

## TORES AFFINES

Yves Benoist

### Abstract : Affine tori

The aim of these lecture notes is to describe the flat affine structures on tori and more generally the flat projective structures on tori.

We begin by the very explicit description of the flat affine structures and of the flat projective structures on the 2-dimensional torus due to Nagano, Yagi and Goldman.

Then we explain the bricks theorem which roughly asserts that every flat projective structure with nilpotent holonomy on a compact manifold is obtained by glueing “bricks”. In general, the combinatorics of the bricks and of their glueing is far from being trivial. However, we give a few examples where these combinatorics can be completely described :

- ★ For projective structures on filiform nilmanifolds.
- ★ For complex projective structures on nilmanifolds.
- ★ For projective structures with diagonal holonomy (these structures were first introduced by Smillie).
- ★ For projective structures with unipotent holonomy.
- ★ For projective structures with cyclic holonomy.
- ★ For projective structures with nilpotent holonomy on low dimensional manifolds (dimension 3,4,...).

As an application we describe the projective structures on  $\mathbb{T}^3$ .

In the appendix we describe all the couples  $(B, Y)$ , where  $B$  is a closed connected subgroup of the group  $A$  of diagonal  $n \times n$  matrices with non zero real coefficients and where  $Y$  is an  $A$ -invariant open subset of  $\mathbb{R}^n$  on which  $B$  acts properly with compact quotient  $B \backslash Y$ . The description uses “fans”. It is purely topological but has to be compared to the theory of “toric varieties” in algebraic geometry.

## Introduction

Ces notes constituent une introduction à l'étude des structures affines (plates) sur les tores et plus généralement des structures projectives (plates) sur les tores.

Pour des introductions à d'autres aspects des variétés affines et projectives, nous renvoyons à [21], [25], [7] et [15].

La première partie est consacrée au tore  $\mathbb{T}^2$  : c'est surtout, pour nous, l'occasion de donner les définitions de base, de décrire très explicitement les structures projectives sur le tore  $\mathbb{T}^2$  et d'aiguiser notre intuition. Les résultats de cette partie sont dûs à Nagano, Yagi et Goldman.

Les trois autres parties sont centrées autour du théorème de structure des variétés projectives compactes à holonomie nilpotente (dit théorème des briques) qui affirme grosso modo que notre variété est obtenue par recollement de "briques". Ces "briques" sont des généralisations multidimensionnelles des anneaux de Goldman. En dimension 2 ce théorème nous redonne donc la description des structures projectives sur le tore  $\mathbb{T}^2$ .

En général, la combinatoire des briques et de leur recollement n'est pas du tout triviale. Voici quelques exemples où cette combinatoire peut être décrite complètement.

- ★ Lorsque la variété sous-jacente est une nilvariété filiforme. Dans ce cas toutes les structures projectives sont affines et "invariantes à gauche".
- ★ Pour les variétés affines complexes à holonomie nilpotente. Nous verrons, par exemple, que toutes les structures projectives complexes sur les tores sont affines et "invariantes à gauche".
- ★ Lorsque l'holonomie est diagonale : cette combinatoire se décrit à l'aide des "jeux compacts d'éventails simpliciaux". Elle est basée sur l'appendice. Les variétés projectives à holonomie diagonale ont été introduites par Smillie (voir [24]). Nous donnons ici une classification de ces variétés.
- ★ Lorsque l'holonomie est unipotente : dans ce cas, il y a une seule brique.
- ★ Lorsque le groupe d'holonomie est cyclique : dans ce cas, on obtient une description complète des variétés projectives à holonomie cyclique.
- ★ En dimension 3, 4... la combinatoire des briques est encore assez simple. Ce qui permet de déterminer la topologie de la variété.

Comme application, nous déterminerons toutes les structures affines et toutes les structures projectives sur le tore  $\mathbb{T}^3$ .

Nous terminerons ce cours par un appendice que l'on peut considérer comme une présentation purement topologique de la théorie des variétés toriques. Dans cet appendice, on associe à tout sous-groupe fermé  $B$  du groupe  $A$  des matrices diagonales réelles et à toute partie  $Y$   $A$ -invariante de  $\mathbb{R}^n$  un "éventail" et on montre que l'action de  $B$  sur  $Y$  est propre avec un quotient  $B \backslash Y$  compact si et seulement si l'éventail est "complet et simplicial".

Ces notes sont basées sur un cours que j'ai donné au workshop "Transformation groups and differential geometry" à Palerme en juin 1993.

# 1 Structures affines et projectives sur $\mathbb{T}^2$

On décrit dans cette partie les structures affines et les structures projectives sur le tore  $\mathbb{T}^2$ . Ces exemples sont très utiles pour la compréhension du théorème des briques (théorème 2.1).

## 1.1 Variétés affines

Commençons par les définitions de base pour les variétés affines.

Rappelons qu'une variété (resp. variété à bord, variété à coins) de classe  $C^\infty$  est un espace topologique séparé et paracompact muni d'un atlas de cartes à valeurs dans des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $[0, \infty[^n$ ) dont les changements de cartes sont des difféomorphismes  $C^\infty$ .

**Définition 1.1** *Une variété affine (sous-entendue plate et sans torsion) est une variété munie d'un atlas de cartes appelées cartes affines  $\phi_i : V_i \rightarrow U_i$ , où les  $V_i$  sont les ouverts d'un recouvrement de  $V$  et les  $U_i$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , pour lesquelles les applications de recollement  $g_{ji} := \phi_j \circ (\phi_i^{-1}|_{\phi_i(V_i \cap V_j)})$  sont localement des applications affines de  $\mathbb{R}^n$  c'est à dire des composées d'une application linéaire et d'une translation.*

**Remarque** - On considère comme égales les structures affines sur  $V$  définies par deux atlas dont la réunion est un atlas qui définit encore une structure affine.

- On peut généraliser cette définition au cas où  $V$  est une variété  $C^\infty$  à coins en prenant pour  $U_i$  des ouverts de  $X^+ := [0, \infty[^n$ . On parle alors de variété affine à coins.

On note  $\mathbb{A}^n$  la variété affine  $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$  dont une carte affine est l'identité. On note  $G := \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$  le groupe des bijections affines de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose désormais  $V$  connexe.

**Définition 1.2** *Une application entre deux variétés affines est dite affine, si lue dans les cartes, elle est donnée par une application affine de  $\mathbb{R}^n$ .*

*La variété affine  $V$  est dite homogène si le groupe  $\text{Aff}(V)$  des transformations affines de  $V$  agit transitivement sur  $V$ .*

Le revêtement universel  $\tilde{V}$  d'une variété affine  $V$  a une structure affine naturelle: celle pour laquelle la projection

$$\pi : \tilde{V} \rightarrow V$$

est une application affine. Tout élément  $\gamma$  du groupe fondamental

$$\Gamma := \pi_1(V)$$

est alors une transformation affine de  $\tilde{V}$ . Réciproquement, une structure affine sur  $\tilde{V}$  pour laquelle tout élément de  $\Gamma$  est une transformation affine sur  $\tilde{V}$  provient d'une unique structure affine sur  $V$ .

Il existe un difféomorphisme local affine  $D : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{A}^n$ , appelé développante, que l'on obtient par "prolongement analytique" des cartes. Si  $D'$  est une autre

développante, il existe une unique bijection affine  $g$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $D' = g \circ D$ . Pour toute transformation affine  $\psi$  de  $\tilde{V}$ , il existe donc un unique élément  $h(\psi)$  de  $G$ , appelé holonomie de  $\psi$ , tel que

$$D \circ \psi = h(\psi) \circ D .$$

On appelle morphisme d'holonomie, le morphisme  $h : \Gamma \rightarrow G$  que l'on en déduit.

**Définition 1.3** *La variété affine  $V$  est dite complète si  $D$  est un revêtement.*

Autrement dit,  $V$  est complète si et seulement si  $\tilde{V} = \mathbb{A}^n$ . On a alors  $V = \Gamma \backslash \mathbb{A}^n$  où  $\Gamma$  est un groupe de transformations affines de  $\mathbb{A}^n$  qui agit proprement discontinument et sans point fixe sur  $\mathbb{A}^n$ .

**Remarque** La donnée sur  $V$  d'une structure affine permet de parcourir sur  $V$  des lignes droites à vitesse constante, car cette propriété ne dépend pas de la carte dans laquelle on la lit, mais elle ne permet pas de dire quelle est la vitesse de parcours! Ces lignes droites sont appelées géodésiques. La variété est complète si et seulement si, on peut parcourir toutes ces lignes droites à vitesse constante pendant un temps infini dans les deux sens.

**Exercice** Montrer que  $V = \mathbb{S}^2$  n'a pas de structure affine.

**Exemple 1.4 (structures affines invariantes par multiplication)** Soient  $L$  un groupe de Lie connexe de dimension  $n$ ,  $\rho : L \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$  un morphisme tel que  $L$  a une orbite ouverte  $\Omega$  dans  $\mathbb{A}^n$ . Soit  $x_0$  dans  $\Omega$ . Il existe une (unique) structure affine sur  $L$  telle que l'application

$$\begin{aligned} D : L &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ l &\longrightarrow \rho(l).x_0 \end{aligned}$$

est affine. Cette structure affine est invariante par multiplication à gauche; c'est à dire que, pour tout  $l$  dans  $L$ , la multiplication à gauche par  $l$  est une transformation affine de  $L$ .

Réciproquement, si  $L$  est simplement connexe, on construit ainsi toutes les structures affines sur  $L$  invariantes par multiplication à gauche.

**Exemple 1.5 (structures affines invariantes par multiplication sur  $\mathbb{S}^1$ )** Les structures affines invariantes par multiplication sur le groupe  $V = \mathbb{S}^1 = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}$  sont données par des morphismes  $\rho : L = \mathbb{R} \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R})$ . Il y a deux cas, à conjugaison près.

1)  $\rho(\mathbb{R})$  est le groupe à un paramètre des translations. Dans ce cas,  $V$  est complète et  $V \simeq \mathbb{A}^1 / x \sim x+1$ .

2)  $\rho(\mathbb{R})$  est un groupe à un paramètre d'homothéties. Supposons ces homothéties centrées en 0. Dans ce cas,  $\tilde{V}$  est la demi-droite affine  $\mathbb{A}_+^1 := \{x \in \mathbb{A}^1 / x > 0\}$ , et il existe  $\lambda > 0$  tel que  $V \simeq \mathbb{A}_+^1 / x \sim \lambda x$ .

**Exercice** Montrer qu'on obtient ainsi, à difféomorphisme près, toutes les structures affines sur  $\mathbb{S}^1$ .

Par définition, deux structures affines sur  $V$  sont dites "égales à difféomorphisme près" si il existe une bijection affine de l'une sur l'autre.

## 1.2 Structures affines sur $\mathbb{T}^2$

Décrivons deux familles d'exemples de structures affines sur le tore  $\mathbb{T}^2$ . Nous verrons que ce sont les seuls.

**Exemple 1.6 (structures affines invariantes par multiplication sur  $\mathbb{T}^2$ )**

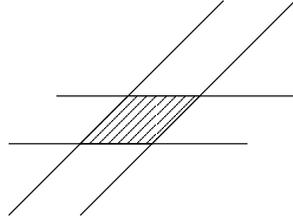


Figure 1: Droites  $y = ax + b$

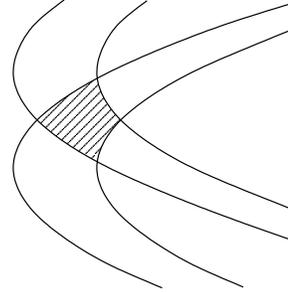


Figure 2: Paraboles  $x + a = (y + b)^2$

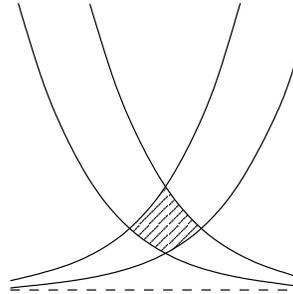


Figure 3: Exponentielles  $y = ae^{bx}$

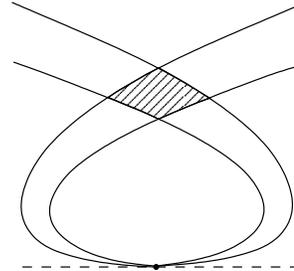


Figure 4: Courbes  $x = ay \log(by)$

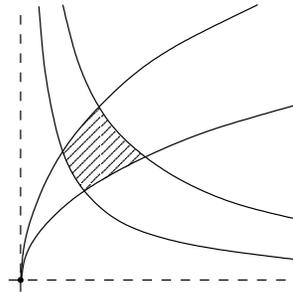


Figure 5: Puissances  $y = ax^b$

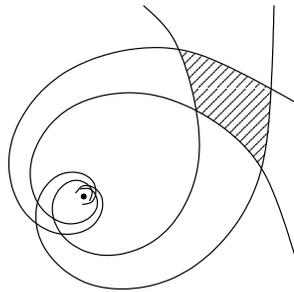


Figure 6: Spirales  $r = ae^{b\theta}$

Les structures affines invariantes par multiplication sur le groupe  $V = \mathbb{T}^2 = \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$  sont données par des morphismes  $\rho : L = \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ . Il y a six cas, à

conjugaison près : l'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  de l'image  $K := \rho(L)$  est l'une des sous-algèbres de Lie commutatives suivantes où  $(x, y)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{k}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{k}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{k}_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{k}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{k}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dans les cas 1 et 2,  $\tilde{V}$  est le plan. Dans les cas 3 et 4,  $\tilde{V}$  est un demi-plan. Dans le cas 5,  $\tilde{V}$  est un quart de plan. Dans le cas 6,  $\tilde{V}$  est le revêtement universel de  $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ . Nous avons dessiné pour chacun de ces cas des domaines fondamentaux pour l'action de  $\Gamma$  dans  $\tilde{V}$ , délimités par des arcs d'orbites de groupes à un paramètre de  $K$ . Dans ces dessins, on retrouve le tore  $\mathbb{T}^2$  en identifiant les arcs opposés du domaine fondamental à l'aide d'un élément de  $K$ .

**Exercice** Dessiner, dans chacun de ces six cas, le pavage de  $\tilde{V}$  obtenu à partir de ce domaine fondamental.

Un cas particulier intéressant, avec  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_6$ , est le tore de Hopf:  $\mathbb{T}_\lambda^2 = \mathbb{A}^2 - \{0\} / v \sim \lambda v$ , pour un réel  $\lambda$  tel que  $0 < \lambda < 1$ . Dans ce cas, l'holonomie est un morphisme non injectif.

Dans ce dessin, on retrouve le tore de Hopf à partir de l'anneau en identifiant les deux cercles limites à l'aide de l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

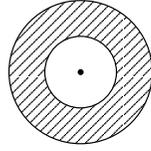
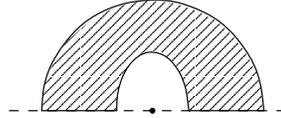


Figure 7: Tore de Hopf

Figure 8: Anneau  $A_g$ 

On peut bien sûr généraliser la construction du tore de Hopf en remplaçant l'homothétie par une contraction linéaire... C'est l'objet de l'exemple suivant.

**Exemple 1.7 (structures affines non homogènes sur  $\mathbb{T}^2$ )** Soient  $p \geq 1$  et  $g$  une contraction linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dont les deux valeurs propres sont réelles positives. Dans une base convenable, on a

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } 0 < \alpha, \beta < 1, \quad \text{ou} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

Soit  $D := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 / y \geq 0 \text{ et } (x, y) \neq 0\}$ . Le groupe  $\langle g \rangle$  engendré par  $g$  agit proprement discontinument sur  $D$ . On note  $A_g := \langle g \rangle \backslash D$ , c'est une surface affine à bord qui topologiquement est un anneau. On peut recoller  $p$  de ces anneaux de la façon suivante:

Soit  $h$  une matrice inversible qui commute à  $g$  et préserve  $D$ . On a

$$h = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha', \beta' > 0, \quad \text{ou} \quad h = \begin{pmatrix} \alpha' & t \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha' > 0.$$

On repère un élément de  $\widetilde{\mathbb{A}^2-0}$  par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , on note  $D_p$  le secteur

$$D_p := \{(r, \theta) \in \widetilde{\mathbb{A}^2-0} / \theta \in [0, p\pi]\}$$

et  $\tau$  la rotation d'angle  $\pi$  dans  $\widetilde{\mathbb{A}^2-0}$ :  $\tau(r, \theta) = (r, \theta + \pi)$ . On note encore  $h$  et  $g$  les relevés à  $\widetilde{\mathbb{A}^2-0}$  de  $h$  et  $g$  qui laissent stables les demi-droites horizontales  $\Delta_k := \{(r, \theta) / \theta = k\pi\}$ . Soit  $X_{p,h}$  la surface affine obtenue à partir de  $D_p$  en identifiant les deux demi-droites du bord de  $D_p$  grace à l'application  $\tau^{-p}h$ :

$$X_{p,h} = \langle \tau^{-p}h \rangle \backslash \widetilde{\mathbb{A}^2-0}.$$

Comme  $h$  et  $g$  commutent,  $g$  agit sur  $X_{p,h}$  proprement et le quotient est un tore affine, on le note  $\mathbb{T}_{g,p,h}^2$ : cette surface est aussi obtenue en recollant  $p$  anneaux  $A_g$  de sorte que  $h$  est l'holonomie le long d'un lacet qui lie ces anneaux.

**Exercice** - Démontrer que, lorsque  $g$  ou  $h$  n'est pas une homothétie, les tores affines  $V := \mathbb{T}_{g,p,h}^2$  ainsi construits ne sont pas homogènes.

- Démontrer que la structure affine sur le revêtement universel de  $\mathbb{T}_{g,p,h}^2$  est homogène.

**Théorème 1.8** (Nagano-Yagi) *Une structure affine sur le tore  $\mathbb{T}^2$  est, à difféomorphisme près, soit*

- une structure invariante par multiplication (tores homogènes de l'exemple 1.6),
- un des tores  $\mathbb{T}_{g,p,h}^2$  (tores non homogènes de l'exemple 1.7).

Nous verrons en 2.2 une démonstration de ce théorème.

**Remarque** Benzecri a montré que les surfaces compactes  $\Sigma_g$  de genre  $g \geq 2$  n'ont pas de structures affines (voir [6]).

### 1.3 Variétés projectives

Donnons maintenant les définitions de base pour les variétés projectives.

