se contenter de lire l'exemple  $G = \mathrm{SL}(p, \mathbb{R})$  par lequel nous commençons.

### 6.1 Construction de $Y$ pour le groupe linéaire

Avant de donner la démonstration générale, étudions le cas  $G = \mathrm{SL}(p, \mathbb{R})$ .

Dire que  $G$  n'a pas de représentations irréductibles symplectiques signifie que  $p \not\equiv 2 \pmod{4}$ . En effet, lorsque  $p = 2\ell$  avec  $\ell$  impair, la représentation de  $G$  dans  $\Lambda^\ell \mathbb{R}^{2\ell}$  est symplectique.

On note  $e_1, \dots, e_p$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $e_{p+1} = 0$ . On choisit pour chambre de Weyl  $\mathfrak{a}^+ := \{\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_p) \mid x_1 \geq \dots \geq x_p \text{ et } \sum x_i = 0\}$ . Les poids fondamentaux  $\omega_k$  sont alors les plus hauts poids des représentations naturelles de  $\mathfrak{g}$  dans  $\Lambda^k \mathbb{R}^p$ , pour  $k = 1, \dots, p-1$ .

**1<sup>er</sup> cas:**  $p$  est impair.

Soit  $Y_0$  l'élément de  $\mathfrak{g}$  défini par  $Y_0 e_i = e_{i+1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ . On calcule aisément  $n^{\omega_k}(Y_0) = k(p-k)$ ,  $\forall k = 1, \dots, p-1$ . Comme  $p$  est impair, ces entiers sont tous pairs et cet élément  $Y = Y_0$  convient. Remarquons au passage que cet élément  $Y_0$  fait partie d'un "sl<sub>2</sub>-triplet principal"... cette remarque est le point de départ pour introduire les algèbres de Lie de type  $A$ .

**2<sup>ème</sup> cas:**  $p = 2\ell$  avec  $\ell$  pair.

Comme la construction précédente ne convient pas, on choisit un élément  $Y_1$  de  $\mathfrak{g}$  légèrement différent défini par  $Y_1 e_i = e_{i+1} + \partial_{i, \ell-1} e_{\ell+1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ . On calcule aisément

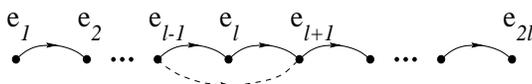


Figure 9: Les éléments  $Y_0$  et  $Y_1$  de  $\mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{R})$

$n^{\omega_k}(Y_1) = k(2\ell - 1 - k)$  si  $1 \leq k \leq \ell$ . Ces entiers sont toujours pairs. Il en est de même des entiers  $n^{\omega_k}(Y_1) = n^{\omega_{p-k}}(Y_1)$  si  $\ell < k < p$ .

Il reste à étudier la parité de  $n^{\omega_\ell}(Y_1)$ . On remarque tout d'abord que  $Y_1^{\ell^2} e_1 \wedge \dots \wedge e_\ell \neq 0$  et donc que  $n^{\omega_\ell}(Y_1) \leq \ell^2$ . On remarque ensuite que, comme  $\ell$  est pair, la représentation de  $G$  dans  $\Lambda^\ell \mathbb{R}^{2\ell}$  est orthogonale. On en déduit, à l'aide du lemme 5.11, que l'entier  $n^{\omega_\ell}(Y_1)$  est pair.

Donc cet élément  $Y = Y_1$  convient.

## 6.2 Algèbres de Lie de type A et B

La première idée pour construire notre élément  $Y$  est de le choisir dans un “ $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal”. Cette idée ne convient que pour une classe de groupes que nous appellerons “de type A” et que nous introduisons dans cette partie.

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semisimple. On note  $\tilde{G}$  le groupe de Lie linéaire connexe d’algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  auquel s’intègre toutes les représentations de  $\mathfrak{g}$  et  $Z_{\tilde{G}}$  son centre. Pour toute représentation irréductible proximale  $(\rho^\chi, V^\chi)$  de  $\mathfrak{g}$ , on appelle *caractère central* de  $\rho^\chi$  le caractère  $c^\chi : Z_{\tilde{G}} \rightarrow \{-1, 1\}$  donné par  $\rho^\chi(z) = c^\chi(z)\text{Id}_V$ .

On a encore un lemme analogue au lemme 4.9.