**Définition 1.9** *Une variété projective  $V$  est une variété munie d'un atlas de cartes appelées cartes projectives  $\phi_i : V_i \rightarrow U_i$  où les  $V_i$  sont les ouverts d'un recouvrement de  $V$  et les  $U_i$  des ouverts de l'espace  $X := \mathbb{S}^n = \{\text{demi-droites de } \mathbb{R}^{n+1}\}$ , pour lesquelles les applications de recollement sont localement des transformations projectives de  $\mathbb{S}^n$ , c'est à dire des éléments du groupe*

$$G := SL^\pm(n+1, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) / \det g = \pm 1\}.$$

**Remarque** - On peut généraliser cette définition au cas où  $V$  est une variété à coins en remplaçant l'espace modèle  $X := \mathbb{S}^n$  par  $X^+ = \mathbb{S}_+^n := \{\text{demi-droites de } [0, \infty^{[n+1]}\}$ .

- Selon que l'on aura à faire à une variété affine ou à une variété projective, les symboles  $G$ ,  $X$ ,  $X^+$  auront donc une signification différente. Plus généralement, si

$G$  est un groupe de transformation analytique sur un espace  $X$ , une  $(G, X)$ -variété est une variété munie de cartes à valeurs dans  $X$  pour lesquelles les applications de recollement sont dans  $G$ .

- On peut encore définir les géodésiques sur ces variétés projectives  $V$ ; ce sont les courbes qui lues dans les cartes sont des grands cercles; on ne sait pas parcourir celles-ci à vitesse constante, mais seulement à accélération constante car on sait définir le birapport de quatre points alignés suffisamment proches.

Comme en 1.1,

- on définit les applications projectives entre variétés projectives,
- on construit une développante  $D : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{S}^n$  et une holonomie  $h : \Gamma \rightarrow G$ ,
- on dit que  $V$  est complète si la développante  $D$  est un revêtement... et donc un difféomorphisme si  $n \geq 2$ .
- on identifie les structures projectives invariantes par multiplication à gauche sur un groupe de Lie simplement connexe  $L$  aux actions projectives de  $L$  sur  $\mathbb{S}^n$  munies d'une orbite ouverte, où  $n = \dim(L)$ .

**Exercice** Montrer que l'espace projectif  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n := \{\pm Id\} \backslash \mathbb{S}^n$  a une seule structure projective, à difféomorphisme près.

Les deux remarques suivantes montrent que l'étude des variétés affines est fortement liée à celle des variétés projectives.

**Remarque** - Toute variété affine est projective: il suffit d'identifier  $\mathbb{R}^n$  à un hémisphère ouvert de  $\mathbb{S}^n$ .

- Réciproquement, si  $V$  est une variété projective, on peut munir le produit  $V \times \mathbb{S}^1$  d'une structure affine. En effet, soient

$$Y := (\mathbb{R}^{n+1} - 0) /_{x \sim 2x}$$

et  $p : Y \rightarrow \mathbb{S}^n$  la projection naturelle, c'est un fibré en cercle  $\mathbb{S}^1$  topologiquement trivial tel que l'action de  $G$  sur  $\mathbb{S}^n$  se relève à  $Y$ . Ceci permet de construire le fibré

$$\widehat{W} = \tilde{V} \times_{\mathbb{S}^n} Y := \{(\tilde{v}, y) \in \tilde{V} \times Y / D(\tilde{v}) = p(y)\}$$

relevé à  $\tilde{V}$  du fibré  $Y$ . Le groupe  $\Gamma$  agit sur ce fibré grâce à la formule

$$\gamma(\tilde{v}, y) = (\gamma\tilde{v}, h(\gamma)y).$$

La variété quotient  $W := \Gamma \backslash \widehat{W}$  est alors une variété affine difféomorphe à  $V \times \mathbb{S}^1$ .

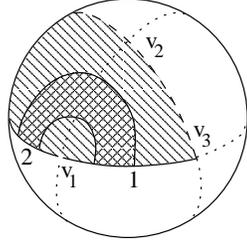
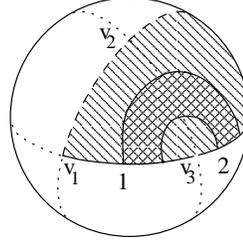
**Exercice** Montrer qu'une structure projective sur le cercle  $\mathbb{S}^1$  est affine ou est complète. En particulier elle est, à difféomorphisme près, invariante à gauche.

**Exercice** Montrer, comme dans l'exemple 1.6, qu'il y a cinq sortes de structures projectives invariantes par multiplication à gauche sur  $\mathbb{T}^2$ : elles proviennent toutes d'une structure affine invariante par multiplication, mais celles données par  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_3$  et  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_4$  sont projectivement équivalentes.

## 1.4 Structures projectives sur $\mathbb{T}^2$

Décrivons maintenant des structures projectives sur le tore  $\mathbb{T}^2$  obtenues en recollant des anneaux. C'est l'exemple le plus simple de "recollement de briques" que nous étudierons en 2.1

**Exemple 1.10 (Anneaux et tores de Goldman)** Soit  $g$  une matrice  $3 \times 3$  ayant des valeurs propres réelles positives distinctes. Il existe une base  $(v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $g$  est une matrice diagonale  $g = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , avec  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ . Cet élément  $g$  préserve l'hémisphère  $\{x \in \mathbb{S}^2 / x_1 > 0\}$  et s'y identifie à la contraction linéaire de  $\mathbb{R}^2$  donnée par la matrice  $\text{diag}(\lambda_2/\lambda_1, \lambda_3/\lambda_1)$ . Ceci permet de construire, comme dans l'exemple 1.7 un anneau affine  $A_g$  que l'on regarde comme un anneau projectif. On note  $B_g$  l'anneau  $A_{g^{-1}}$ : les rôles de  $v_1$  et  $v_3$  y sont échangés.

Figure 9: Anneau  $A_g$ Figure 10: Anneau  $B_g$ 

Le revêtement universel des bords de  $A_g$  et de  $B_g$  sont des arcs de grand cercle qui relient un vecteur propre attracteur  $\pm v_1$  à un vecteur propre répulseur  $\pm v_3$ .

Le même procédé de recollement que dans l'exemple 1.7 permet de construire pour tout mot  $w = C_1 \dots C_p$  où  $C_i = A$  ou  $B$ , et tout élément  $h = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ , avec  $\mu_j > 0$ , un tore projectif noté  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  en recollant successivement, dans l'ordre du mot  $w$ , des anneaux  $A_g$  ou  $B_g$  de sorte que  $h$  soit l'holonomie le long d'un lacet qui lie ces anneaux.

Par souci de précision, explicitons la construction de  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$ . On a les égalités :

$$\tilde{A}_g = \{x \in \mathbb{S}^2 / x_1 > 0, x_2 \geq 0 \text{ et } (x_2, x_3) \neq 0\}$$

et

$$\tilde{B}_g = \{x \in \mathbb{S}^2 / x_3 > 0, x_2 \geq 0 \text{ et } (x_1, x_2) \neq 0\}.$$

Affectons un numéro aux arcs du bord de  $\tilde{A}_g$  (resp.  $\tilde{B}_g$ ) : le numéro 1 à l'arc de grand cercle reliant  $v_1$  à  $v_2$  et le numéro 2 à l'arc de grand cercle reliant  $-v_3$  à  $v_1$  (resp.  $-v_1$  à  $v_3$ ). Soient  $C$  le groupe à quatre éléments

$$C := \{\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) / \varepsilon_j = \pm 1 \text{ et } \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1\},$$

$U := \mathbb{S}^2 - \{\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3\}$  et  $\tilde{U}$  le revêtement universel de  $U$ .

Une partie  $D_0$  de  $\tilde{U}$  est dite de type  $A$  (resp.  $B$ ) si la projection  $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$  induit un homéomorphisme de  $D_0$  sur son image et si cette image est une des

quatre parties  $\sigma(\tilde{A}_g)$  (resp.  $\sigma(\tilde{B}_g)$ ) avec  $\sigma$  dans  $C$ . Les arcs du bords de  $D_0$  ont une numérotation induite par  $\sigma \circ \pi$ .

Soit  $(D_i)_{1 \leq i \leq p}$  une suite de parties de  $\tilde{U}$  de type  $C_i$  telle que, pour  $i = 1, \dots, p-1$ , le deuxième arc du bord de  $D_i$  égale le premier de  $D_{i+1}$ : une telle suite existe et est uniquement déterminée par  $D_1$ . Soit  $X_{w,h}$  la surface projective obtenue à partir de la réunion des  $D_i$  en identifiant le deuxième arc du bord de  $D_p$  au premier arc du bord de  $D_1$  grâce à la transformation projective de  $\tilde{U}$  dont l'holonomie est de la forme  $h\sigma$  avec  $\sigma$  dans  $C$ . On note encore  $g$  la transformation projective de  $\tilde{U}$  qui relève  $g$  et qui préserve les parties  $D_i$ . Comme  $h$  et  $g$  commutent, le groupe  $\langle g \rangle$  agit sur  $X_{w,h}$  proprement et le quotient  $\langle g \rangle \backslash X_{w,h}$  est le tore projectif  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  que nous voulions construire.

**Exercice** - Montrer que  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2 \approx \mathbb{T}_{g,w,gh}^2$ .

- Montrer que si  $w$  et  $w'$  sont des mots qui se déduisent l'un de l'autre par permutation circulaire, alors  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2 \approx \mathbb{T}_{g,w',h}^2$ .

- Montrer que  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  est affine si et seulement si  $w = A^p$  ou  $B^p$ .

- Montrer que la structure projective sur le revêtement universel de  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  est homogène si et seulement si  $w \neq A^p$  et  $B^p$ .

- Montrer que la développante de  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  est un revêtement sur son image si et seulement si  $w = A^p, B^p, (AB)^q$  ou  $(BA)^q$ .

- Montrer que, si  $w = (AB)^2$  et  $h = 1$ , on a  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2 \approx \langle g \rangle \backslash \hat{V}$  où  $\hat{V}$  est la sphère  $\mathbb{S}^2$  privée de deux demi-grands cercles fermés, le premier d'extrémités  $-v_1$  et  $v_1$  passant par  $v_2$  et le deuxième d'extrémités  $-v_3$  et  $v_3$  passant par  $-v_2$ .

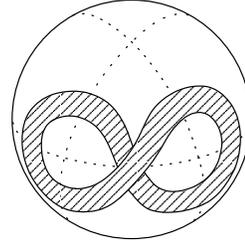
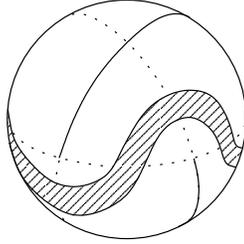


Figure 11: Tore projectif avec  $w = (AB)^2$       Figure 12: Tore projectif avec  $w = A^2 B^2$

**Théorème 1.11 (Goldman)** Une structure projective sur le tore  $\mathbb{T}^2$  est soit affine, soit un des tores  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  de l'exemple 1.10.

Nous verrons une démonstration de ce théorème en 2.2.

## 1.5 Structures projectives sur $\mathbb{K}^2$

Notons  $\tau : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  le difféomorphisme d'ordre 2 donné par  $\tau(x, y) = (x + \frac{1}{2}, -y)$  où  $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . La bouteille de Klein est la variété  $C^\infty$  quotient  $\mathbb{K}^2 := \langle \tau \rangle \backslash \mathbb{T}^2$ . Les structures projectives sur  $\mathbb{K}^2$  s'identifient donc aux structures projectives  $\tau$ -invariantes sur  $\mathbb{T}^2$ . Voici un exemple d'une telle structure.

**Exemple 1.12 (structures projectives sur  $\mathbb{K}^2$ )** Soient  $g = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , avec  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$  et  $w = C_1 \cdots C_p$  un mot en  $A$  et  $B$  avec  $p \geq 1$ , comme dans l'exemple 1.10 (et  $h = 1$ ). Soit  $\tau$  une symétrie de l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$ , c'est à dire une bijection pour laquelle  $\tau(i) + i$  est constante modulo  $p$ . On suppose que le mot  $w$  est  $\tau$ -symétrique, c'est à dire que  $C_{\tau(i)} = C_i$ ,  $\forall i$ .

On note  $Y$  le tore projectif  $\mathbb{T}_{g^2, w, 1}^2$  et  $\omega_i$  l'image dans  $Y$  de l'intérieur de la partie  $D_i$ . Ce sont des anneaux ouverts disjoints dont les adhérences recouvrent  $Y$ . Il existe une unique transformation projective  $\tau_g$  de  $Y$  dont l'holonomie est de la forme  $-g\sigma$  avec  $\sigma$  dans  $C$  et telle que  $\tau_g(\omega_i) = \omega_{\tau(i)}$ ,  $\forall i$ . On a  $\tau_g^2 = 1$ . Le quotient  $\langle \tau_g \rangle \backslash Y$  est une bouteille de Klein projective. On la note  $\mathbb{K}_{g, w, \tau}^2$ .

**Corollaire 1.13** Une structure projective sur la bouteille de Klein est soit affine, soit une des bouteilles de Klein  $\mathbb{K}_{g, w, \tau}^2$  de l'exemple 1.12.

**Exercice** - Montrer que si  $(w', \tau')$  se déduit de  $(w, \tau)$  par une permutation circulaire de  $\{1, \dots, p\}$ , alors  $\mathbb{K}_{g, w', \tau'}^2 \approx \mathbb{K}_{g, w, \tau}^2$ .

- Montrer que si  $w = A^2$ ,  $\mathbb{K}_{g, w, \tau}^2$  est le quotient de  $\mathbb{R}^2 - 0$  par une contraction linéaire de  $\mathbb{R}^2$  qui renverse l'orientation :  $\pm \text{diag}(-\alpha_2, \alpha_3)$  où  $0 < \alpha_2, \alpha_3 < 1$ .

- Décrire  $\mathbb{K}_{g, w, \tau}^2$  lorsque  $w = A$ .

**Remarque** Les surfaces compactes  $\Sigma_g$  de genre  $g \geq 2$  admettent de nombreuses structures projectives; celles-ci ont été décrites par Choi et Goldman ([8],[14]). Voici la façon la plus simple d'en construire: on munit  $\Sigma_g$  d'une métrique à courbure constante  $-1$ . Il existe alors un sous-groupe discret sans torsion  $\Gamma$  de  $G' := SO_e(2, 1)$  tel que  $\Sigma_g \simeq \Gamma \backslash G' / K'$  où  $K' := SO(2)$ . L'action  $G'$  sur  $\mathbb{S}^2$  préserve la calotte ouverte:  $\mathbb{H} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 / x_3 > 0 \text{ et } x_3^2 > x_1^2 + x_2^2\}$ . On en déduit les identifications:  $G' / K' \simeq \mathbb{H}$  puis  $\Sigma_g \simeq \Gamma \backslash \mathbb{H}$ . Ce qui munit  $\Sigma_g$  d'une structure projective.

## 2 Variétés projectives à holonomie nilpotente

Dans cette partie, nous expliquons le théorème de structure des variétés projectives à holonomie nilpotente dit théorème des briques.

Nous en déduisons une démonstration des deux théorèmes de la partie précédente qui classifient les structures affines et projectives sur le tore  $\mathbb{T}^2$ .

Nous donnerons ensuite deux exemples où le théorème des briques permet d'affirmer que certaines structures projectives sont "invariantes à gauches".

### 2.1 Les briques

Voici le théorème des briques autour duquel s'articule l'ensemble de ce texte.

Soit  $V$  une variété affine (resp. projective) compacte,  $D$  sa développante et  $h$  son holonomie. Le groupe  $H := h(\Gamma)$  est appelé groupe d'holonomie.

**On suppose que  $H$  est nilpotent.**

Il existe donc un sous-groupe nilpotent connexe maximal  $N$  de  $G = \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$  (resp.  $SL^\pm(n+1, \mathbb{R})$ ) tel que  $H \cap N$  est d'indice fini dans  $H$ .

On note  $\Gamma' := \{\gamma \in \Gamma / h(\gamma) \in N\}$  et  $\pi : \tilde{N} \rightarrow N$  le revêtement universel.

**Théorème 2.1** ([3] §4.1) *Avec les notations ci-dessus.*

- a) *Il existe une (unique) action de  $\tilde{N}$  sur  $\tilde{V}$  telle que  $D(\tilde{n}\tilde{v}) = \pi(\tilde{n})D(\tilde{v})$ .*
- b) *Le groupe  $N$  a un nombre fini d'orbites dans l'espace modèle  $X = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{S}^n$ .*
- c) *Soit  $\Omega$  une orbite de  $\tilde{N}$  dans  $\tilde{V}$ , alors la restriction de la développante à l'adhérence  $\tilde{\Omega}$  de  $\Omega$  est un revêtement sur son image.*
- d) *Le groupe  $\Gamma_0 := \{\gamma \in \Gamma' / \gamma\Omega = \Omega\}$  ne dépend pas de  $\Omega$ , il est distingué dans  $\Gamma'$  et le quotient  $\Gamma_0 \backslash \tilde{\Omega}$  est compact.*

**Remarque** - Le groupe  $\tilde{N}$  a donc une orbite ouverte dans  $\tilde{V}$ .

- Le quotient  $\bar{\omega} := \Gamma_0 \backslash \tilde{\Omega}$  est une variété à coins affine ou projective appelée *brique*.

La variété  $V' := \Gamma' \backslash \tilde{V}$ , qui est un revêtement fini de  $V$ , est donc obtenue par recollement d'un nombre fini de telles briques  $\bar{\omega}$  le long de leurs bords.

- Dans le cas du tore  $V = \mathbb{T}^2$ , les briques  $\bar{\omega}$  sont, nous le verrons plus loin,

\* soit le tore  $\mathbb{T}^2$

\* soit les anneaux ou la moitié des anneaux construits dans les exemples 1.7 et 1.10.

- En outre si  $N$  est simplement connexe, ces briques  $\bar{\omega}$  s'identifient à  $h(\Gamma_0) \backslash D(\tilde{\Omega})$ .

**Idées de la démonstration** a) Il suffit de montrer que, pour tout  $Y$  dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}$  de  $N$ , le champ de vecteurs induit par  $Y$  sur  $X$  a un relevé  $D^*(Y)$  sur  $\tilde{V}$  qui est un champ de vecteurs complet. Montrons le lorsque  $Y$  est dans le centre de  $\mathfrak{n}$ . Dans ce cas,  $D^*(Y)$  est  $\Gamma$ -invariant et s'identifie donc à un champ de vecteurs sur la variété compacte  $V$ . Il est donc complet.

Lorsque  $Y$  n'est pas dans le centre, on procède par récurrence (voir [3] §2.1).

b) Supposons par exemple que  $G = SL^\pm(n+1, \mathbb{R})$ . Dans ce cas, tout sous-groupe nilpotent connexe maximal  $N$  de  $G$  est, dans une base convenable de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , le groupe des matrices de déterminant 1 diagonales par blocs de tailles  $d_1, \dots, d_r, 2d_{r+1}, \dots, 2d_s$ , chaque bloc de taille  $d$  étant dans le groupe

$$\check{N}_d^{\mathbb{R}} = \{g \in GL(\mathbb{R}^d) / \exists \lambda > 0 / g - \lambda Id \text{ est strictement triangulaire inférieure}\}$$

et chaque bloc de taille  $2d$  étant, en identifiant  $\mathbb{C}^d$  à  $\mathbb{R}^{2d}$ , dans le groupe

$$\check{N}_d^{\mathbb{C}} = \{g \in GL(\mathbb{C}^d) / \exists \lambda \in \mathbb{C}^* / g - \lambda Id \text{ est strictement triangulaire inférieure}\}$$

Il est facile alors de décrire les orbites de  $N$  dans  $\mathbb{S}^n$ ; il n'y en a qu'un nombre fini.

c) et d) Nous renvoyons au §4.1 de [3]. □

Le lemme suivant nous sera utile. On suppose  $n \geq 2$ .

**Lemme 2.2** a) *Si  $\Gamma_0 = 1$ ,  $\tilde{V}$  est la sphère projective  $\mathbb{S}^n$ .*

b) *Si  $\Gamma_0 = \Gamma'$ , alors il existe un groupe nilpotent connexe  $N_0$  de transformations affines ou projectives de  $\tilde{V}$  qui contient  $\Gamma$  et qui agit simplement transitivement sur  $\tilde{V}$ .*

**Démonstration** voir [3] §4.3 et 4.4. □

## 2.2 Le tore $\mathbb{T}^2$

Nous pouvons maintenant terminer la détermination des structures affines et projectives sur le tore  $\mathbb{T}^2$

**Démonstration des théorèmes 1.8 et 1.11** Cherchons tout d'abord à décrire le revêtement fini  $V'$ . Comme  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$  est un groupe de rang 2, il y a trois cas.

Le cas  $\text{rg}(\Gamma_0) = 0$  est exclu par le lemme précédent.

Si  $\text{rg}(\Gamma_0) = 2$ , on a alors  $\Gamma_0 = \Gamma'$  et le lemme précédent prouve que  $V'$  est un tore muni d'une structure affine ou projective invariante.

Il reste à étudier le cas où  $\Gamma_0$  est de rang 1. On distingue plusieurs cas selon les valeurs du sous-groupe nilpotent connexe maximal  $N$  de  $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ . Soit  $\mathfrak{n} := \text{Lie}(N) \oplus \mathbb{R}\text{Id}$ . Il y a quatre possibilités pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}$  : elle est formé des matrices  $X$  de la forme suivante.

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & t & x \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas,  $V'$  est un tore de Goldman. Le deuxième cas est impossible :  $N$  n'a pas d'orbites de dimension 1. Dans le troisième cas,  $V'$  est un des tores affines de l'exemple 1.7. Le dernier cas est impossible : il n'existe pas d'éléments  $\gamma$  de  $N$  qui agissent proprement discontinument avec quotient compact sur une partie  $N$ -invariante et dense de l'hémisphère supérieur fermé.

Pour terminer la démonstration, il faudrait éviter le passage au revêtement fini  $V'$  dont nous avons eu besoin. Pour cela, on remarque que, comme  $H$  est abélien, on peut choisir  $N$  tel que  $H$  est inclus dans la clôture de Zariski  $CN$  de  $N$ . Le groupe quotient  $CN/N$  agit simplement transitivement sur l'ensemble des orbites ouvertes de  $\tilde{N}$  dans  $\tilde{S}^n$ . Donc  $\Gamma$  normalise l'action de  $\tilde{N}$  sur  $\tilde{V}$  et on a l'égalité, pour toute  $\tilde{N}$ -orbite ouverte  $\Omega$  dans  $\tilde{V}$ :

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma / \gamma\Omega = \Omega\}.$$

Si  $\text{rg}(\Gamma_0) = 2$ , on a alors  $\Gamma = \Gamma' = \Gamma_0$  et  $V = V'$ .

Si  $\text{rg}(\Gamma_0) = 1$ ,  $\tilde{V}$  est une réunion d'une succession de  $\tilde{N}$ -orbites : chaque orbite fermée est dans l'adhérence de deux orbites ouvertes et chaque orbite ouverte contient deux orbites fermées dans son adhérence. Tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  préserve forcément cette décomposition et l'ordre de cette décomposition. Donc  $V$  est bien un des tores des exemples 1.7 ou 1.10.  $\square$

## 2.3 Nilvariétés fliformes projectives

On détermine dans cette section toutes les structures projectives sur la nilvariété de Heisenberg de dimension 3.

On appelle nilvariété (resp. solvariété) une variété  $V_0$  diffeomorphe au quotient  $\Gamma \backslash N_0$  d'un groupe de Lie nilpotent (resp. résoluble)  $N_0$  par un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $N_0$ .

Le lien très étroit entre nilvariétés et variétés affines a été mis en évidence par Auslander (voir par exemple [2] ou [21]). Il espérait que les variétés compactes

admettant une structure affine *complète* étaient exactement les variétés revêtues par des solvariétés compactes. Cependant, on sait maintenant qu'il existe des nilvariétés compactes qui n'admettent pas de structures affines (voir [4] et aussi [5]). On ignore toujours si les variétés affines complètes compactes sont toutes revêtues par des solvariétés compactes... mais ceci est une autre histoire.

**Définition 2.3** *On dit qu'une structure affine (resp. projective) sur  $V_0$  est invariante à gauche si, pour une identification convenable  $V_0 \simeq \Gamma \backslash N_0$ , la multiplication à gauche sur  $N_0$  préserve la relevée à  $\widetilde{V}_0$  de la structure affine (resp. projective) sur  $V_0$ .*

**Remarque** - Lorsque  $N_0$  est commutatif, les structures affines invariantes à gauche sur  $V_0$  sont homogènes.

- On a vu que toutes les structures projectives sur la variété  $\mathbb{S}^1$  sont invariantes à gauche, mais que, par contre, il existe des structures affines sur le tore  $\mathbb{T}^2$  qui ne sont pas invariantes à gauche (exemple 1.7).

- Une structure affine (resp. projective) sur une nilvariété compacte  $V$  est invariante à gauche si et seulement si le groupe  $\widetilde{N}$  du théorème des briques agit transitivement sur  $\widetilde{V}$  (cf [3] lemme 4.3)

Une nilvariété de dimension  $n \geq 3$  est dite filiforme si le  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> terme de la suite centrale descendante de  $N_0$  est non trivial. Par exemple les nilvariétés de Heisenberg de dimension 3 sont filiformes. Le corollaire suivant du théorème 2.1 est démontré dans [3].

**Corollaire 2.4** *Soit  $V$  une nilvariété filiforme compacte. Alors toute structure projective sur  $V$  est affine. Toute structure affine sur  $V$  est invariante à gauche.*

**Exercice 2.5** Soit  $V_0$  une nilvariété de Heisenberg de dimension 3.

- Montrer que le produit sur  $\mathbb{R}^3$   $(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + yx')$  permet de définir une structure affine complète invariante à gauche sur  $V_0$ . Montrer que cette structure est homogène.

- Montrer que le produit sur  $\mathbb{R}^3$   $(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y' + xx', z + z' + yx' - \frac{1}{2}x^2x')$  permet de définir une structure affine complète invariante à gauche sur  $V_0$ . Montrer que cette structure n'est pas homogène.

- Déterminer à l'aide du corollaire 2.4 toutes les structures projectives sur  $V_0$  (nota: cela revient à classer toutes les actions affines du groupe de Heisenberg sur  $\mathbb{R}^3$  ayant une orbite ouverte... c'est un peu fastidieux!).

## 2.4 Nilvariétés projectives complexes

Dans le cas complexe, le théorème des briques est bien plus précis.

La définition des variétés affines s'étend au cas complexe : ainsi une variété affine plate complexe est une  $(G, X)$ -variété où  $G$  est le groupe  $\text{Aff}(n, \mathbb{C})$  des transformations affines de l'espace affine  $X := \mathbb{C}^n$ . Nous nous efforcerons de garder l'adjectif *plat*, pour éviter toute confusion avec la terminologie en usage en géométrie algébrique.

De même une variété projective plate complexe est une  $(G, X)$ -variété où  $G$  est le groupe  $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$  des transformations projectives de l'espace projectif  $X := \mathbb{CP}^n$ .

Comme dans le cas réel, les variétés affines plates complexes sont aussi des variétés projectives plates complexes.

En dimension complexe 1, les structures projectives plates complexes sur une courbe complexe compacte (i.e. sur une surface de Riemann compact) ont été décrites par Gunning. Elles sont paramétrées par les différentielles quadratiques holomorphes via le Schwarzien (voir [16]).

En dimension complexe 2, les surfaces complexes admettant une structure projective plate complexe ont été décrites par Kobayashi, Inoue et Ochiai (voir [17] et [18]).

Sur chacune de ces surfaces complexes compactes, Klingler a décrit toutes les structures projectives plates complexes (voir [19] et [20]). Les deux cas les plus délicats sont d'une part les fibrés elliptiques sur une courbe de genre supérieur à 1 et d'autre part les surfaces hyperboliques complexes. Les cas les plus simples sont ceux où le groupe fondamental est nilpotent (i.e. les tores, les surfaces de Kodaira primaire et surface de Hopf). En effet, on peut reprendre dans ce cas les constructions et la démonstration du théorème 2.1 :

Soit  $V$  une variété projective plate complexe de dimension (réelle)  $2n$ . On note encore  $D : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{CP}^n$  une développante et  $h : \Gamma \rightarrow G$  l'holonomie; on introduit un sous-groupe nilpotent connexe maximal  $N$  de  $G = \mathrm{PSL}^\pm(n+1, \mathbb{C})$  qui rencontre le groupe d'holonomie  $H := h(\Gamma)$  en un sous-groupe d'indice fini. Le groupe  $N$  est encore, dans une base convenable de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , le groupe  $N_{d_1, \dots, d_r}^{\mathbb{C}}$  des matrices de déterminant 1 diagonales par blocs de tailles  $d_1, \dots, d_r$ , chaque bloc de taille  $d$  étant dans le groupe

$$\tilde{N}_d^{\mathbb{C}} = \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^d) / \exists \lambda \in \mathbb{C}^* / g - \lambda \mathrm{Id} \text{ est strictement triangulaire inférieure}\}$$

Le groupe  $N$  n'a qu'un nombre fini d'orbites dans  $X = \mathbb{CP}^n$  et ces orbites sont de la forme  $\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q$ .

On a donc l'énoncé suivant qui est un corollaire du théorème 2.1 et de la parité de la dimension (réelle) des orbites.

**Corollaire 2.6** *Soit  $V$  une variété compacte munie d'une structure projective plate complexe. Alors*

- a) *Il existe une (unique) action de  $\tilde{N}$  sur  $\tilde{V}$  telle que  $D(\tilde{n}\tilde{v}) = \pi(\tilde{n})D(\tilde{v})$ .*
- b) *Le groupe  $\tilde{N}$  a une orbite ouverte et dense  $\Omega$  dans  $\tilde{V}$ .*
- c) *La développante  $D : \tilde{V} \rightarrow D(\tilde{V})$  est un revêtement sur son image.*

Comme  $\Gamma$  doit agir proprement sur les orbites de  $\tilde{N}$  la dimension cohomologique  $\mathrm{cd}(\Gamma)$  de  $\Gamma$  est inférieure à la dimension des orbites de  $\tilde{N}$ . On a donc le corollaire suivant

**Corollaire 2.7** *Soit  $V$  une nilvariété compacte. Alors*

*Toute structure projective plate complexe sur  $V$  est affine.*

*Toute structure affine plate complexe sur  $V$  est invariante à gauche.*

**Démonstration** En effet, dans ce cas, on a  $\mathrm{cd}(\Gamma) = \dim_{\mathbb{R}} V$ . □

**Remarque** - Une nilvariété  $V \simeq \Gamma \backslash N_0$  peut admettre des structures affines plates complexes sans que le groupe de Lie nilpotent  $N_0$  n'admette de structure de groupe de Lie complexe : c'est par exemple le cas pour les surfaces de Kodaira primaires pour les quelles,  $N_0$  est le produit de  $\mathbb{R}$  et du groupe de Heisenberg de dimension 3. Par contre, le groupe  $N_0$  admet toujours une structure complexe invariante par multiplication à gauche.

### 3 Variétés affines à holonomie diagonale

Dans cette partie, nous montrons comment, à l'aide de l'appendice, on peut construire toutes les variétés affines ou projectives compactes à holonomie diagonale. On commence par une présentation un peu formelle de cette construction qui aboutit à la proposition 3.4. Puis on réexplique cette construction de façon un peu moins précise mais plus concrète.

#### 3.1 Holonomie diagonale

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par l'expression "holonomie diagonale". Une telle précision n'était pas utile pour l'expression "à holonomie nilpotente" car le fait que le groupe d'holonomie  $H$  soit nilpotent ne dépend pas du choix de la développante.

Soient  $A$  le sous-groupe de  $G = \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$  (resp.  $\text{SL}^\pm(n+1, \mathbb{R})$ ) formé des matrices diagonales,  $A_e$  sa composante connexe et  $C := \{a \in A / a^2 = 1\}$ . Il agit sur l'espace modèle  $X := \mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{S}^n$ ).

**Définition 3.1** *Une variété  $V$  affine (resp. projective) à holonomie diagonale est une  $(A, X)$ -variété.*

Ceci signifie que  $V$  est une variété affine (resp. projective) munie d'une développante  $D$  pour laquelle le groupe d'holonomie  $H$  est inclus dans  $A$ . Les développantes  $D$  et  $a \circ D$ , pour  $a$  dans  $A$ , sont considérées comme équivalentes, mais pas pour  $a$  dans  $G$  en général!

Cette définition précise aussi quels sont les morphismes dans la catégorie des variétés affines (resp. projectives) à holonomie diagonale: ce sont les transformations affines (resp. projectives) dont l'holonomie est diagonale.

#### 3.2 $A_e$ -orbites dans $V$

Décrivons tout d'abord les briques  $\bar{\omega}$ .

Soit donc  $V$  une variété affine (resp. projective) à holonomie diagonale. On peut donc appliquer le théorème 2.1 avec  $N = A_e$ . Remarquons que l'action de  $A_e$  sur  $\tilde{V}$  définie dans ce théorème commute à  $\Gamma$  et induit donc une action de  $A_e$  sur  $V$ . Soient  $\omega$  une  $A_e$ -orbite ouverte dans  $V$  que l'on relève en une  $A_e$ -orbite ouverte  $\Omega$  dans  $\tilde{V}$ . Il existe un unique élément  $\sigma$  dans  $C$  tel que la partie

$$Y_\omega^+ := \sigma(D(\tilde{\Omega}))$$

est incluse dans  $X^+$ . Rappelons que

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma / \gamma\Omega = \Omega\}$$

et que  $\bar{\omega} \simeq \Gamma_0 \backslash \bar{\Omega}$ . Soient  $B$  le sous-groupe fermé connexe de  $A$  contenant  $\Gamma_0$  tel que  $\Gamma_0 \backslash B$  est compact (lemme 5.1),  $k := \dim(B)$  et  $r := n - k$ . On note  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  les algèbres de Lie de  $A$  et  $B$  et  $\varepsilon_i$  la matrice diagonale projection sur le  $i$ ème vecteur de base de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

La partie  $Y_\omega^+$  est une partie ouverte  $A_e$ -invariante de  $X^+$  sur laquelle le groupe  $B$  agit proprement avec un quotient  $B \backslash Y_\omega^+$  compact.

Remarquons que ce groupe  $B$  ne dépend pas du choix de l'orbite  $\omega$ . Il lui est associé (lemme 5.3) une armature

$$f = (f_1, \dots, f_n) \in (\mathbb{R}^k)^n$$

de longueur  $n$  dans le cas affine et une armature centrée

$$f = (f_1, \dots, f_{n+1}) \in (\mathbb{R}^k)^{n+1}$$

de longueur  $n + 1$  dans le cas projectif (centrée signifie que  $\sum_{i=1}^{n+1} f_i = 0$ ). Dans le cas affine, les  $f_i$  sont les images de  $\varepsilon_i$  dans  $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ . Dans le cas projectif, les  $f_i$  sont les images de  $\varepsilon_i - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j$  dans  $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ .

En résumé, les diverses orbites ouvertes  $\omega$  fournissent des parties  $Y_\omega$  associées par le corollaire 5.6 à des éventails simpliciaux complets  $\Delta_\omega$  portés par  $f$ .

### 3.3 Recollement des orbites

Expliquons maintenant comment on peut lire sur les divers éventails  $\Delta_\omega$  la façon dont les adhérences d'orbites  $\bar{\omega}$  se recollent. Pour cela nous aurons besoin de quelques définitions.

On note  $N := \{1, \dots, n\}$  dans le cas affine et  $N := \{1, \dots, n + 1\}$  dans le cas projectif. Soit  $I$  une partie de  $N$ .

Si  $\Delta$  est un éventail d'armature  $f = (f_i)_{i \in N}$ , on note

$$\Delta(I) := \{J \subset N - I / (I \cup J) \in \Delta\}$$

l'éventail d'armature  $f(I) := (f_i)_{i \in N - I}$ . L'éventail  $\Delta(I)$  est non vide si et seulement si  $I$  est dans  $\Delta$ . Dans ce cas, si  $\Delta$  est complet (resp. simplicial) alors  $\Delta(I)$  est complet (resp. simplicial).

On note  $X_i$  l'hyperplan ou l'hypersphère de l'espace modèle  $X$  formé des points dont la  $i$ ème coordonnée est nulle,  $\sigma_i$  la symétrie par rapport à  $X_i$ ,  $X_I := \cap_{i \in I} X_i$  et  $\sigma_I := \prod_{i \in I} \sigma_i$ .

**Définition 3.2** Une  $A_e$  orbite  $\alpha$  dans  $V$  est dite de type  $I$  si elle est de codimension  $\text{card} I$  et si  $D(\pi^{-1}(\alpha)) \subset X_I$ .