**Lemme 6.1** *Soient  $\chi, \chi'$  dans  $P_+''$ . Alors*

a)  $c^{\chi+\chi'} = c^\chi c^{\chi'}$ .

b)  $c^{\chi^*} = c^\chi$ .

c) Si  $\chi$  est dans  $2P_+$ ,  $c^\chi = 1$ .

**Démonstration** Les deux premiers points sont clairs. Pour le dernier, on remarque que  $\tilde{G}$  préserve un cône convexe saillant de  $V^\chi$ .  $\square$

**Définition 6.2** *Un groupe de Lie linéaire semisimple connexe  $G$  est dit de type A si chaque représentation irréductible proximale de  $G$  a même caractère central qu’une représentation irréductible proximale autoduale.*

*Une algèbre de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  est dite de type A si tout groupe de Lie  $G$  linéaire connexe d’algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est de type A.*

Dire que  $\mathfrak{g}$  est de type A équivaut à dire que  $\tilde{G}$  est de type A.

**Lemme 6.3** *Une algèbre de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  est de type A si et seulement si ses idéaux simples sont de type A.*

**Démonstration** Ecrivons  $\mathfrak{g}$  comme une somme directe d’idéaux simples  $\mathfrak{g}_i$ . Toute représentation irréductible proximale  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$  est produit tensoriel de représentations irréductibles proximales  $\rho_i$  de  $\mathfrak{g}_i$ . On remarque que  $\rho$  est autoduale si et seulement si les représentations  $\rho_i$  sont autoduales et que deux représentations  $\rho$  et  $\rho'$  de  $\mathfrak{g}$  ont même caractère central si et seulement si, pour tout  $i$ , les représentations correspondantes  $\rho_i$  et  $\rho'_i$  de  $\mathfrak{g}_i$  ont même caractère central.  $\square$

**Exemples** - Si toutes les représentations de  $\mathfrak{g}$  sont autoduales (i.e. si  $w_0 = -1$ ), alors  $\mathfrak{g}$  est de type A.

- Si le centre de  $\tilde{G}$  est trivial alors  $\mathfrak{g}$  est de type A.

- Si le centre de  $G$  est trivial alors  $G$  est de type A.

**Définition 6.4** Une algèbre de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  est dite de type  $B$  si aucun de ses idéaux simples n'est de type  $A$ .

**Remarque** Une algèbre de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  se décompose de façon unique en une somme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b$  où  $\mathfrak{g}_a$  est un idéal de type  $A$  et  $\mathfrak{g}_b$  est un idéal de type  $B$ .

**Lemme 6.5** Une algèbre de Lie simple est de type  $B$  si et seulement si elle est isomorphe à  $\mathfrak{sl}(4\ell, \mathbb{R})$  ou  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, 2\ell + 1)$ , pour  $\ell \geq 1$ .

**Démonstration** Cela résulte de la classification des algèbres de Lie simples (voir [16]) et de leurs représentations irréductibles proximales.

On vérifie au cas par cas (les détails sont laissés au lecteur) que, si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple non déployée telle que  $w_0 \neq -1$ , le caractère central de toute représentation irréductible proximale de  $\mathfrak{g}$  est trivial.

On en déduit que, si  $\mathfrak{g}$  est simple de type  $B$ , alors  $\mathfrak{g}$  est déployée,  $w_0 \neq -1$  et le centre  $Z_{\tilde{G}}$  est non trivial. Ceci ne laisse que deux cas possibles  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{R})$  ou  $\mathfrak{so}(2\ell + 1, 2\ell + 1)$  avec  $\ell \geq 2$  pour lesquels le centre  $Z_{\tilde{G}}$  a deux éléments. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(4\ell + 2, \mathbb{R})$  est de type  $A$  car la représentation dans  $\Lambda^{2\ell+1}\mathbb{R}^{4\ell+2}$  a un caractère central non trivial.

Les algèbres de Lie  $\mathfrak{sl}(4\ell, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{so}(2\ell+1, 2\ell+1)$  sont de type  $B$  car les caractères centraux des représentations autoduales sont triviaux.  $\square$

### 6.3 Construction de $Y$ pour le type $A$

Dans cette partie, on vérifie que lorsque  $\mathfrak{g}$  est de type  $A$ , l'élément  $Y$  que l'on cherche peut être choisi dans un "sl<sub>2</sub>-triplet principal".