Remarquons qu'une  $A_e$ -orbite ouverte  $\omega$  contient dans son adhérence une  $A_e$ -orbite  $\alpha$  de type  $I$  si et seulement si  $I \in \Delta_\omega$ . Remarquons aussi que l' $A_e$ -orbite  $\alpha$  de type  $I$  contenue dans  $\bar{\omega}$  est unique. On la note alors  $\omega(I)$  et on note  $s_I(\omega)$

l' $A_e$ -orbite ouverte dans  $V$  telle que, dans un voisinage  $W$  d'un point de  $\omega(I)$ , il existe une carte  $\phi : W \rightarrow X$  de notre  $(A, X)$ -structure telle que

$$\phi(W \cap \omega) \subset X^+ \quad \text{et} \quad \phi(W \cap s_I(\omega)) \subset \sigma_I(X^+).$$

On note  $\mathcal{O}$  l'ensemble des  $A_e$ -orbites ouvertes dans  $V$  et  $\mathcal{O}(I) := \{\omega \in \mathcal{O} / I \in \Delta_\omega\}$ . Les applications  $s_I$  sont des bijections de  $\mathcal{O}(I)$  sur lui même et elle vérifient

- (a)  $\forall \omega \in \mathcal{O}(I)$ ,  $\Delta_{s_I(\omega)}(I) = \Delta_\omega(I)$  et  $s_I(s_I(\omega)) = \omega$ ,
- (b)  $\forall \omega \in \mathcal{O}(I)$ , si  $I = I_1 \cup I_2$  et  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , alors  $s_I(\omega) = s_{I_1}(s_{I_2}(\omega))$ .

Notons  $\overset{\circ}{X}^+$  l'intérieur de  $X^+$  et choisissons, pour tout  $\omega$  dans  $\mathcal{O}$ , des identifications de  $(A, X)$ -variétés  $h_\omega : \omega \xrightarrow{\cong} \Gamma_0 \backslash \overset{\circ}{X}^+$ . Si  $h'_\omega : \omega \xrightarrow{\cong} \Gamma_0 \backslash \overset{\circ}{X}^+$  est une autre identification, il existe un élément  $r_\omega \in \Gamma_0 \backslash A_e$  tel que  $h'_\omega = r_\omega \circ h_\omega$  où cette formule tient compte de l'action naturelle du groupe  $\Gamma_0 \backslash A_e$  sur la variété  $\Gamma_0 \backslash \overset{\circ}{X}^+$ .

Pour tout élément  $I$  de  $\Delta_\omega$ , il existe un unique élément  $a_{I,\omega}$  dans  $\Gamma_0 \backslash A_e$  tel que dans un voisinage  $W$  d'un point de  $\omega(I)$ , il existe une carte  $\phi : W \rightarrow X$  de notre  $(A, X)$ -structure telle que

- (i)  $\phi = h_\omega$  modulo  $\Gamma_0$  sur  $W \cap \omega$  et
- (ii)  $\sigma_I \circ \phi = a_{I,\omega}^{-1} \circ h_{s_I \omega}$  modulo  $\Gamma_0$  sur  $W \cap s_I(\omega)$ .

Les applications de recollement  $a_{I,\omega}$  vérifient les conditions de cocycle :

- (c)  $\forall \omega \in \mathcal{O}(I)$ ,  $a_{I,s_I \omega} \circ a_{I,\omega} = 1$ ,
- (d)  $\forall \omega \in \mathcal{O}(I)$ , si  $I = I_1 \cup I_2$  et  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , alors  $a_{I,\omega} = a_{I_2,s_{I_1} \omega} \circ a_{I_1,\omega}$ .

Les exemples 1.12 de structures projectives sur la bouteille de Klein montrent que l'on peut avoir l'égalité  $s_I \omega = \omega$ . Dans ce cas, les applications de recollement vérifient la condition de non dégénérescence :

- (e) si  $s_I \omega = \omega$  alors  $a_{I,\omega} \neq 1$ .

En outre, si on remplace  $h_\omega$  par  $h'_\omega = r_\omega \circ h_\omega$  alors l'application de recollement  $a_{I,\omega}$  devient  $a'_{I,\omega} := r_{s_I \omega} \circ a_{I,\omega} \circ r_\omega^{-1}$ .

### 3.4 Jeux d'éventails

Les jeux d'éventails formalisent la discussion précédente.

**Définition 3.3** *On appelle jeu d'éventails  $J$  d'armature  $f$  la donnée*

- d'une famille d'éventails  $\Delta_\nu$  d'armature  $f$  où  $\nu$  décrit un ensemble d'indices  $\mathcal{N}$  et

- d'une famille de bijections  $s_I : \mathcal{N}(I) \rightarrow \mathcal{N}(I)$ , pour  $I \subset \mathcal{N}$  où  $\mathcal{N}(I)$  est l'ensemble  $\mathcal{N}(I) := \{\nu \in \mathcal{N} / I \in \Delta_\nu\}$  telles que

- (a)  $\forall \nu \in \mathcal{N}(I)$ ,  $\Delta_{s_I(\nu)}(I) = \Delta_\nu(I)$  et  $s_I(s_I(\nu)) = \nu$ ,
- (b)  $\forall \nu \in \mathcal{N}(I)$ , si  $I = I_1 \cup I_2$  et  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , alors  $s_I(\nu) = s_{I_1}(s_{I_2}(\nu))$ .

*Le jeu d'éventails est dit compact si  $\mathcal{N}$  est fini et si chaque éventail  $\Delta_\nu$  est complet. Le jeu d'éventails est dit sans point fixe si  $\forall I \subset \mathcal{N}$ ,  $\forall \nu \in \mathcal{N}(I)$  on a  $s_I(\nu) \neq \nu$ .*

Soit  $F$  un groupe abélien et  $J$  un jeu d'éventail, on note  $Z^1(J, F)$  le groupe abélien des 1-cocycles  $a$  sur  $J$  à valeurs dans  $F$ , c'est à dire la donnée d'éléments  $a_{I,\nu}$  de  $F$  pour  $I$  dans  $\Delta_\nu$  tels que

$$(c) \quad \forall \nu \in \mathcal{N}(I), \quad a_{I, s_I \nu} \circ a_{I, \nu} = 1,$$

$$(d) \quad \forall \nu \in \mathcal{N}(I), \quad \text{si } I = I_1 \cup I_2 \text{ et } I_1 \cap I_2 = \emptyset, \text{ alors } a_{I, \nu} = a_{I_2, s_{I_1} \nu} \circ a_{I_1, \nu}.$$

Le produit de deux cocycles est bien sur donné par le produit dans  $F$

Un 1-cocycle  $a$  est dit non dégénéré si

$$(e) \quad \forall I \subset N, \forall \nu \in \mathcal{N}(I), \text{ si } s_I \nu = \nu \text{ alors } a_{I, \nu} \neq 1.$$

On note  $B^1(J, F)$  le sous-groupe des 1-cobords, c'est-à-dire des 1-cocycles  $a$  pour lesquels il existe une application  $r$  de  $\mathcal{N}$  dans  $F$  telle que  $a_{I, \nu} = r_{s_I \nu} \circ r_\nu^{-1}$ .

On note  $H^1(J, F) := Z^1(J, F)/B^1(J, F)$  le groupe quotient et  $H^1(J, F)^{nd}$  l'ouvert de  $H^1(J, F)$  formé par les images des 1-cocycles non dégénérés.

Réciproquement les données ci-dessus permettent de construire par recollement un variété affine (resp. projective) compacte à holonomie diagonale.

On déduit donc de la discussion ci-dessus la proposition suivante.

**Proposition 3.4** *L'application décrite ci-dessus induit une bijection entre, d'une part,*

★ *l'ensemble des classes d'isomorphismes de variétés affines (resp. projectives)  $V$  compactes de dimension  $n$  à holonomie diagonale et, d'autre part,*

★ *l'ensemble des uplets  $(f, \Gamma_0, (\Delta_\nu), s, a)$  où*

-  *$f$  est une armature de longueur  $n$  (resp. une armature centrée de longueur  $n+1$ ),*

-  *$\Gamma_0$  est un réseau du sous-groupe connexe  $B$  de  $A$  associé à  $f$ ,*

-  *$J := ((\Delta_\nu), s)$  est un jeu compact d'éventails simpliciaux d'armature  $f$  et*

-  *$a$  est un élément de  $H^1(J, \Gamma_0 \backslash A_0)^{nd}$ .*

### 3.5 La variété $W$

Donnons maintenant une description plus informelle mais plus concrète de notre variété affine ou projective  $V$ . On s'autorise dans cette description à remplacer  $V$  par un revêtement fini  $V_1$ .

On peut tout d'abord supposer que le jeu d'éventails est *sans point fixe*. En effet, les deux remarques suivantes permettent de ramener l'étude du cas général à ce cas :

★ La variété  $V$  admet un revêtement  $V_1$  à  $2^k$  feuillets, avec  $k \leq n+1$ , dont l'holonomie est dans  $A_e$ .

★ Si l'holonomie de  $V$  est dans  $A_e$ , alors le jeu d'éventails est sans point fixe.

Géométriquement l'hypothèse *sans point fixe* signifie que

$$\forall \omega \in \mathcal{O} \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (\gamma \bar{\omega} \cap \bar{\omega} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma \bar{\omega} = \bar{\omega}).$$

Notons  $T$  le tore compact  $T := \Gamma_0 \backslash B$ ,  $W$  l'espace quotient  $W := T \backslash V$  et  $p : V \rightarrow W$  la projection. L'hypothèse *sans point fixe* signifie que l'action de  $T$  sur  $V$  est libre et donc que  $W$  est une variété  $C^\infty$  de dimension  $r$  et que  $p : V \rightarrow W$  est un  $T$ -fibré principal.

**Lemme 3.5** *Avec ces notations, quitte à remplacer  $V$  par un revêtement fini.*

a) *Il existe un sous-groupe  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$  qui commute à  $\Gamma_0$  et tel que  $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ .*

b) *Le  $T$ -fibré principal  $p : V \rightarrow W$  est trivial.*

**Démonstration** a) En effet, cela résulte de l'existence d'un sous-groupe supplémentaire de  $h(\Gamma_0)$  dans le groupe abélien de type fini  $h(\Gamma)$  et du fait que  $\Gamma_0$  est distingué dans  $\Gamma$ .

b) On doit construire une section de ce fibré. On remarque que, comme  $B$  est contractile, le  $B$ -fibré principal  $\Gamma_1 \backslash \tilde{V} \rightarrow W$  a une section. Ce qui permet de construire la section cherchée du fibré  $p : V \rightarrow W$ .  $\square$

On note, pour  $i \in N$ ,  $W_i := p \circ \pi(D^{-1}(X_i))$ . Les  $W_i$  sont des hypersurfaces  $C^\infty$  compactes de  $W$  "à croisement normaux", c'est-à-dire telles que l'intersection de  $j$  d'entre elles est transverse pour  $j \leq r$  et est vide pour  $j > r$ . Les images  $p(\omega)$ , pour  $\omega$  orbites ouvertes dans  $V$  ne sont autres que les composantes connexes de  $W - \cup_{i \in N} W_i$ . Leurs adhérences  $p(\bar{\omega})$  sont des variétés à coins difféomorphes aux quotients  $Z_\omega^+ = B \backslash Y_\omega^+$  décrits dans l'appendice 5.5. Les divers éventails complets simpliciaux permettent donc de décrire ces variétés à coins  $Z_\omega^+$ . Le jeu d'éventails décrit la façon dont ces diverses variétés à coin  $Z_\omega^+$  se recollent. Autrement dit, une fois l'armature connue, la donnée du jeu d'éventails équivaut à la donnée de la variété  $W$  et de ses hypersurfaces  $W_i$  à croisements normaux.

Cette description ne suffit pas tout à fait pour savoir comment les  $(A, X^+)$ -structures sur les  $T$ -fibrés principaux  $\bar{\omega} \rightarrow Z_\omega^+$  se recollent. C'est là le rôle de l'élément  $a$ . Comme la variété  $V$  s'identifie au produit  $W \times T$ , le groupe  $\Gamma_1$  s'identifie alors au groupe fondamental de  $W$  et l'élément  $a$  s'identifie tout simplement à un morphisme encore noté  $a$  de  $\Gamma_1$  dans le groupe  $\Gamma_0 \backslash A_e$ . Ce morphisme n'est autre que l'holonomie de nos identifications.

**Exemple 3.6** Pour les tores de Goldman  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  de l'exemple 1.10, les adhérences d'orbites  $\bar{\omega}$  se regroupent deux par deux pour former les anneaux  $A_g$  ou  $B_g$ , le groupe  $\Gamma_0$  est donné par l'élément  $g$ , le jeu d'éventails par le mot  $w$  et le morphisme  $a : \Gamma_1 \rightarrow T$  par l'élément  $h$ .

Terminons cette section en visualisant quelques exemples de jeux d'éventails d'armature donnée. On reprend le dernier exemple de l'appendice.

**Exemple 3.7** avec  $r = 1$  et  $\dim B = n - 1$ .

Dans ce cas, la variété  $W$  est un cercle découpé en un nombre fini de segments  $Z^+$  dont les extrémités sont numérotées (voir l'exemple 5.11 de l'appendice). La variété  $V$  est difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^n$ . Pour  $n = 2$ , la variété  $V$  n'est autre qu'un des tores de Goldman  $\mathbb{T}_{g,w,h}^2$  de l'exemple 1.10.

**Exemple 3.8** avec  $r = 2$  et  $\dim B = n - 2$ .

On prend  $f = (f_1, \dots, f_5)$  avec  $f_i = (\cos(\frac{2\pi i}{5}), \sin(\frac{2\pi i}{5}))$ . On a donc  $n = 5$  dans le cas affine et  $n = 4$  dans le cas projectif. La surface  $W$  est obtenue par recollement de polygones dont les cotés sont numérotés, polygones que l'on choisit parmi les onze de la figure 19. Voici quelques dessins avec  $W$  de genre 0, 1 ou plus. Dans ces dessins, nous n'avons représenté que la moitié de  $W$ . Pour obtenir  $W$  il faut recoller chaque dessin avec son double le long du bord (en gras). A côté de chaque courbe  $W_i$  nous avons indiqué son numéro. Ces dessins donnent une première idée de la complexité de ces recollements : on peut bien sûr modifier ces exemples de nombreuses façons. La figure 14 fournit des structures projectives à holonomie diagonale sur le tore  $\mathbb{T}^4$  et donc des structures affines à holonomie diagonale sur

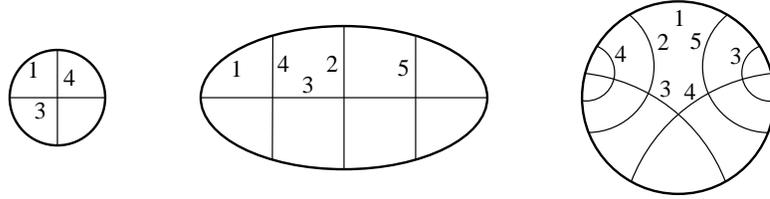


Figure 13: Jeux d'éventails de genre 0

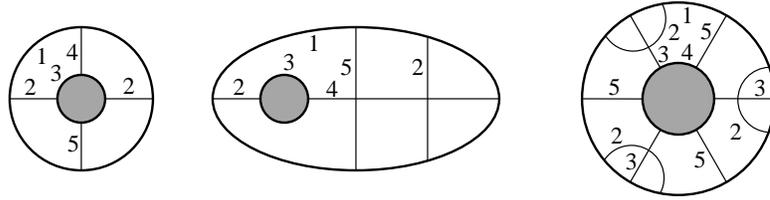


Figure 14: Jeux d'éventails de genre 1

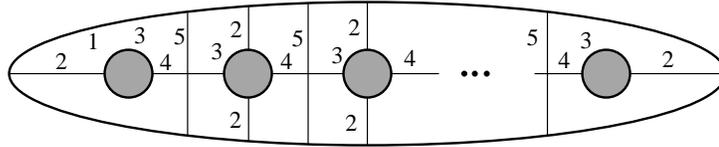


Figure 15: Jeux d'éventails de genre 2 ou plus

le tore  $\mathbb{T}^5$ . De même la figure 14 fournit des structures projectives à holonomie diagonale sur le produit de  $\mathbb{T}^2$  par une surface compacte de genre  $g$ . Ce sont essentiellement les exemples de Smillie dans [24].

Ces constructions motivent la question suivante.

**Question** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  compacte. Existe-t-il un entier  $p \geq 1$  tel que la variété produit  $M \times \mathbb{T}^p$  admet une structure affine?

**Exercice 3.9** Soient  $n \geq 3$  et  $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$  une armature centrée de longueur  $n + 1$  et de rang  $r = n - 1$ . Décrire tous les jeux d'éventails compacts et sans point fixe d'armature  $f$

**Indication** On a donc  $f_1 + \dots + f_{n+1} = 0$  et une autre relation  $a_1 f_1 + \dots + a_{n+1} f_{n+1} = 0$ , avec, par exemple,  $a_1 \leq \dots \leq a_{n+1}$ . On commencera par supposer que  $a_1 < \dots < a_{n+1}$ . D'après l'exemple 5.10 de l'appendice, il y a alors exactement  $n$  éventails d'armature  $f$  que l'on note  $\Delta_\ell$  avec  $\ell \in [1, n]$  et la variété à coins quotient  $Z^+ = Z_\ell^+$  est diffeomorphe au produit d'un  $(\ell-1)$ -simplexe par un  $(n-\ell)$ -simplexe (dans le cas général, seuls les éventails  $\Delta_\ell$  avec  $\ell$  tel que  $a_\ell \neq a_{\ell+1}$  existent).

On remarquera alors que, sur une facette de codimension 1 de  $Z_\ell^+$  qui n'est ni de type  $\{\ell\}$ , ni de type  $\{\ell+1\}$ , on ne peut recoller que une autre copie de  $Z_\ell^+$ . Si on effectue tous ces recollements, on obtient une variété à coins  $P_\ell$  qui est réunion de  $2^{n-1}$  copies de  $Z_\ell^+$  et dont le bord ne contient que des facettes de type  $\{\ell\}$  ou  $\{\ell+1\}$ . La variété  $W$  s'obtient alors en recollant une ou plusieurs copies de  $P_\ell$ .

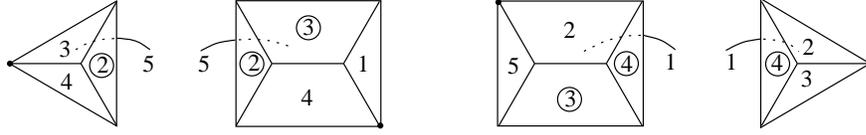


Figure 16: Les variétés à coins  $Z_\ell^+$  pour  $n = 4$  et  $\ell \in [1, 4]$

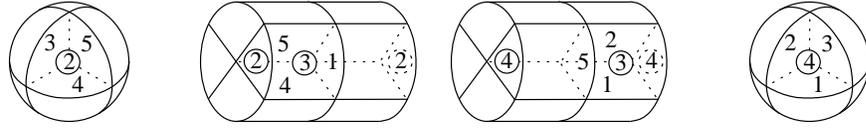


Figure 17: Les variétés à coins  $P_\ell$  pour  $n = 4$  et  $\ell \in [1, 4]$

On obtient alors les variétés  $W$  suivantes et leur revêtements finis :

- \*  $W_\ell$ , pour  $1 \leq \ell \leq n$ : recollement de  $P_\ell$ , diffeomorphe à  $\mathbb{RP}^{\ell-1} \times \mathbb{RP}^{n-\ell}$ .
- \*  $W_{\ell,\ell+1}$ , pour  $2 \leq \ell \leq n-2$ : recollement de  $P_\ell$  et  $P_{\ell+1}$ , diffeomorphe à  $\mathbb{RP}^{n-1}$ .
- \*  $W_{1,2}^k$ , pour  $k \geq 1$ : recollement de  $P_1$  et  $k$  fois  $P_2$ , diffeomorphe à  $\mathbb{RP}^{n-1}$ .
- \*  $W_{n,n-1}^k$ , pour  $k \geq 1$ : recollement de  $P_n$  et  $k$  fois  $P_{n-1}$ , diffeomorphe à  $\mathbb{RP}^{n-1}$ .

## 4 Structures projectives sur les tores

Le but de cette partie est de décrire les structures projectives sur les tores  $\mathbb{T}^n$ , à revêtement fini près, pour de petites valeurs de  $n$ . Pour  $n = 3$ , la liste obtenue est assez explicite.

Notre démarche consiste à décrire tout d'abord toutes les structures projectives à holonomie nilpotente sur des variétés compactes  $V$  de dimension  $n$ , puis de repérer lesquelles sont diffeomorphes au tore  $\mathbb{T}^n$ .

Nous l'avons déjà vu sur les figures 14 et 15, et nous le vérifierons à posteriori, cette démarche n'augmente pas la complexité du problème. Elle nous permet d'appliquer plus librement le théorème des briques.

Soit  $N$  un sous-groupe nilpotent connexe maximal du groupe  $G = SL^\pm(n+1, \mathbb{R})$ . On veut donc décrire les variétés projectives compactes  $V$  à holonomie dans  $N$ . Nous commencerons par expliquer notre démarche lorsque  $N$  est simplement connexe (§4.1).

Nous montrerons ensuite comment se ramener à ce cas (§4.2).

Nous étudierons ensuite les variétés projectives compactes à holonomie unipotente (§4.3).

Nous décrirons alors complètement les variétés projectives compactes à holonomie cyclique (§4.4).

Ces études préliminaires nous permettront enfin de décrire toutes les structures projectives sur le tore  $\mathbb{T}^3$  (§4.6).

#### 4.1 Lorsque $N$ est simplement connexe

On suppose dans cette partie que  $N$  est simplement connexe. La méthode que l'on va suivre est proche de celle que nous avons suivie dans le cas "à holonomie diagonale" (section 3.5) et on s'efforcera d'introduire des notations  $(Y^+, B, Z^+, \dots)$  cohérentes avec ce cas.

Il existe donc une suite d'entiers  $d_1 \geq \dots \geq d_r \geq 1$  avec  $d_1 + \dots + d_r = n + 1$  telle que  $N$  est le groupe nilpotent simplement connexe maximal  $N_{d_1, \dots, d_r}^{\mathbb{R}}$  de  $G$  formé de blocs de tailles  $d_1, \dots, d_r$ . On note  $s$  le plus grand indice pour lequel  $d_s > 1$ . Ce groupe a  $2^r$  orbites ouvertes dans  $\mathbb{S}^n$  qui sont échangées par le groupe  $C$  des matrices valant  $\pm Id$  sur chacun des blocs. Pour  $i = 1, \dots, r$  on note  $\tau_i \in C$  la symétrie par rapport à ce  $i^{\text{ème}}$  bloc. On choisit une orbite ouverte  $O$  de  $N$  dans  $\mathbb{S}^n$ . On note  $e_i := 1 + d_1 + \dots + d_{i-1}$  le premier indice dans le  $i^{\text{ème}}$  bloc et  $X_{e_i}$  l'hypersphère de  $\mathbb{S}^n$  définie par l'annulation de la  $e_i^{\text{ème}}$  coordonnée. L'adhérence  $\bar{O}$  contient exactement  $r + s$  orbites de codimension 1 que l'on note  $O_{e_i}^{\pm} \subset X_{e_i}$  pour  $i = 1, \dots, s$  et  $O_{e_i} \subset X_{e_i}$ , pour  $i = s + 1, \dots, r$ .

D'après le théorème 2.1, on dispose d'une action de  $N$  sur  $\tilde{V}$  qui relève l'action sur  $\mathbb{S}^n$ . Soit  $\Omega \subset \tilde{V}$  une  $N$ -orbite ouverte dans  $\tilde{V}$ , et  $\omega$  son image dans  $V$ . Il existe un unique élément  $\sigma$  dans  $C$  tel que la partie  $Y_{\omega}^+ := \sigma(D(\bar{\Omega}))$  est incluse dans  $\bar{O}$ .

Le sous-groupe distingué  $\Gamma_0 := \{\gamma \in \Gamma / \gamma\Omega = \Omega\}$  de  $\Gamma$  s'identifie alors à un sous-groupe de  $N$ . On note  $B$  le plus grand sous-groupe fermé de  $N$  contenant  $\Gamma_0$  tel que le quotient  $\Gamma_0 \backslash B$  est compact. Ce groupe  $B$  est connexe et est normalisé par  $\Gamma$ . On introduit la nilvariété compacte  $F := \Gamma_0 \backslash B$ , l'espace quotient  $W := \Gamma B \backslash \tilde{V}$  et la projection  $p : V \rightarrow W$ . Cette projection est un fibré de fibre  $F$  (lorsque  $\Gamma_0$  est commutatif,  $F$  est un tore et  $p : V \rightarrow W$  est un  $F$ -fibré principal). En général, ce fibré n'est pas trivial... mais c'est souvent le cas en petite dimension à cause du lemme suivant :

**Lemme 4.1** *Avec ces notations. Si le groupe d'holonomie  $h(\Gamma)$  est commutatif ou si  $h(\Gamma_0) \cap [N, N] = \{1\}$  alors, quitte à remplacer  $V$  par un revêtement fini.*

- a) *Il existe un sous-groupe  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$  tel que  $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ .*
- b) *Le fibré  $p : V \rightarrow W$  est trivial.*

**Remarque** Lorsque le groupe d'holonomie n'est pas commutatif, l'extension  $1 \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi_1(W) \rightarrow 1$  n'est pas toujours scindée.

**Démonstration** C'est la même démonstration que pour le lemme 3.5 car, sous ces hypothèses,  $\Gamma$  et  $B$  commutent.  $\square$

On note, pour  $i = 1, \dots, r$ ,  $W_i := p \circ \pi(D^{-1}(X_i))$ . Les  $W_i$  sont encore des hypersurfaces  $C^\infty$  compactes de  $W$  "à croisements normaux". Lorsque  $1 \leq i \leq s$ , le fibré normal à  $W_i$  est naturellement orienté car, comme  $\tau_i$  échange  $O_{e_i}^+$  et  $O_{e_i}^-$ ,  $W_i$  sépare localement  $W$  en deux, d'un côté, on "voit"  $W_i$  comme provenant de l'adhérence d'une orbite  $O_{e_i}^+$  et de l'autre on le voit comme provenant de l'adhérence d'une orbite  $O_{e_i}^-$ .

Les images  $p(\omega)$ , pour  $\Omega$  orbites ouvertes dans  $\tilde{V}$  sont encore les composantes connexes de  $W - \cup_{i \in N} W_i$ . Leurs adhérences  $p(\bar{\omega})$  sont des variétés à coins difféomorphes aux quotients  $Z_\omega^+ = B \backslash Y_\omega^+$ .

**En résumé, pour construire  $V$ , on doit**

- (1) Choisir une suite d'entiers  $d_1 \geq \dots \geq d_s > d_{s+1} = \dots = d_r = 1$  avec  $d_1 + \dots + d_r = n + 1$ . On note alors  $N = N_{d_1, \dots, d_r}^{\mathbb{R}}$  et  $O$  une orbite ouverte de  $N$  dans  $\mathbb{S}^n$ .
- (2) Choisir un sous-groupe fermé connexe  $B$  du groupe  $N$  et déterminer tous les ouverts  $Y^+$  de l'adhérence  $\bar{O}$  invariants par  $N$  et tels que  $B$  agit proprement sur  $Y^+$  avec un quotient  $Z^+ := B \backslash Y^+$  compact. Ce quotient  $Z^+$  est une variété à coins contractile dont les faces de codimension 1 sont numérotés par un entier  $i \in [1, r]$  et ont un signe lorsque  $i \in [1, s]$ .
- (3) Construire une variété  $W$  en recollant diverses copies des variétés à coins  $Z^+$  en respectant le numéro  $i$  des faces, mais en changeant leur signe lorsque  $i \in [1, s]$ , de sorte que l'on obtienne des hypersurfaces compactes  $W_i$  à croisement normaux, hypersurfaces dont le fibré normal est orienté pour  $i \in [1, s]$ .
- (4) Choisir un sous-groupe discret cocompact  $\Gamma_0 \subset B$ .
- (5) Décrire les couples  $(\Gamma, h)$  où  $\Gamma$  est une extension :  $1 \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi_1(W) \rightarrow 1$  et où  $h$  est un morphisme  $h : \Gamma \rightarrow N$  qui prolonge l'injection  $\Gamma_0 \hookrightarrow N$ .

L'étape (2) est la plus délicate.

Etudions maintenant quelques cas selon la dimension de  $B$ .

- ★ Si  $\dim B = 0$ . La structure projective sur  $V$  est complète.
- ★ Si  $\dim B = 1$ . Ce cas sera étudié dans la partie 4.4 (voir la remarque 4.10).
- ★ Si  $\dim B = n$ . La structure projective sur  $V$  est affine et invariante à gauche.
- ★ Si  $\dim B = n - 1$ . La variété  $V$  est difféomorphe à une nilvariété. En effet, la variété  $V$  est un fibré sur le cercle  $W \simeq \mathbb{S}^1$  dont la fibre  $F$  est une nilvariété et les éléments de  $\Gamma$  induisent des automorphismes nilpotents de ces fibres.

**Exemple 4.2** Lorsque  $\dim B = n - 1$ , voici comment se déroule en pratique l'étape (2). On fixe tout d'abord un groupe  $B$  qui agit librement sur la  $N$ -orbite ouverte  $O$ . On détermine le plus grand ouvert  $O'$  de  $\bar{O}$  sur lequel  $B$  agit librement : c'est la réunion de  $O$  et de quelques orbites de codimension 1. On détermine alors la topologie de l'espace quotient  $B \backslash O'$  : c'est un segment ouvert aux extrémités duquel sont éventuellement attachés un ou plusieurs points (un point ne peut pas être adhérent aux deux bouts du segment car  $B \backslash O'$  est contractile). Les parties  $Y^+$  cherchées sont la réunion de  $O$  et de deux de ces orbites de codimension 1 correspondant à des points attachés à des extrémités distinctes de notre segment.

## 4.2 Sur la partie elliptique de l'holonomie

En général, le groupe  $N$  n'est pas simplement connexe. Le but de cette section est de contourner cette difficulté en introduisant un autre groupe nilpotent  $N'$  qui lui est simplement connexe. Cela nécessite encore quelques notations. On peut, en première lecture, sauter cette section technique.

Soient  $T$  (resp.  $A, U$ ) l'ensemble des éléments elliptiques (resp. hyperboliques, unipotents) de  $N$ . Ce sont des sous-groupes de  $N$  qui commutent deux à deux. Le groupe  $T$  est un tore compact. Sa dimension est le nombre de blocs complexes dans la description de  $N$  en termes de matrices blocs. Les groupes  $A$  et  $U$  sont simplement connexes et on a l'égalité  $N = TAU$ . Introduisons un sous-groupe connexe maximal  $N'$  de  $G$  qui contient  $AU$  mais qui ne contient pas d'éléments elliptiques non triviaux. On peut de la même façon écrire  $N' = A'U'$  et on a  $A \subset A'$  et  $U \subset U'$ . Les orbites de  $N'$  dans  $\mathbb{S}^n$  sont simplement connexes et sont incluses dans celles de  $N$ .

Pour tout sous-groupe connexe  $I$  de  $G$ , on note  $\hat{T}$  la composante connexe du groupe des transformations projectives  $\psi$  de  $\tilde{V}$  dont l'holonomie  $h(\psi)$  est dans  $I$ . Remarquons que le sous-groupe distingué  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  introduit dans le théorème 2.1 est inclus dans  $\hat{N}$ . On a l'égalité  $\hat{N} = \hat{T}\hat{A}\hat{U}$  et, d'après le lemme 3.3 de [3], le groupe  $\hat{T}$  agit proprement sur  $\tilde{V}$ . On note,  $\hat{Q}$  le plus grand sous-groupe fermé de  $\hat{N}$  contenant  $\Gamma_0$  tel que le quotient  $\hat{Q}/\Gamma_0$  est compact. Ce groupe  $\hat{Q}$  est connexe et l'intersection  $\hat{B} := \hat{Q} \cap \hat{A}\hat{U}$  aussi. On note  $B := h(\hat{B})$ .

Soit  $\Omega \subset \tilde{V}$  une  $\hat{N}$ -orbite ouverte,  $\Omega' \subset \Omega$  une  $\hat{N}'$ -orbite ouverte et  $Y^+ := D(\overline{\Omega}') \simeq \overline{\Omega}'$ . On a une identification  $\hat{Q}/\hat{B} \simeq \hat{T}$ . Comme le quotient  $\hat{Q}/\overline{\Omega}$  est compact, il en est de même du quotient  $\hat{B}/\overline{\Omega}' \simeq B/Y^+$ . Et réciproquement...

Cette discussion ramène donc notre étude à la détermination des même couples  $(B, Y^+)$  que dans la section 4.1.

Le quotient  $\tilde{W} := B \backslash \tilde{V}$  est une variété et la projection  $p : \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$  est un  $B$ -fibré principal. Cette variété est obtenue par recollement des quotients  $Z^+ := B \backslash Y^+$  comme dans la section 4.1. Remarquons cependant que le groupe  $\Gamma_0 B$  n'est pas toujours fermé dans  $\hat{N}$  et donc que le quotient  $W := \Gamma \backslash \tilde{W}$  n'est pas toujours séparé (voir l'exemple 1.6 de structure affine sur le tore  $\mathbb{T}^2$  avec  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_6$ ).

Le lemme suivant, analogue du lemme 4.1 et sa démonstration expliquent comment, lorsque l'holonomie est commutative, se ramener encore plus directement à l'étude de la section 4.1.

**Lemme 4.3** *Avec ces notations. Si le groupe d'holonomie  $h(\Gamma)$  est commutatif alors, quitte à remplacer  $V$  par un revêtement fini.*

- a) *Il existe un sous-groupe  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$  tel que  $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ .*
- b) *On peut déformer continument la structure projective sur  $V$  en une structure projective à holonomie dans  $B$ , et cela sans modifier le groupe  $N$  ni le groupe  $B$  ni la structure projective sur  $\tilde{V}$ .*

**Démonstration** a) C'est la même démonstration que pour le lemme 3.5.

b) Le groupe  $\hat{Q}$  est abélien. On peut modifier continument le réseau  $\Gamma_0$  de  $\hat{Q}$  de sorte que sa projection sur  $T$  soit triviale. Soit  $C$  la composante connexe du centralisateur de  $B$  dans  $N$ . De la même façon on peut relever le morphisme  $h : \Gamma \rightarrow C$  en un morphisme  $\hat{h} : \hat{\Gamma} \rightarrow \hat{C}$ . Tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  s'écrit alors  $\gamma = \tau(\gamma)\hat{h}(\gamma)$ . On peut alors modifier continument le morphisme  $\hat{\Gamma}_1 \rightarrow \hat{C}$  jusqu'à ce qu'il devienne trivial.  $\square$

### 4.3 Variétés projectives à holonomie unipotente

On dit qu'une variété projective est à holonomie unipotente si le groupe d'holonomie est formé d'éléments unipotents. Il est équivalent de dire que, dans une base convenable, le groupe d'holonomie est inclus dans le groupe  $N_{n+1}^{\mathbb{R}}$  des matrices unipotentes triangulaires inférieures.

L'étude de ces variétés projectives s'avère moins précise que celle des variétés projectives à holonomie diagonale.

On identifie la sphère  $\mathbb{S}^p$  à la partie de  $\mathbb{S}^n$  définie par l'annulation des  $n-p$  premières coordonnées et on note  $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ .

**Proposition 4.4** *Soit  $V$  une variété projective compacte à holonomie dans le groupe  $N_{n+1}^{\mathbb{R}}$ . Soit  $p$  la dimension minimum des orbites de  $N_{n+1}^{\mathbb{R}}$  dans  $\tilde{V}$ .*

*Si  $p \leq n-2$ , la développante  $D$  identifie  $\tilde{V}$  à  $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$ .*

*Si  $p = n-1$ ,  $D$  identifie  $\tilde{V}$  au revêtement universel de  $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-2}$ .*

*Si  $p = n$ ,  $D$  identifie  $\tilde{V}$  à une composante connexe de  $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-1}$ .*

**Remarque** Dans le dernier cas,  $V$  est une variété affine complète invariante à gauche.

**Démonstration** Voir le lemme 4.5 de [3]. □

Construire des variétés projectives compactes à holonomie unipotente revient essentiellement à construire un sous-groupe fermé connexe  $B$  de dimension  $p$  de  $N_{n+1}^{\mathbb{R}}$  qui agit proprement sur  $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$  (voir section 4.1). Donnons quelques exemples de couples  $(n, p)$  pour lesquels un tel groupe  $B$  existe. Dans ces exemples le groupe  $B$  est commutatif et la variété  $V$  est diffeomorphe à  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{S}^{n-p}$ . Pour un exemple avec  $B$  non commutatif, voir la section 5.4 de [3].

**Lemme 4.5** *Soient  $n \geq p$ ,  $q := n - p + 1$  et  $\mathcal{A}$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$  tel que, pour tout  $v$  dans  $\mathbb{R}^q - \{0\}$ , l'application  $A \rightarrow A.v$  est une bijection de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{R}^p$ . Alors le sous-groupe  $B := \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} / A \in \mathcal{A} \right\}$  de  $N_{n+1}^{\mathbb{R}}$  agit proprement sur  $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$  avec quotient compact.*

**Démonstration** Les orbites de  $B$  dans  $(\mathbb{R}^q - \{0\}) \times \mathbb{R}^p$  sont les sous-espaces affines  $\{v\} \times \mathbb{R}^p$  et donc l'action  $(b, v) \rightarrow b.v$  définit un diffeomorphisme de  $B \times (\mathbb{R}^q - \{0\})$  dans  $(\mathbb{R}^q - \{0\}) \times \mathbb{R}^p$ . □

**Exemple** La donnée de  $\mathcal{A}$  équivaut après choix de bases, à la donnée d'un sous-espace vectoriel  $\mathcal{E} \subset \text{End}(\mathbb{R}^p)$  de dimension  $q$  dont tous les éléments non nuls sont inversibles. On peut construire de tels exemples à partir de l'algèbre des complexes, des quaternions, des octaves de Cayley ou de l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique définie positives sur  $\mathbb{R}^p$ . On trouve alors des exemples pour les valeurs suivantes de  $n$  et  $p$  (avec  $n = p + q - 1$ ) :

- \*  $q = 2$  et  $p \equiv 0$  modulo 2.
- \*  $q \leq 4$  et  $p \equiv 0$  modulo 4.
- \*  $q \leq 8$  et  $p \equiv 0$  modulo 8.
- \*  $p \equiv 0$  modulo  $2^q$ .