Un  $sl_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  est un triplet  $(Y_0, H_0, X_0)$  tel que  $[H_0, X_0] = 2X_0$ ,  $[H_0, Y_0] = -2Y_0$  et  $[X_0, Y_0] = H_0$ . Un tel triplet est dit *standard* si  $H_0$  est dans  $\mathfrak{a}^+$  et *principal standard* si en outre, pour toute racine restreinte simple  $\alpha$ , on a  $\alpha(H_0) = 2$ . L'existence de tels triplets est classique (cf [21]) On note  $S$  le sous-groupe connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{s} := \mathbb{R}Y_0 \oplus \mathbb{R}H_0 \oplus \mathbb{R}X_0$ . Ce groupe est isomorphe à  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  ou  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Le centre de  $S$  a donc un ou deux éléments.

**Lemme 6.6** Soit  $G$  un groupe de Lie linéaire semisimple connexe,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie,  $(Y_0, H_0, X_0)$  un  $sl_2$ -triplet principal standard de  $\mathfrak{g}$ ,  $S$  le sous-groupe connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{s} := \mathbb{R}Y_0 \oplus \mathbb{R}H_0 \oplus \mathbb{R}X_0$  et  $z_0$  le générateur du centre de  $S$ .

Soient  $(V, \rho)$  une représentation irréductible proximale de  $G$ ,  $\chi$  son plus haut poids restreint et  $U$  le  $\mathfrak{s}$ -sous-module de  $V$  engendré par la droite de plus haut poids  $x_\chi$ . Alors

- a)  $z_0$  est dans le centre de  $G$ .
- b)  $U$  est un  $\mathfrak{s}$  module irréductible qui contient la droite de plus bas poids  $x_{-\chi}$ .
- c)  $n^\chi(Y_0)$  est fini et  $c^\chi(z_0) = (-1)^{n^\chi(Y_0)} = (-1)^{\chi(H_0)+1}$ .
- d) Si  $\rho$  est autodual, on a les équivalences :  
 $\rho$  est symplectique  $\Leftrightarrow \chi(H_0)$  est pair  $\Leftrightarrow n^\chi(Y_0)$  est impair.

**Démonstration** Cela résulte de la théorie des  $\mathfrak{s}$ -modules de dimension finie.

a) Les valeurs propres de  $\text{ad}H_0$  dans  $\mathfrak{g}$  sont paires. Donc l'action adjointe dans  $\mathfrak{g}$  de  $z_0$  est triviale.

b) La droite de plus haut poids  $x_\chi$  est l'espace propre de  $\rho(H_0)$  dans  $V$  pour la valeur propre  $\chi(H_0)$ . De même, la droite de plus bas poids  $x_{-\chi^*}$  est l'espace propre de  $\rho(H_0)$  dans  $V$  pour la valeur propre  $-\chi^*(H_0) = -\chi(H_0)$ . Or dans un  $\mathfrak{s}$ -module, l'opposé d'une valeur propre de  $H_0$  est encore une valeur propre de  $H_0$ .

c) Cela résulte du point précédent et de la théorie des  $\mathfrak{s}$ -modules.

d) Soit  $b$  la forme bilinéaire  $G$ -invariante non dégénérée sur  $V$ . On a  $b(x_\chi, x_{-\chi}) \neq 0$ . Donc la restriction de  $b$  à  $U$  est non nulle et  $S$ -invariante. Elle est donc non dégénérée. Donc  $\rho$  est symplectique si et seulement si le  $\mathfrak{s}$ -module  $U$  est symplectique. Ce qui se produit si et seulement si les valeurs propres de  $H_0$  dans  $U$  sont impaires.  $\square$

**Remarque** Soit  $F$  l'ensemble des poids fondamentaux de  $P_+$  et  $I := \{\omega \in F \mid \omega = \omega^* \text{ et } \omega(H_0) \text{ est impair}\}$ . Une description au cas par cas de cet ensemble  $I$  est donnée dans [7] p.213. Le plus haut poids restreint d'une représentation irréductible proximale est un élément  $\chi$  de  $P_+''$  que l'on peut écrire  $\chi = \sum_{\omega \in F} n_\omega \omega$ . La représentation est autoduale si et seulement si  $n_\omega^* = n_\omega, \forall \omega \in F$ . Parmi celles-ci, les représentations orthogonales (resp. symplectiques) sont celles pour lesquelles la somme  $\sum_{\omega \in I} n_\omega$  est paire (resp. impaire).

Le lemme 6.6 permet de construire notre élément  $Y$  lorsque  $G$  est de type  $A$  :

**Corollaire 6.7** *On suppose que  $G$  est de type  $A$  et on choisit un  $sl_2$ -triplet standard  $(Y_0, H_0, X_0)$  dans  $\mathfrak{g}$ . Si  $G$  n'admet pas de représentations irréductibles proximales symplectiques, alors, pour toute représentation irréductible proximale  $(\rho^\chi, V^\chi)$  de  $G$  l'entier  $n^\chi(Y_0)$  est pair.*

**Démonstration** D'après le lemme 6.6, la parité de  $n^\chi(Y_0)$  ne dépend que du caractère central  $c^\chi$  de  $\rho^\chi$ . Comme  $G$  est de type  $A$ , on peut supposer que  $\rho^\chi$  est autoduale. Par hypothèse,  $\rho^\chi$  est alors orthogonale et, d'après le lemme 6.6,  $n^\chi(Y_0)$  est pair.  $\square$

## 6.4 Construction de $Y$ pour le groupe Spin

Avant de poursuivre la démonstration de la proposition 5.13, étudions le cas où  $G$  est le groupe  $\text{Spin}(p, p)$ , revêtement à deux feuillets du groupe  $\text{SO}_0(p, p)$  avec  $p \geq 3$ .

Dire que  $G$  n'a pas de représentation symplectique irréductible signifie que  $p \not\equiv 2 \pmod{4}$ . En effet, lorsque  $p \equiv 2 \pmod{4}$ , la représentation spinorielle est symplectique. Cependant, nous ne faisons pas d'hypothèse sur  $p$  dans la discussion qui suit.

Introduisons quelques notations relatives à ce groupe  $G$ . Soient  $e_1, \dots, e_{2p}$  une base de  $\mathbb{R}^{2p}$  pour laquelle la forme bilinéaire  $G$ -invariante est  $e_1^* e_{2p}^* + e_2^* e_{2p-1}^* + \dots + e_p^* e_{p+1}^*$ . Soient

$f$  et  $g$  les vecteurs  $f = e_p + e_{p+1}$  et  $g = e_p - e_{p+1}$ . On choisit pour chambre de Weyl  $\mathfrak{a}^+ := \{ \text{diag}(x_1, \dots, x_p, -x_p, \dots, -x_1) / x_1 \geq \dots \geq x_p \geq 0 \}$ .

Pour  $k \leq p-1$ , la représentation de  $G$  dans  $\Lambda^k \mathbb{R}^{2p}$  est irréductible. Lorsque  $k \leq p-2$ , le plus haut poids est un poids fondamental  $\omega_k$ . Lorsque  $k = p-1$ , le plus haut poids est la somme  $\omega_{p-1} + \omega_p$  des deux derniers poids fondamentaux. On sait déjà que l'élément  $Y_0$  d'un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet standard  $(Y_0, H_0, X_0)$  de  $\mathfrak{g}$  doit jouer un rôle dans cette étude. Il est donné par

$$Y_0 e_i = e_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p-2 \quad \text{et } p+2 \leq i \leq 2p-1$$

$$Y_0 e_{p-1} = f, \quad Y_0 f = -2e_{p+2}, \quad Y_0 g = 0 \quad \text{et } Y_0 e_{2p} = 0.$$

On cherche à modifier cet élément  $Y_0$ . Pour cela, on introduit un élément  $Y'_0$  de  $\mathfrak{g}$  défini par

$$Y'_0 e_i = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p-1 \quad \text{et } p+2 \leq i \leq 2p$$

$$Y'_0 e_1 = g, \quad Y'_0 f = 0 \quad \text{et } Y'_0 g = 2e_{2p}$$

et on pose  $Y_1 = Y_0 + Y'_0$ .

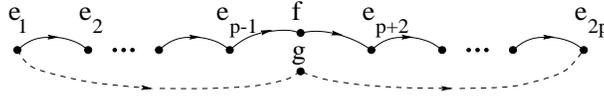


Figure 10: Les éléments  $Y_0$  et  $Y_1$  de  $\mathfrak{so}(p, p)$

**1<sup>er</sup> cas:**  $p$  est pair.

Dans ce cas, toutes les représentations de  $\mathfrak{g}$  sont autoduales et  $\mathfrak{g}$  est de type A. On sait, grâce au corollaire 6.7, que l'élément  $Y = Y_0$  convient.