**Exercice 4.6** Soit  $V$  une variété projective compacte de dimension  $n$  à holonomie unipotente. On suppose  $V$  non complète (i.e.  $p \neq 0$ )

a) Montrer que si  $n \geq 2$  alors  $p \neq 1$ .

b) On suppose  $n = 3$  et  $V$  non invariante à gauche (i.e.  $p \neq 3$ ).

Montrer que  $p = 2$  et que  $V$  est difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^3$ .

Montrer que  $\Gamma_0$  est un réseau dans un des deux sous-groupes connexes de dimension 2 de  $N_4^{\mathbb{R}}$  dont l'algèbre de Lie est, dans une base convenable, formé des matrices

$$\text{de la forme } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & -y & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On suppose  $n \geq 4$ . Montrer que  $p \geq 4$ .

d) On suppose  $n = 4$ . Montrer que  $V$  est affine et invariante à gauche.

**Indication** Il s'agit de décrire, lorsque  $p = 1, 2$  ou  $3$ , les sous-groupes fermés connexes  $B$  de dimension  $p$  de  $N_{n+1}^{\mathbb{R}}$  qui agissent proprement sur  $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$ . On remarque qu'un tel groupe  $B$  agit aussi proprement sur  $\mathbb{S}^{n'} - \mathbb{S}^{p-1}$  pour  $p \leq n' \leq n$ . On procède alors, au cas par cas : pour  $(n, p) = (2, 1), (4, 2), (4, 3)$ , il n'existe pas de tel sous-groupe  $B$ ; pour  $(n, p) = (3, 2)$  il n'y a que les deux groupes indiqués.

**Question** Est-il vrai que, pour  $n \geq 2p$ , il n'existe pas de sous-groupe fermé connexe  $B$  de dimension  $p$  de  $N_{n+1}^{\mathbb{R}}$  qui agissent proprement sur  $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{p-1}$ ? Même question pour  $p$  impair et  $n > p$ . Plus généralement, décrire tous les couples  $(n, p)$  pour lesquels un tel groupe  $B$  existe.

#### 4.4 Variétés projectives à holonomie cyclique

On dit qu'une variété projective est à holonomie cyclique si le groupe d'holonomie est cyclique i.e. est engendré par un élément. C'est par exemple le cas si le groupe fondamental de  $V$  est cyclique.

Le but de cette section est de décrire toutes les variétés projectives compactes à holonomie cyclique.

Un exemple trivial est donné par la sphère projective  $\mathbb{S}^n$ . Voici deux autres exemples moins triviaux.

**Exemple 4.7** Cet exemple généralise l'exemple 1.7 des tores de Hopf.

Soient  $E = \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $g$  un élément de  $\text{SL}^{\pm}(E)$ ,  $S = \{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n+1}\}$  la suite décroissante des modules des valeurs propres de  $g$  répétées avec multiplicité. On choisit  $\lambda \in [\lambda_{n+1}, \lambda_1] - S$ . On note  $E = E_+ \oplus E_-$  la décomposition  $g$ -invariante telle que  $ge^{-\lambda}$  est dilatant sur  $E_+$  et contractant sur  $E_-$ ,  $d_{\pm} := \dim E_{\pm}$ ,  $\mathbb{S}_{\pm}$  la sphère de  $E_{\pm}$ . On note  $U$  l'ouvert

$$U := \mathbb{S}^n - (\mathbb{S}_+ \cup \mathbb{S}_-).$$

Cet ouvert est difféomorphe à  $]0, 1[ \times \mathbb{S}^{d_+-1} \times \mathbb{S}^{d_--1}$ . Le groupe  $\langle g \rangle$  agit proprement sur  $U$  avec quotient compact. Ce quotient est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{d_+-1} \times \mathbb{S}^{d_--1}$ . On distingue plusieurs cas.

- Lorsque  $d_+, d_- \geq 2$ , l'ouvert  $U$  est connexe. On note  $\mathbb{R}_g$  la variété projective

quotient  $\langle g \rangle \backslash U$ .

- Lorsque  $d_+ = 1$  ou  $d_- = 1$ , l'ouvert  $U$  n'est pas connexe. On note  $\mathbb{R}_g$  une composante connexe de la variété projective quotient  $\langle g \rangle \backslash U$ .

**Exemple 4.8** Cet exemple généralise l'exemple 1.10 des tores de Goldman.

On suppose maintenant que  $\lambda = \lambda_i$  avec  $1 < i < n + 1$  et avec  $\lambda_{i+1} > \lambda_i > \lambda_{i-1}$ , et on suppose que  $\lambda$  est valeur propre de  $g$ . Autrement dit, on suppose qu'on a une décomposition  $g$ -invariante  $E = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$  avec  $\dim E_0 = 1$ , et telle que  $ge^{-\lambda}$  est dilatant sur  $E_+$ , l'identité sur  $E_0$  et contractant sur  $E_-$ . On note  $E_{\pm,0} := E_{\pm} \oplus E_0$ . On choisit un demi-espace  $F$  de  $E$  délimité par l'hyperplan  $E_{+,-} := E_+ \oplus E_-$ , et on note  $\Sigma$  la demi-sphère fermée image de  $F$ ,  $\Sigma_{\pm}$ ,  $\Sigma_{\pm,0}$  les intersections de  $\Sigma$  avec les sphères de  $E_{\pm}$  et  $E_{\pm,0}$ . On note  $U_{\pm}$  les ouverts de  $\Sigma$ ,

$$U_{\pm} := \Sigma - (\Sigma_{\pm} \cup \Sigma_{\mp,0}).$$

Ces ouverts sont difféomorphes aux variétés à bord  $U_+ \simeq ]0, 1[ \times \mathbb{S}^{d_+-1} \times \mathbb{B}^{d_-}$  et  $U_- \simeq ]0, 1[ \times \mathbb{B}^{d_+} \times \mathbb{S}^{d_--1}$ , où  $\mathbb{B}^n$  désigne la boule euclidienne fermée de  $\mathbb{R}^n$ . Ces deux variétés ont même bord  $\partial U_+ = \partial U_- = \Sigma_{+,-} - (\Sigma_+ \cup \Sigma_-)$  et ce bord est difféomorphe à  $]0, 1[ \times \mathbb{S}^{d_+-1} \times \mathbb{S}^{d_--1}$ . Le groupe  $\langle g \rangle$  agit proprement sur  $U_{\pm}$  avec quotient compact.

- Lorsque  $d_+, d_- \geq 2$ , les variétés  $U_+$  et  $U_-$  sont connexes. On note  $A_g$  et  $B_g$  les variétés projectives quotients  $A_g := \langle g \rangle \backslash U_+$  et  $B_g := \langle g \rangle \backslash U_-$ .

- Lorsque  $d_+ = 1$  ou  $d_- = 1$ , on prend pour  $A_g$  ou  $B_g$  une des composantes connexes de ces variétés projectives quotients.

Les quotients  $A_g$  et  $B_g$  sont des variétés projectives compactes à bord. Ils généralisent les anneaux  $A_g$  et  $B_g$  de Goldman. On peut donc envisager de leur appliquer un processus de recollement analogue à celui décrit dans l'exemple 1.10. Les recollements qui ne font intervenir que des variétés à bord  $A_g$  nous redonnent essentiellement l'exemple 4.7 décrit ci-dessus. Intéressons nous donc aux recollements qui font intervenir simultanément des variétés  $A_g$  et  $B_g$ . Pour cela distinguons plusieurs cas.

- Lorsque  $d_+, d_- \geq 2$ . Les bords  $\partial A_g$  et  $\partial B_g$  sont connexes. On recolle  $A_g$  avec  $B_g$ . On note  $\mathbb{S}_g$  la variété projective compacte ainsi obtenue. Elle est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

- Lorsque  $d_+ \geq 2$  et  $d_- = 1$ . Le bord  $\partial B_g$  est connexe mais  $\partial A_g$  a deux composantes connexes. On recolle  $A_g$  avec  $B_g$ . La variété projective obtenue a un bord auquel on peut encore attacher une copie de  $A_g$ ... on continue, recollant ainsi  $p$  copies de  $A_g$  avec  $p \geq 1$ . On termine en recollant une copie de  $B_g$ . On note  $\mathbb{T}_{g,p}$  la variété projective compacte sans bord ainsi obtenue. Elle est aussi difféomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

- Lorsque  $d_+ = 1$  et  $d_- \geq 2$ . Les rôles de  $A_g$  et  $B_g$  sont échangés.

- Lorsque  $d_+ = 1$  et  $d_- = 1$ . Les bords  $\partial A_g$  et  $\partial B_g$  ont chacun deux composantes connexes. Les recollements peuvent être décrits à l'aide de mots  $w$  en  $A$  et  $B$ ... c'est la construction des tores de Goldman  $\mathbb{T}_{g,w}^2 := \mathbb{T}_{g,w,e}^2$  déjà décrite dans l'exemple 1.10, avec  $h = 1$  (i.e. on ne considère ici que les exemples pour lesquels "l'holonomie" du recollement est triviale, c.f. cependant la remarque 4.10).

**Proposition 4.9** *Soit  $V$  une variété projective compacte à holonomie cyclique de dimension  $n \geq 2$ . Alors il existe un revêtement fini de  $V$  qui est isomorphe à un*

des exemples précédents: la sphère  $\mathbb{S}^n$ , une variété  $\mathbb{R}_g, \mathbb{S}_g, \mathbb{T}_{g,p}$  ou un des tores de Goldman  $\mathbb{T}_{g,w}^2$ .

En particulier,  $V$  admet un revêtement difféomorphe à  $\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$  ou  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{n-d}$ , avec  $d \in \{2, \dots, n-2\}$ .

**Remarque 4.10** Bien sûr, une telle variété est à holonomie nilpotente et on peut introduire les groupes  $N, \tilde{N}, \Gamma_0$  du théorème des briques ainsi que le groupe  $B$  de la section 4.2. Le groupe  $\Gamma_0$  est cyclique engendré par un élément  $\gamma$ . La démonstration ci-dessous permet en fait de décrire plus généralement toutes les variétés projectives compactes à holonomie dans  $N$  pour lesquels  $\dim B = 1$ . On obtient exactement les mêmes exemples sauf que, pour les exemples  $\mathbb{R}_g$  lorsque  $d_+ = 2$  ou  $d_- = 2$  et pour les tores  $\mathbb{T}_{g,w}^2$ , on doit s'autoriser une "holonomie non triviale des recollements". Ces exemples modifiés sont difféomorphes aux anciens.

**Démonstration** On se ramène au cas où les valeurs propres de  $g := h(\gamma)$  sont réelles positives. On note alors  $\alpha_1 > \dots > \alpha_r$  les valeurs propres de  $g$ ,  $E_i := \text{Ker}(g - \alpha_i)^{n+1}$  et  $d_i := \dim E_i$  de sorte que  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ . On choisit alors pour  $N$  un groupe nilpotent connexe maximal contenant  $g$  dont les blocs correspondent à cette décomposition. On note  $O$  une des  $2^d$  orbites ouvertes de  $N$  dans  $\mathbb{S}^n$ .

On doit tout d'abord décrire les "briques" c'est à dire décrire les ouverts  $N$ -invariants  $Y^+$  de l'adhérence  $\overline{O}$  tels que le quotient  $\langle g \rangle \backslash Y^+$  est compact. Les briques sont isomorphes à ces quotients.

Notons, pour  $1 \leq i \leq r-1$ ,  $Y^+(i)$  l'ouvert de  $\overline{O}$  formé des éléments qui ne sont ni dans la sphère de  $E_1 \oplus \dots \oplus E_i$ , ni dans la sphère de  $E_{i+1} \oplus \dots \oplus E_r$ .

**Lemme 4.11** *Avec ces notations. Les ouverts  $Y^+$  de  $\overline{O}$  sur lesquels le groupe  $\langle g \rangle$  agit proprement avec quotient compact sont exactement les ouverts  $Y^+(i)$  pour  $1 \leq i \leq r-1$ .*

**Démonstration** Lorsque  $g$  est diagonal, c'est l'exemple 5.10 de l'appendice. Le cas général s'en déduit.  $\square$

**Fin de la démonstration de la proposition 4.9** On doit aussi décrire comment ces briques se recollent. On reprend les idées de l'exercice 3.9. On remarque tout d'abord que sur la plupart des faces d'un ouvert  $Y^+(i)$ , on ne peut recoller que des ouverts  $Y^+(i)$  de même nature.

Si  $V$  est obtenu par recollement de briques toutes de même numéro  $i$ ,  $\tilde{V}$  s'identifie alors, comme variété projective au revêtement universel de l'ouvert  $U$  de l'exemple 4.7

Si deux briques de numéro  $i$  et  $j$  avec  $i < j$  se touchent le long d'une hypersurface, alors on a  $j = i + 1$  et  $d_j = 1$ . Dans ce cas, les briques de numéro  $j$  s'assemblent pour former des variétés projectives à bord isomorphes à  $A_j$  et les briques de numéro  $i$  s'assemblent pour former des variétés projectives à bord isomorphes à  $B_j$ . On reconstruit ainsi les exemples 4.8.  $\square$

## 4.5 Structures projectives en petite dimension

Décrivons dans cette section les variétés  $C^\infty$  compactes de dimension 3 ou 4 admettant une structure projective à holonomie nilpotente.

**Proposition 4.12** *Soit  $V$  une variété projective compacte à holonomie nilpotente de dimension  $n = 2, 3$  ou  $4$ .*

*Alors, en tant que variété  $C^\infty$ ,  $V$  est revêtue par  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ , une nilvariété compacte ou le produit  $\mathbb{T}^2 \times \Sigma_g$  du tore par une surface compacte de genre  $g$ .*

Cette proposition était annoncée dans [3].

**Démonstration** Soit  $N$  un groupe nilpotent connexe maximal contenant  $h(\Gamma)$ . D'après un théorème de Thurston (cf [13]), l'ensemble des holonomies  $h : \Gamma \rightarrow G$  des structures projectives sur  $V$  est un ouvert de  $\text{Hom}(\Gamma, G)$ . Ceci permet, en remplaçant  $h$  par un morphisme proche, puis  $\Gamma$  par un sous-groupe d'indice fini, de supposer que la composante elliptique des éléments de  $h(\Gamma)$  est triviale et donc que  $N$  est simplement connexe.

Soit  $B$  le sous-groupe connexe de  $N$  contenant  $\Gamma_0$  et tel que  $\Gamma_0 \backslash B$  est compact. Lorsque  $\dim B = 0, 1, n-1$  ou  $n$ , voir la section 4.1. On peut donc supposer  $n = 4$  et  $\dim B = 2$ . La variété  $V$  est donc un  $\mathbb{T}^2$ -fibré principal sur la surface compacte  $W$ . Si ce fibré est trivial, on a fini. Supposons, par l'absurde, que ce ne soit pas le cas. Il résulte du lemme 4.1 que  $B \cap [N, N] \neq \{1\}$ . En particulier  $N$  n'est pas commutatif. D'après la section 4.3, on a  $N \neq N_5^{\mathbb{R}}$ . Il ne reste que trois possibilités :  $N = N_{4,1}^{\mathbb{R}}$ ,  $N = N_{3,2}^{\mathbb{R}}$  ou  $N = N_{3,1,1}^{\mathbb{R}}$ . Montrons que, dans tous ces cas, l'adhérence  $\overline{O}$  d'une  $N$ -orbite ouverte dans  $\tilde{V}$  contient au plus 3 orbites de codimension 1.

Dans le premier cas, c'est clair car l'adhérence  $\overline{O}$  d'une  $N$ -orbite ouverte dans  $\mathbb{S}^n$  contient exactement 3 orbites de codimension 1. Dans les deux autres cas  $\overline{O}$  contient 4 orbites de codimension 1. Cependant dans ces cas  $[N, N]$  est de dimension 1, il est donc inclus dans  $B$ , mais  $[N, N]$  n'agit proprement que sur 2 de ces orbites.

On sait que la surface  $W$  est obtenue par recollement de surfaces à coins  $Z^+$  contractiles. Ces surfaces à coins  $Z^+$  sont des polygones dont le nombre de cotés est majoré par 3. Donc  $W$  est difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$  (voir figures 13, 14 et 15). D'où  $\Gamma = \Gamma_0$  et le lemme 4.1 nous assure que le fibré  $p : V \rightarrow W$  est un produit. Contradiction.  $\square$

## 4.6 Structures projectives sur le tore $\mathbb{T}^3$

Dans cette section, on détermine, à revêtement fini près, toutes les structures projectives sur le tore  $V = \mathbb{T}^3$ . La partie calculatoire des arguments est laissée sous forme d'exercices.

On introduit les notations  $N, \Gamma_0, B$  des sections 4.1 et 4.2. Le rang du groupe  $\Gamma_0$  est un entier non nul, car  $V$  n'est pas complète.

★ Si  $N$  n'est pas simplement connexe. Le lemme 4.3 explique comment construire ces exemples à partir de ceux où  $N$  est simplement connexe.

On suppose désormais  $N$  simplement connexe.

★ Si  $\text{rang}(\Gamma_0) = 3$ . La structure projective est invariante à gauche. Il s'agit de décrire les sous-groupes abéliens de dimension 3 de  $\text{SL}(4, \mathbb{R})$  agissant sur  $\mathbb{S}^3$  avec une orbite ouverte. C'est facile.

★ Si  $\text{rang}(\Gamma_0) = 1$ . Ce cas a été étudié dans la section 4.4 et sa remarque 4.10.

On suppose désormais  $\text{rang}(\Gamma_0) = 2$ .

★ Si  $N = N_{1,1,1,1}^{\mathbb{R}}$ . Ce cas à holonomie diagonale a été étudié dans l'exemple 3.7.

★ Si  $N = N_4^{\mathbb{R}}$ . Ce cas à holonomie unipotente a été étudié dans l'exercice 4.6.