**2<sup>ème</sup> cas:**  $p$  est impair.

Dans ce cas, on a  $\omega_{p-1} = \omega_p^*$  et donc, d'après le lemme 5.11, on a l'égalité  $n^{\omega_{p-1}}(Y) = n^{\omega_p}(Y)$  pour tout  $Y$  dans  $\mathfrak{g}$ .

**Lemme 6.8** Avec ces notations et avec  $p \geq 3$ .

- a) Si  $k \leq p-2$ , les entiers  $n^{\omega_k}(Y_0)$  et  $n^{\omega_k}(Y_1)$  sont pairs.
- b) Lorsque  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $n^{\omega_p}(Y_0)$  est pair et  $n^{\omega_p}(Y_1)$  est impair.
- c) Lorsque  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $n^{\omega_p}(Y_0)$  est impair et  $n^{\omega_p}(Y_1)$  est pair.

**Démonstration** Ces assertions pour  $Y_0$  résultent du lemme 6.6 et du calcul de  $\omega_k(H_0)$  ; on peut aussi suivre la méthode que nous allons utiliser maintenant pour  $Y_1$ .

Fixons  $1 \leq k \leq p-1$ . Comme  $Y_0$  et  $Y'_0$  commutent, l'action de  $Y_1^n$  sur le vecteur de plus haut poids  $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$  de  $\Lambda^k \mathbb{R}^{2p}$  est donnée par la formule du binôme :

$$Y_1^n e_1 \wedge \dots \wedge e_k = Y_0^n e_1 \wedge \dots \wedge e_k + n Y_0^{n-1} g \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k + n(n-1) Y_0^{n-2} e_{2p} \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k.$$

La plus petite valeur de  $n$  pour laquelle ce vecteur a une composante sur le vecteur de plus bas poids  $e_{2p-k+1} \wedge \cdots \wedge e_{2p}$  est  $n = (k-1)(2p-k-2) + 2$  ; cette composante provient alors du troisième terme de cette somme.

Pour  $k \leq p-2$ , on en déduit l'égalité  $n^{\omega_p}(Y_1) = (k-1)(2p-k-2) + 2$ . Cet entier est toujours pair.

Pour  $k = p-1$ , on en déduit à l'aide du lemme 5.11 l'égalité  $n^{\omega_p}(Y_1) = \frac{1}{2}n^{\omega_p+\omega_{p-1}}(Y_1) = \frac{1}{2}(p-2)(p-1) + 1$ . Lorsque  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , cet entier est pair. Lorsque  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , cet entier est impair.  $\square$

En conclusion, on a trouvé pour  $G = \text{Spin}(p, p)$  un élément qui satisfait la conclusion de la proposition 5.13 : lorsque  $p \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ , on prend  $Y = Y_0$  ; lorsque  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , on prend  $Y = Y_1$ .

## 6.5 Construction de $Y$ pour le type B

Dans cette partie, on construit l'élément  $Y$  que l'on cherche lorsque  $\mathfrak{g}$  est de type B. C'est le lemme 6.9 ci dessous avec  $z = 1$ .

**Lemme 6.9** *Soient  $G$  un groupe de Lie semisimple linéaire connexe dont l'algèbre de Lie est de type B et  $z$  un élément du centre de  $G$ .*

*Alors, il existe un élément  $Y_z$  de  $\mathfrak{g}$  tel que, pour toute représentation irréductible proximale  $\rho^x$  de  $G$ ,  $n^x(Y_z)$  est fini et on a l'équivalence  $c^x(z) = 1 \Leftrightarrow n^x(Y_z)$  est pair.*

**Démonstration 1<sup>er</sup> cas:**  $\mathfrak{g}$  est simple.

D'après le lemme 6.5, on se ramène à un des deux cas suivants:  $G = \text{SL}(4\ell, \mathbb{R})$  ou  $G = \text{Spin}(2\ell+1, 2\ell+1)$  avec  $\ell \geq 1$ . Dans ces cas, le centre  $Z_G$  de  $G$  a deux éléments.

Si  $z$  est le générateur  $z_0$  du centre d'un groupe  $S$  dont l'algèbre de Lie est engendrée par un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal  $(Y_0, H_0, X_0)$ , on peut prendre  $Y = Y_0$ .

Sinon, on est dans un des deux cas suivants :

- $G = \text{SL}(4\ell, \mathbb{R})$  avec  $z = 1$ . On prend alors pour  $Y$  l'élément  $Y_1$  construit en 6.1.
- $G = \text{Spin}(2\ell+1, 2\ell+1)$  avec ( $\ell$  pair et  $z \neq 1$ ) ou ( $\ell$  impair et  $z = 1$ ). On prend alors pour  $Y$  l'élément  $Y_1$  construit en 6.4.

**2<sup>ème</sup> cas:**  $\mathfrak{g}$  est semisimple.

On décompose  $\mathfrak{g}$  en somme d'idéaux simples,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_t$ , on note  $G_i$  les sous-groupes de Lie connexes d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_i$ , on choisit des éléments  $z_i$  dans le centre de  $G_i$  dont le produit  $z_1 \cdots z_t$  est égal à  $z$ . On prend alors  $Y_z = Y_{z_1} + \cdots + Y_{z_t}$  où  $Y_{z_i}$  est l'élément de  $\mathfrak{g}_i$  construit dans le premier cas.

## 6.6 Construction de $Y$ pour le type général

Nous pouvons enfin donner la construction de  $Y$  pour un groupe de Lie semisimple  $G$  dans le cas général.

### Démonstration de la proposition 5.13

Notons  $J$  l'intersection des noyaux des représentations irréductibles proximales de  $G$ . C'est un sous-groupe distingué compact de  $G$ . Quitte à remplacer  $G$  par  $G/J$ , on peut supposer que  $J$  est trivial. Le centre  $Z_G$  de  $G$  est alors un groupe isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2)^r$  car, pour toute représentation irréductible proximale de  $G$ , l'image de  $Z_G$  est incluse dans  $\{-1, 1\}$ .

Ecrivons  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_b$ , avec  $\mathfrak{g}_a$  idéal de type  $A$  et  $\mathfrak{g}_b$  idéal de type  $B$  et notons  $G_a$  (resp.  $G_b$ ) le sous-groupe connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_a$  (resp.  $\mathfrak{g}_b$ ),  $Z_a := G_a \cap Z_G$  (resp.  $Z_b := G_b \cap Z_G$ ) son centre et  $Z_0 := Z_a \cap Z_b = G_a \cap G_b$ . Notons  $(Y_a, H_a, X_a)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet principal standard de  $\mathfrak{g}_a$  et  $z_a$  le générateur du centre du sous-groupe de dimension 3 correspondant. Le lemme 6.6 assure que  $z_a$  est dans  $Z_a$ .

Montrons maintenant que  $z_a$  est dans  $Z_0$ . Pour cela, remarquons que, d'après le lemme 6.1, tout caractère de  $Z_a$  est le caractère central d'une représentation irréductible proximale de  $G_a$ . Supposons par l'absurde que  $z_a$  n'est pas dans  $Z_0$ , on peut alors trouver une représentation irréductible proximale  $\rho^{\chi_a}$  de  $G_a$  triviale sur  $Z_0$  et telle que  $c^{\chi_a}(z_a) = -1$ . Comme  $\mathfrak{g}_a$  est de type  $A$ , il existe une représentation irréductible proximale autoduale  $\rho^{\chi'_a}$  de  $\mathfrak{g}_a$  ayant même caractère central que  $\rho^{\chi_a}$ . En particulier  $\rho^{\chi'_a}$  s'intègre en une représentation de  $G_a$ . L'égalité  $\rho^{\chi'_a}(z_a) = -1$  et l'autodualité de  $\rho^{\chi'_a}$  assurent que  $\rho^{\chi'_a}$  est symplectique (lemme 6.6). L'égalité  $\rho^{\chi'_a}(Z_0) = 1$  assure que  $\rho^{\chi'_a}$  se prolonge en une représentation de  $G$  triviale sur  $G_b$ . On a ainsi construit une représentation irréductible proximale symplectique de  $G$ . Contradiction.