★ Si  $N = N_{3,1}^{\mathbb{R}}$ ,  $N = N_{2,2}^{\mathbb{R}}$  ou  $N = N_{2,1,1}^{\mathbb{R}}$ . Dans chacun de ces cas, la détermination des valeurs possibles pour  $(B, Y^+)$  et de leurs recollements est laissée au lecteur sous la forme des trois exercices suivants. Dans ces exercices, on note  $\mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{u}$ ,  $\mathfrak{b}$ ... les algèbres de Lie de  $N$ ,  $A$ ,  $U$ ,  $B$ ... et on suit la méthode et les notations de l'exemple 4.2.

**Exercice 4.13** Montrer qu'il n'existe pas de variétés projectives compactes de dimension 3 à holonomie dans le groupe  $N = N_{3,1}^{\mathbb{R}}$  et telle que  $\text{rang}(\Gamma_0) = 2$ .

**Indication** L'adhérence  $\overline{O}$  contient 3 orbites de codimension 1 :  $O_1^+$ ,  $O_1^-$  et  $O_4$ . On montrera que si un groupe  $B$  agit librement sur  $O$  et  $O_1^+$  alors, quitte à changer de base de  $\mathbb{R}^4$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  de  $B$  est engendrée par

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifiera alors que les trois points  $B \setminus O_1^+$ ,  $B \setminus O_1^-$  et  $B \setminus O_4$  sont adhérents à la même extrémité du segment  $B \setminus O$ .

**Exercice 4.14** Soit  $B$  un sous-groupe non unipotent de dimension 2 du groupe  $N = N_{2,2}^{\mathbb{R}}$ . On veut décrire les variétés projectives compactes  $V$  de dimension 3 à holonomie dans  $N$  pour lesquelles  $\Gamma_0$  est un réseau de  $B$ .

On note  $\mathfrak{u}_1$  et  $\mathfrak{u}_2$  les deux droites  $A$ -invariantes de  $\mathfrak{u}$ .

Montrer que  $V$  est difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^3$ .

a) Montrer que si  $\mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{b}$  ou si  $\mathfrak{u}_2 \subset \mathfrak{b}$ ,  $V$  existe, est affine et son revêtement universel est isomorphe au produit d'une droite affine par le revêtement universel de  $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ .

b) On suppose que  $\mathfrak{u}_1 \not\subset \mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{u}_2 \not\subset \mathfrak{b}$ . Montrer qu'il existe alors 4 briques et décrire le processus de recollement. En déduire que l'on peut trouver une infinité de telles variétés projectives  $V$  pour lesquelles les revêtements universels ne sont pas deux à deux isomorphes.

**Indication** On a donc  $\dim \mathfrak{a} = 1$  et  $\dim \mathfrak{u} = 2$ . L'adhérence  $\overline{O}$  contient 4 orbites de codimension 1 :  $O_1^+$ ,  $O_1^-$ ,  $O_3^+$  et  $O_3^-$ .

a) On a  $O' = O \cup O_3^+ \cup O_3^-$  et  $B \setminus O'$  est compact.

b) On a  $O' = O \cup O_1^+ \cup O_1^- \cup O_3^+ \cup O_3^-$ . Les points  $B \setminus O_1^+$  et  $B \setminus O_3^+$  sont attachés d'un côté du segment  $B \setminus O'$ ; les points  $B \setminus O_1^-$  et  $B \setminus O_3^-$  sont attachés de l'autre côté.

**Exercice 4.15** Soit  $B$  un sous-groupe non diagonal de dimension 2 du groupe  $N = N_{2,1,1}^{\mathbb{R}}$ . On veut décrire les variétés projectives compactes  $V$  de dimension 3 à holonomie dans  $N$  pour lesquelles  $\Gamma_0$  est un réseau de  $B$ .

Montrer que  $V$  est difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^3$ .

On note  $x := \text{diag}(\lambda, \lambda, \mu, \nu)$  un générateur de  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ .

a) On suppose  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{b}$ . Montrer que  $V$  existe si et seulement si  $\lambda$  n'est pas entre  $\mu$  et  $\nu$ , et qu'alors  $V$  est affine et son revêtement universel est isomorphe au produit

d'une droite affine par le revêtement universel de  $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ .

b) On suppose que  $\mathfrak{u} \not\subset \mathfrak{b}$  et que  $\lambda$  est entre  $\mu$  et  $\nu$ . Montrer que  $V$  existe, est affine et que son revêtement universel est isomorphe au produit d'une demidroite affine par le revêtement universel de  $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ .

c) On suppose que  $\mathfrak{u} \not\subset \mathfrak{b}$  et que  $\lambda$  n'est pas entre  $\mu$  et  $\nu$ . Montrer qu'il existe alors 4 briques et décrire le processus de recollement. En déduire que l'on peut trouver une infinité de telles variétés projectives  $V$  pour lesquelles les revêtements universels ne sont pas deux à deux isomorphes.

**Indication** On a donc  $\dim \mathfrak{a} = 2$  et  $\dim \mathfrak{u} = 1$ . L'adhérence  $\overline{O}$  contient 4 orbites de codimension 1 :  $O_1^+$ ,  $O_1^-$ ,  $O_3$  et  $O_4$ .

a) Si  $\lambda \neq \mu$  et  $\lambda \neq \nu$ , on a  $O' = O \cup O_3 \cup O_4$ . Le quotient  $B \backslash O'$  est compact si et seulement si  $\lambda$  n'est pas entre  $\mu$  et  $\nu$ .

b) Si  $\lambda = \mu$ , on a  $O' = O \cup O_1^+ \cup O_1^- \cup O_3$ . Le point  $B \backslash O_1^+$  est attaché d'un côté du segment  $B \backslash O'$ ; les points  $B \backslash O_1^-$  et  $B \backslash O_3$  sont attachés de l'autre. On procède de même lorsque  $\lambda = \nu$ .

b') Si  $\lambda$  est strictement entre  $\mu$  et  $\nu$ . On a  $O' = O \cup O_1^+ \cup O_1^- \cup O_3 \cup O_4$ . Le point  $B \backslash O_1^+$  est attaché d'un côté du segment  $B \backslash O'$ ; les trois autres points sont attachés de l'autre côté.

c) Si  $\lambda$  n'est pas entre  $\mu$  et  $\nu$ . On a  $O' = O \cup O_1^+ \cup O_1^- \cup O_3 \cup O_4$ . Les points  $B \backslash O_1^+$  et  $B \backslash O_4$  sont attachés d'un côté du segment  $B \backslash O'$ ; les points  $B \backslash O_1^-$  et  $B \backslash O_3$  sont attachés de l'autre côté.

**Remarque** La même méthode devrait permettre d'obtenir une description tout aussi explicite des structures projectives sur  $\mathbb{T}^4$ ... cela est juste un peu plus long.

## 4.7 Variétés affines à holonomie résoluble

Il est tentant de vouloir généraliser le théorème 2.1 aux variétés affines  $V$  à holonomie résoluble...

... et d'introduire un sous-groupe résoluble connexe  $R$  du groupe affine qui rencontre le groupe d'holonomie en un sous-groupe d'indice fini et dont l'action sur  $\mathbb{R}^n$  se relève à  $\tilde{V}$ .

**Question** Soit  $V$  une variété affine compacte à holonomie résoluble. Le groupe des transformations affines de  $\tilde{V}$  a-t-il une orbite ouverte dans  $\tilde{V}$  ?

On appelle suspension hyperbolique du tore  $\mathbb{T}^2$ , la solvariété compacte de dimension 3 obtenue en quotientant le produit  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$  par la relation d'équivalence  $(t, x) \simeq (t+1, Ax)$  où  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  de déterminant 1 à coefficients entiers dont les valeurs propres sont positives et distinctes. Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Le théorème suivant est un premier pas vers cette conjecture (voir [10] et [11]).

**Théorème 4.16** (Dupont) Soit  $V$  une suspension hyperbolique du tore  $\mathbb{T}^2$ .

Toute structure projective sur  $V$  est affine.

Toute structure affine sur  $V$  est invariante à gauche.

## 5 Appendice : Actions de matrices diagonales

Soient  $E = \mathbb{R}^n$  et  $A$  le groupe des matrices inversibles  $n \times n$  diagonales à coefficients réels. Soient  $B$  un sous-groupe fermé de  $A$  et  $Y$  un ouvert  $A$ -invariant de  $E$ . Le but principal de cet appendice est de décrire les couples  $(B, Y)$  pour lesquels  $B$  agit proprement sur  $Y$  avec un quotient  $B \backslash Y$  compact. On suppose en outre, nous verrons que cela n'est pas restrictif, que  $B$  est connexe.

Nous montrons que ces couples sont en bijection avec les "éventails simpliciaux complets sur une armature de longueur  $n$ ". Tout ceci est fortement lié à la théorie des variétés algébriques dites toriques (voir par exemple [1] et sa bibliographie) mais ne semble pas en être une conséquence directe.

Cet appendice est utilisé en 3 pour décrire les variétés affines à holonomie diagonale.

Les résultats de cet appendice sont énoncés pour le corps  $\mathbb{R}$ . Ils s'étendent à tous les corps locaux sans modification notable des démonstrations (i.e. aux corps  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et aux extensions finies de  $\mathbb{Q}_p$  ou de  $\mathbb{F}_p[T^{-1}, T]$  avec  $p$  premier).

### 5.1 Sous-groupes connexes et armatures

Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  la base standard de  $E$ ,  $\mathfrak{a} := \{x = \text{diag}(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  l'espace vectoriel des matrices diagonales,  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la base de  $\mathfrak{a}$  définie par  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}e_j$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  la base du dual  $\mathfrak{a}^*$  définie par  $\alpha_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ . On note  $A_e$  la composante connexe de  $A$ ,  $\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A_e$  l'application exponentielle qui est donnée par  $\exp(\text{diag}(x_1, \dots, x_n)) = \text{diag}(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$  et  $\log : A_e \rightarrow \mathfrak{a}$  l'application inverse.

**Lemme 5.1** *Soit  $B$  un sous-groupe fermé de  $A$ .*

- a) *Il existe un (unique) sous-groupe fermé connexe  $B'$  de  $A$  contenant  $B \cap A_e$  tel que  $B'/(B \cap A_e)$  est compact.*
- b)  *$B$  agit proprement sur  $Y$  si et seulement si  $B'$  agit proprement sur  $Y$ .*
- c)  *$B \backslash Y$  est compact si et seulement si  $B' \backslash Y$  est compact.*

**Démonstration** a) A l'aide de l'application exponentielle, on se ramène à un problème analogue bien connu pour les sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^n$ .

b) et c) : clair. □

On supposera désormais que  $B$  est un sous-groupe fermé connexe de  $A$ .

**Définition 5.2** *On appelle armature une classe d'équivalence de  $n$ -uplets dans des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels pour la relation d'équivalence suivante : Soient  $f = (f_1, \dots, f_n)$  et  $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$  deux tels  $n$ -uplets et  $F$  et  $F'$  les espaces vectoriels qu'ils engendrent. Alors  $f$  est dit équivalent à  $f'$  s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\phi : F \rightarrow F'$  tel que, pour tout  $i$ ,  $\phi(f_i) = f'_i$ .*

*L'entier  $n = \ell(f)$  s'appelle la longueur de l'armature et la dimension  $r = r(f)$  de  $F$  le rang de l'armature.*

Montrons comment à chaque sous-groupe fermé connexe  $B$  de  $A$ , on peut associer une armature : notons  $p : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$  la projection naturelle et  $f = (p(\varepsilon_1), \dots, p(\varepsilon_n))$ . La classe de  $f$  est une armature de longueur  $n$ .

**Lemme 5.3** *Cette application induit une bijection*

$$\{\text{sous-groupes fermés connexes } B \text{ de } A\} \longleftrightarrow \{\text{armatures } f \text{ de longueur } n\}.$$

**Remarque** On a l'égalité  $r(f) = \text{codim}_A B$ .

**Démonstration** On récupère  $\mathfrak{b}$  comme le noyau de l'application linéaire qui va de  $\mathfrak{a}$  dans  $F$  et qui envoie  $\varepsilon_i$  sur  $f_i$ .  $\square$

## 5.2 Éventails

Pour chaque élément  $u$  de  $E$ , on note  $(u_1, \dots, u_n)$  ses composantes sur la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Pour  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , on note  $I^c$  le complémentaire de  $I$ ,

$$e_I := \{u \in E / i \notin I \Rightarrow u_i = 0\} \text{ et}$$

$$e'_I := \{u \in E / i \notin I \Leftrightarrow u_i = 0\}.$$

les parties  $e'_i$  sont les orbites de  $A$  dans  $E$ . Une partie  $Y$  de  $E$  est  $A$ -invariante si et seulement si elle est réunion de certains des  $e'_i$ . On note alors

$$\Delta := \{I \subset \{1, \dots, n\} / e'_{I^c} \subset Y\}.$$

La partie  $Y$  est ouverte si et seulement si toute partie  $J$  d'un élément  $I$  de  $\Delta$  est aussi dans  $\Delta$ .

Soient  $f$  une armature dont on note encore  $f = (f_1, \dots, f_n)$  un représentant et  $F$  l'espace vectoriel engendré par  $f$ . On pose

$$f_I := \left\{ \sum_{i \in I} z_i f_i / z_i \in \mathbb{R} \right\} \text{ et}$$

$$f_I^+ := \left\{ \sum_{i \in I} z_i f_i / z_i \geq 0 \right\}.$$

**Définition 5.4** *On dit qu'une partie  $\Delta$  de l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, n\}$  est un éventail d'armature  $f$  si on a*

$$a) \forall I \in \Delta, J \subset I \Rightarrow J \in \Delta$$

$$b) \forall I_1, I_2 \in \Delta, f_{I_1}^+ \cap f_{I_2}^+ = f_{I_1 \cap I_2}^+.$$

*L'éventail est dit simplicial si:  $\forall I \in \Delta, \dim(f_I) = \#I$ .*

*L'éventail est dit complet si  $\bigcup_{I \in \Delta} f_I^+ = F$*

**Remarque** - On pourrait penser à un éventail comme à une famille de cônes convexes polyédraux (les  $(f_I^+)_{I \in \Delta}$ ) telle que (a) toute face d'un cône de la famille est encore dans la famille et (b) l'intersection de deux cônes de la famille est une face pour chacun d'eux. "Simplicial" signifierait alors que les cônes sont simpliciaux et "complet" signifierait que les cônes recouvrent tout l'espace.

- Cependant notre définition est un petit peu plus précise car il se pourrait que plusieurs vecteurs  $f_i$  soient sur une même demi-droite extrémale ou même égaux! Il se pourrait aussi que la réunion des parties  $I$  de  $\Delta$  ne soit pas égale à  $\{1, \dots, n\}$ !

- Une autre différence entre les éventails que nous introduisons et les éventails introduits par Demazure dans la description des variétés toriques est que nous ne supposons pas que les vecteurs  $f_i$  sont à coordonnées entières.

Nous pouvons enfin énoncer le résultat principal de cette appendice :

**Théorème 5.5** *Soit  $B$  un sous-groupe fermé connexe du groupe  $A$  des matrices diagonales et  $Y$  un ouvert  $A$ -invariant de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $p : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$  la projection naturelle,  $f := (p(\varepsilon_1), \dots, p(\varepsilon_n))$  et  $\Delta := \{I \subset \{1, \dots, n\} / e'_{I^c} \subset Y\}$ . Alors*

a)  *$B$  agit proprement sur  $Y$  si et seulement si  $\Delta$  est un éventail simplicial d'armature  $f$ .*

b)  *$B \backslash Y$  est quasi compact si et seulement si  $\Delta$  est complet.*

Rappelons que " $B \backslash Y$  quasi-compact" signifie qu'il existe un compact  $K$  de  $Y$  tel que  $Y = B.K$ .

Dans [24], Smillie montre que, pour tout éventail simplicial complet, le quotient  $B \backslash Y$  est compact mais il ne considère pas la réciproque.

Nous donnerons une démonstration de ces deux implications en 5.3 et 5.4.

**Corollaire 5.6** *L'application  $(B, Y) \rightarrow (f, \Delta)$  décrite dans cette proposition induit une bijection entre*

$$\left\{ \begin{array}{l} (B, Y) \text{ où } B \text{ est un sous-groupe} \\ \text{fermé connexe du groupe} \\ A \text{ des matrices diagonales et} \\ Y \text{ un ouvert } A\text{-invariant de } \mathbb{R}^n \\ \text{tels que } B \text{ agit proprement sur } Y \\ \text{avec un quotient } B \backslash Y \text{ compact} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f, \Delta) \text{ où } f \text{ est une} \\ \text{armature de longueur } n \\ \text{et } \Delta \text{ un éventail} \\ \text{simplicial complet} \\ \text{d'armature } f \end{array} \right\}.$$

### 5.3 Action propre

Pour tout élément  $g$  de  $A$ , on note  $\langle g \rangle$  le groupe qu'il engendre. Pour  $a$  dans  $\mathbb{R}^*$ , on note

$$E_a(g) := \{x \in E / g.x = a.x\},$$

$$E_{\pm}(g) := \bigoplus_{|\alpha| \geq 1} E_a(g),$$

$$E_0(g) := \bigoplus_{|\alpha|=1} E_a(g) \text{ et}$$

$$E_{0,\pm}(g) := E_0(g) \oplus E_{\pm}(g).$$

**Lemme 5.7** *Soit  $g$  dans  $A - \{1\}$  et  $Y$  un ouvert  $A$ -invariant de  $E$ . Le groupe  $\langle g \rangle$  agit proprement sur  $Y$  si et seulement si  $Y$  est inclus dans  $E - E_{0,+}(g)$  ou dans  $E - E_{0,-}(g)$ .*

**Démonstration**  $\Leftarrow$  L'élément  $g$  induit une contraction sur  $E_-(g)$ . Donc  $\langle g \rangle$  agit proprement sur  $E_-(g) - \{0\}$ . On en déduit que  $\langle g \rangle$  agit proprement sur  $E - E_{0,+}(g) \simeq (E_-(g) - \{0\}) \times E_{0,+}(g)$ . De même  $\langle g \rangle$  agit proprement sur  $E - E_{0,-}(g)$ .