Comme  $z_a$  est dans  $Z_0$ , il existe, d'après le lemme 6.9 un élément  $Y_b$  de  $\mathfrak{g}_b$  tel que, pour toute représentation irréductible proximale  $\rho^{\chi_b}$  de  $G_b$ , on a l'équivalence

$$c^{\chi_b}(z_a) = 1 \iff n^{\chi_b}(Y_b) \text{ est pair .}$$

Montrons que l'élément  $Y := Y_a + Y_b$  de  $\mathfrak{g}$  convient. Soit  $\rho^{\chi}$  une représentation irréductible proximale de  $G$ . Cette représentation est un produit tensoriel  $\rho^{\chi} = \rho^{\chi_a} \otimes \rho^{\chi_b}$  de représentations irréductibles proximales de  $G_a$  et  $G_b$ . D'après le lemme 6.6, on a aussi l'équivalence

$$c^{\chi_a}(z_a) = 1 \iff n^{\chi_a}(Y_a) \text{ est pair .}$$

L'égalité

$$c^{\chi_a}(z_a)c^{\chi_b}(z_a) = 1$$

prouve alors que  $n^{\chi_a}(Y_a)$  et  $n^{\chi_b}(Y_b)$  sont de même parité, et l'égalité

$$n^{\chi}(Y) = n^{\chi_a}(Y_a) + n^{\chi_b}(Y_b) ,$$

prouve que  $n^{\chi}(Y)$  est pair. □

## Références

- [1] H.ABELS, G.MARGULIS, G.SOIFER - Semigroups containing proximal linear maps, *Isr.Jour. Math.* 91 (1995) p.1-30.
- [2] Y.BENOIST - Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Annals of Math.* 144 (1996) p.315-347.
- [3] Y.BENOIST - Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geom. Funct. Anal.* 7 (1997) p.1-47.
- [4] Y.BENOIST - Groupes linéaires à valeurs propres positives et automorphismes des cônes convexes, *Comptes Rendus Acad. Sc.* 325 (1997) p.471-474.
- [5] Y.BENOIST, F.LABOURIE - Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, *Inv. Math.* 111 (1993) p.285-308.
- [6] N.BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie ch. 4,5 et 6, Masson (1981).
- [7] N.BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie ch. 7 et 8, CCLS (1975).
- [8] J.P.BENZECRI - Sur les variétés localement affines et localement projectives, *Bull. Soc. Math. Fr.* 88 (1960) p.229-332.
- [9] A.BOREL - Linear algebraic groups, GTM 126 Springer (1991).
- [10] S.CHOI, W.GOLDMAN - Convex real projective structures on closed surfaces are closed, *Proc. Am. Math. Soc.* 118 (1993) p.657-661.
- [11] P.FOULON - Locally symmetric Finsler spaces in negative curvature, *Comptes Rendus Acad. Sc.* 324 (1997) p.1127-1132.
- [12] H.FURSTENBERG - Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. *Proc. Symp. Pure Math.* 26 (1972) p.193-229.
- [13] W.GOLDMAN - Convex real projective structures on compact surfaces, *Journ. Diff. Geom.* 31 (1990) p.791-845.
- [14] I.GOLDSHEID, Y.GUIVARC'H - Zariski closure and the dimension of the Gaussian law of the product of random matrices, *Proba. Th. Relat. Fields* 105 (1996) p.109-142.
- [15] Y. GUIVARC'H - Produits de matrices aléatoires et applications, *Erg. Th. Dyn. Sys.* 10 (1990) p.483-512.
- [16] S.HELGASON - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press (1978).
- [17] S.HELGASON - Groups and geometric analysis, Acad. Press (1984).
- [18] J.HUMPHREYS - Linear algebraic groups, GTM 21 Springer (1975).
- [19] D.JOHNSON, J.MILLSON - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." *Progress in Math.* 67 (1984) p.48-106.
- [20] V.KAC, E.VINBERG - Quasihomogeneous cones, *Math. Notes* 1 (1967) p.231-235.
- [21] B.KOSTANT, S.RALLIS - Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. Journ. Math.* 93 (1971) p.753-809.
- [22] J.L.KOSZUL - Déformation des connexions localement plates, *Ann. Inst. Fourier* 18 (1968) p.103-114.
- [23] W.THURSTON - The geometry and topology of three manifolds, in preparation.
- [24] J.TITS - Free subgroups in linear groups, *Jour. of Algebra* 20 (1972) p.250-270.
- [25] J.VEY - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa* 24 (1970) p.641-665.

Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris

benoist@dmi.ens.fr