$\Rightarrow$  Sinon, on peut trouver  $u$  dans  $Y \cap E_{0,-}(g)$  et  $w$  dans  $Y \cap E_{0,+}(g)$ . Ecrivons  $u = u_0 + u_-$  et  $w = w_0 + w_+$  avec  $u_0, w_0$  dans  $E_0(g)$ ,  $u_-$  dans  $E_-(g)$  et  $w_+$  dans  $E_+(g)$ . Comme  $Y$  est ouvert et  $A$ -invariant, on peut choisir  $u$  et  $w$  de sorte que  $u_0 = w_0$ . Soit  $(n_k)_{k \geq 1}$  une suite strictement croissante d'entiers telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{n_k} u_0 = u_0$ . Soit  $u_k := u + g^{-n_k} w_+$ , c'est une suite de points de  $Y$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u \in Y$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{n_k} u_k = w \in Y$ . Ceci contredit la propriété de l'action de  $\langle g \rangle$  sur  $Y$ .  $\square$

**Lemme 5.8** *Soit  $B$  un sous-groupe fermé connexe de  $A$  et  $Y$  un ouvert  $A$ -invariant de  $E$ .  $B$  agit proprement sur  $Y$  si et seulement si, pour tout  $g$  dans  $B$ , le groupe  $\langle g \rangle$  agit proprement sur  $Y$ .*

**Démonstration**  $\Rightarrow$  Evident.

$\Leftarrow$  On veut montrer que pour tout compact  $K$  de  $Y$ , l'ensemble  $\Phi := \{g \in B/g.K \cap K \neq \emptyset\}$  est compact. Notons

$$\Delta' := \{I \subset \{1, \dots, n\} / Y \subset E - e_{I^c}\}.$$

Le lemme précédent prouve que

$$\mathfrak{b} - \{0\} = \bigcup_{I \in \Delta', \varepsilon = \pm 1} \{x \in \mathfrak{b} / \forall i \in I, \varepsilon \alpha_i(x) > 0\}.$$

Il résulte alors du fait ci-dessous que, pour  $\eta \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\mathfrak{b}_\eta := \bigcup_{I \in \Delta', \varepsilon = \pm 1} \{x \in \mathfrak{b} / \forall i \in I, \varepsilon \alpha_i(x) > \eta\}$$

a un complémentaire compact. Mais pour  $\eta$  suffisamment grand, on a

$$\log(\Phi) \cap \mathfrak{b}_\eta = \emptyset;$$

en effet, il suffit de prendre  $\eta > \sup_{I \in \Delta'; u, w \in K} (v_I(u) - v_I(w))$  où les réels  $v_I(u) := \sup_{i \in I} \log |u_i|$  sont bien définis pour  $u$  dans  $E - e_I$ .

Donc  $\Phi$  est compact.  $\square$

**Fait** *Soient  $X$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $r$  et  $(\beta_{i,j})_{i=1, \dots, M; j=1, \dots, N_i}$  une famille finie de formes linéaires sur  $X$ . Pour  $\eta$  dans  $\mathbb{R}$ , on note*

$$X_\eta = \bigcup_{i=1, \dots, M} \{x \in X / \inf_{j=1, \dots, N_i} \beta_{i,j}(x) > \eta\}.$$

*On a l'implication*

$$X_0 = X - \{0\} \implies \forall \eta \in \mathbb{R}, X_\eta \text{ a un complémentaire compact.}$$

La démonstration de cet exercice d'analyse convexe est laissée au lecteur.

**Démonstration de la proposition (a)**

**Premier cas:**  $\dim \mathfrak{b} = 1$ .

Dans ce cas, on choisit  $g$  dans  $B - \{1\}$ . L'élément  $x := \log g$  est une base de  $\mathfrak{b}$ . Ecrivons  $x = \sum_{1 \leq i \leq n} z_i \varepsilon_i$  avec  $z_i \in \mathbb{R}$  et posons

$$I_{0,\pm}(g) := \{i \in \{1, \dots, n\} / e_i \in E_{0,\pm}(g)\},$$

$$I_{\pm}(g) := I_{0,\mp}(g)^c = \{i \in \{1, \dots, n\} / \pm z_i > 0\}.$$

On a la suite d'équivalences dont la première est donnée par le lemme 5.7.

$$\begin{aligned} & B \text{ agit proprement sur } Y \\ \iff & \forall I_1, I_2 \in \Delta, I_1^c \not\subset I_{0,+}(g) \text{ ou } I_2^c \not\subset I_{0,-}(g) \\ \iff & \forall I_1, I_2 \in \Delta, I_1 \not\supset I_-(g) \text{ ou } I_2 \not\supset I_+(g) \\ \iff & \begin{cases} \forall I_1, I_2 \in \Delta, \forall \lambda, \beta_i, \gamma_i \geq 0, \text{ on a l'implication} \\ \lambda x + \sum_{i \in I_1} \beta_i \varepsilon_i = \sum_{i \in I_2} \gamma_i \varepsilon_i \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \forall I \in \Delta, \dim f_I = \#I \\ \forall I_1, I_2 \in \Delta, f_{I_1}^+ \cap f_{I_2}^+ = f_{I_1 \cap I_2}^+ \end{cases} \end{aligned}$$

c'est ce que l'on voulait.

**Cas général:** Pour tout élément  $x$  de  $\mathfrak{a}$ , on note  $F_x := \mathfrak{a}/\mathbb{R}.x$ ,  $p_x : \mathfrak{a} \rightarrow F_x$  la projection naturelle et  $f_{x,i} := p_x(\varepsilon_i)$ .

D'après le lemme 5.8 et l'étude du premier cas, il suffit de montrer les équivalences, pour  $I$  partie de  $\{1, \dots, n\}$ :

$$\dim f_I = \#I \iff \forall x \in \mathfrak{b}, \dim f_{x,I} = \#I,$$

et, pour  $I_1, I_2$  parties de  $\{1, \dots, n\}$  telles que  $\dim f_{I_1} = \#I_1$  et  $\dim f_{I_2} = \#I_2$  :

$$f_{I_1}^+ \cap f_{I_2}^+ = f_{I_1 \cap I_2}^+ \iff \forall x \in \mathfrak{b}, f_{x,I_1}^+ \cap f_{x,I_2}^+ = f_{x,I_1 \cap I_2}^+.$$

La première est claire car les deux membres signifient que  $\mathfrak{b} \cap \varepsilon_I = \{0\}$ . La deuxième aussi car les deux membres sont équivalents à  $\mathfrak{b} \cap (-\varepsilon_{I_1}^+ + \varepsilon_{I_2}^+) = \{0\}$ .  $\square$

## 5.4 Quotients compacts

**Démonstration de la proposition (b)** Notons  $e_0 := e_1 + \dots + e_n \in E$ , c'est un point dont l'orbite sous  $A$  est ouverte.

$\implies$  Soit  $x$  dans  $\mathfrak{a} - \{0\}$  et  $g = \exp x$ . Comme  $B \setminus Y$  est quasicompact, on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers  $n_k$  et des éléments  $b_k$  de  $B$  tels que la limite  $l = \lim_{k \rightarrow \infty} g^{n_k} b_k . e_0$  existe et est dans  $Y$ . Soit  $I \in \Delta$  tel que  $l$  est dans  $e_{I^c}'$ . Notons  $h_k = g^{n_k} b_k$  et  $y_k = \log(h_k)$ . On a

$$\forall i \in I, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i(y_k) = -\infty$$

$$\forall i \notin I, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i(y_k) \in \mathbb{R}$$

On peut donc trouver une suite  $c_k$  bornée dans  $\mathfrak{a}$  telle que

$$-n_k x \in c_k + \mathfrak{b} + \varepsilon_I^+.$$

On en déduit que  $-x$  est dans  $\mathfrak{b} + \varepsilon_I^+$  et donc que  $\mathfrak{a} = \bigcup_{I \in \Delta} (\mathfrak{b} + \varepsilon_I^+)$  et  $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = \bigcup_{I \in \Delta} f_I^+$ .

$\impliedby$  On veut montrer que toute suite dans  $B \setminus Y$  admet une sous-suite convergente. On peut supposer que cette suite est dans l' $A$ -orbite ouverte. Il suffit donc de montrer que pour toute suite  $g_m$  dans  $A$ , il existe une suite strictement croissante d'entiers  $m_k$  et des éléments  $b_k$  de  $B$  tels que la limite  $l = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{m_k} b_k . e_0$  existe et est dans  $Y$ .

Pour cela, notons  $x_m := \log(g_m)$ . Comme  $\Delta$  est fini, on peut supposer qu'il existe  $I \in \Delta$  tel que, pour tout  $m$ ,  $-x_m$  est dans  $\mathfrak{b} + \varepsilon_I^+$ . On peut trouver une suite  $b_m$  dans  $B$  telle que,  $y_m := x_m + \log(b_m)$  est dans  $-\varepsilon_I^+$ .

Quitte à extraire de nouveau une sous-suite, on peut supposer que les suites  $\alpha_i(y_m)$  convergent dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Soit  $I_1$  la partie de  $I$  telle que

$$\forall i \in I_1, \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_i(y_m) = -\infty$$

$$\forall i \notin I_1, \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_i(y_m) \in \mathbb{R}$$

Soit  $h_m = g_m b_m$ . Pour  $i$  dans  $I_1^c$ , les suites  $\alpha_i(h_m)$  restent dans un compact de  $\mathbb{R}^*$ , on peut les supposer convergentes. La limite  $l := \lim_{m \rightarrow \infty} h_m e_0$  existe et est dans  $e'_{I_1^c}$ . Comme  $Y$  est ouvert,  $l$  est dans  $Y$ .

Ceci termine la démonstration de la proposition.  $\square$

## 5.5 Le quotient $Z^+$

Gardons les notations  $f, \Delta, B, Y$  du corollaire 5.6 et notons

$$Y^+ := Y \cap [0, \infty]^n, \quad Z^+ := B \setminus Y^+$$

et, pour  $I \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $Y_I^+ = Y^+ \cap e_{I^c}$  et  $Z_I^+ := B \setminus Y_I^+$ . Le quotient  $Z^+$  est une variété compacte à coins de dimension  $r = r(f) = n - \dim B$ . La partie  $Z_I^+$  est appelée "facette de  $Z^+$  de type  $I$ ". Le lien entre  $Z^+$  et l'éventail  $(f, \Delta)$  est donné par les assertions suivantes :

- (i)  $\Delta = \{I / Z_I^+ \neq \emptyset\}$
- (ii)  $\dim Z_I^+ + \dim f_I^+ = r, \forall I \in \Delta$
- (iii)  $Z_{I_1}^+ \subset Z_{I_2}^+ \Leftrightarrow f_{I_1}^+ \supset f_{I_2}^+, \forall I_1, I_2 \in \Delta$

Autrement dit la relation d'incidence entre les facettes  $Z_I^+$  de  $Z^+$  est duale de la relation d'incidence entre les facettes  $f_I^+$  de l'éventail. On peut donc retrouver l'éventail  $\Delta$  à partir de  $Z^+$  et de la numérotation (i.e. du type) de ses facettes de codimension 1.

En pratique, pour les petites valeurs de  $r$ , il est plus rapide de dessiner  $Z^+$  que de se donner l'éventail  $\Delta$ !

Voici quelques exemples. Dans ces exemples, on note  $f = (f_1, \dots, f_n)$  une armature de rang  $r$  et on détermine tous les éventails  $\Delta$  simpliciaux complets d'armature  $f$ . On suppose que 0 est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de  $f_1, \dots, f_n$ . Cette condition est nécessaire pour que  $\Delta$  existe. On suppose aussi pour simplifier que toute sous-famille  $f_{i_1}, \dots, f_{i_r}$  à  $r$  éléments est libre.

**Exemple 5.9**  $n \geq 2, r = n - 1$  et  $\dim B = 1$ .

Dans ce cas l'éventail est unique. On a alors

$$\Delta = \{I \subset \{1, \dots, n\} / I \neq \{1, \dots, n\}\},$$

$$Y = \mathbb{R}^n - \{0\} \text{ et}$$

$Z^+$  est un  $n$ -simplexe.

**Exemple 5.10**  $n \geq 3, r = n - 2$  et  $\dim B = 2$ .

On suppose aussi pour simplifier que l'armature  $f$  est centrée c'est à dire que  $f_1 + \dots + f_n = 0$ . On a alors une autre relation  $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$ . On choisit

la numérotation de sorte que  $a_1 < \dots < a_n$ . Il existe alors exactement  $n - 1$  éventails simpliciaux complets d'armature  $f$ . Pour les décrire, on fixe un entier  $\ell \in [1, n - 1]$ . On a alors

$$\Delta = \{I \subset \{1, \dots, n\} / I \cap \{1, \dots, \ell\} \neq \emptyset \text{ et } I \cap \{\ell + 1, \dots, n\} \neq \emptyset\},$$

$$Y = (\mathbb{R}^\ell - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n-\ell} - \{0\}) \text{ et}$$

$Z^+$  est le produit d'un  $(\ell - 1)$ -simplexe par un  $(n - \ell - 1)$ -simplexe.

**Exemple 5.11**  $n \geq 3$ ,  $r = 1$  et  $\dim B = n - 1$ .

Les vecteurs  $f_i$  sont des réels. On choisit la numérotation de sorte que  $f_1 \leq \dots \leq f_\ell < 0 < f_{\ell+1} \leq \dots \leq f_n$ . Il existe alors exactement  $\ell(n - \ell)$  éventails simpliciaux complets d'armature  $f$ . Pour les décrire, on fixe deux entiers  $i \in [1, \ell]$  et  $j \in [\ell + 1, n]$ . On a alors

$$\Delta = \{\emptyset, \{i\}, \{j\}\},$$

$$Y = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n / u_h \neq 0 \ \forall h \neq i, j\} \text{ et}$$

$Z^+$  est un segment dont les extrémités ont pour numéro  $i$  et  $j$ .

**Exemple 5.12**  $n \geq 4$ ,  $r = 2$  et  $\dim B = n - 2$ .

On choisit la numérotation  $f_1, \dots, f_n$  donnée par l'ordre cyclique sur le cercle  $S^1$ . Les éventails simpliciaux complets d'armature  $f$  sont alors paramétrés par les suites  $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$  telles que, en notant  $i_0 := i_\ell$ , on a, pour tout  $h = 1, \dots, \ell$ ,  $\det(f_{i_{h-1}}, f_{i_h}) > 0$ . On a alors

$$\Delta = \{\emptyset, \{i_1\}, \dots, \{i_\ell\}, \{i_0, i_1\}, \dots, \{i_{\ell-1}, i_\ell\}\},$$

$$Y = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n / (u_i, u_j) \neq (0, 0) \ \forall \{i, j\} \notin \Delta\} \text{ et}$$

$Z^+$  est un  $\ell$ -gone.

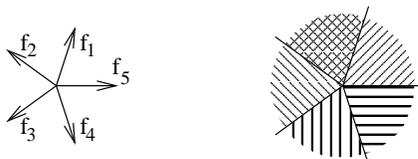


Figure 18: Une armature  $f$  et un éventail d'armature  $f$

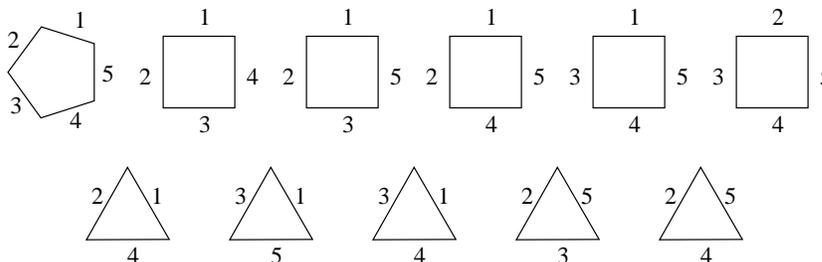


Figure 19: Les variétés  $Z^+$  des éventails d'armature  $f$

Si  $n = 5$  et si  $f$  est l'armature  $(f_1, \dots, f_5)$  avec  $f_i = (\cos(\frac{2\pi i}{5}), \sin(\frac{2\pi i}{5}))$  dessiné dans la figure 18, il y a onze éventails possibles. On a dessiné dans la figure 19 les onze  $\ell$ -gones correspondants.

Terminons par un exercice basé sur l'exemple précédent après réindexation de  $\mathbb{R}^5$  en posant  $j \equiv 2i \pmod{5}$ . Dans cet exercice, on recollera 32 pentagones.

**Exercice** Soit  $Y = \{u = (u_1, \dots, u_5) \in \mathbb{R}^5 / (u_{i-1}, u_i) \neq (0, 0) \forall i = 1, \dots, 5\}$  où on a noté  $u_0 := u_5$ . Montrer que  $Y$  est difféomorphe au produit  $\mathbb{R}^3 \times \Sigma_5$  où  $\Sigma_5$  est une surface compacte de genre 5.

## Références

- [1] M.AUDIN - The topology of torus actions on symplectic manifolds, PM 93 Birkhäuser (1990).
- [2] L.AUSLANDER - Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups, Ann. Math. 71 (1960) p. 579-590.
- [3] Y.BENOIST - Nilvariétés projectives, Comment. Math. Helv. 69 p.447-473 (1994).
- [4] Y.BENOIST - Une nilvariété non affine, CRAS 315 (1992) p.983-986 et Journ. Diff. Geom. 41 (1995) p.21-52.
- [5] D.BURDE, F.GRUNEWALD - Modules for certain Lie algebras of maximal class, Journ. Pure Appl. Alg. 99 (1995) p.239-254.
- [6] J.P.BENZECRI - Sur les variétés localement affines et localement projectives, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960) p.229-332.
- [7] Y.CARRIERE - Un survol de la théorie des variétés affines, Séminaire de théorie Spectrale et géométrie de Chambéry-Grenoble (1988) p.9-22.
- [8] S.CHOI - Convex decomposition of real projective surfaces, Journ. Diff. Geom. 40 (1994) p.165-208 et p. 239-283.
- [9] S.CHOI, W.GOLDMAN - Convex real projective structures on closed surfaces are closed, Proc. Am. Math. Soc. 118 (1993) p.657-661.
- [10] S.DUPONT - Variétés projectives à holonomie dans le groupe  $\text{Aff}(1, \mathbb{R})$ , preprint (1999).
- [11] S.DUPONT - Solvariétés projectives de dimension 3, preprint (1999).
- [12] D.FRIED, W.GOLDMAN, M.HIRSCH - Affine manifolds with nilpotent holonomy, Comm. Math. Helv. 56 (1981) p.487-523.
- [13] W.GOLDMAN - Geometric structures on manifolds and varieties of representations, Contemporary Math. 74 (1988) p.169-198.
- [14] W.GOLDMAN - Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) p.791-845.
- [15] W.GOLDMAN - Projective geometry on manifolds, preprint (1988).
- [16] R.GUNNING - Special coordinate coverings of Riemann surfaces, Math. Ann. 170 (1970) p.67-86.
- [17] M.INOUE, S.KOBAYASHI, T.OCHIAI - Holomorphic affine connections on compact complex surfaces, Journ. Fac. Sc. Tokyo 27 (1980) p.247-264.
- [18] S.KOBAYASHI, T.OCHIAI - Holomorphic projective structures on compact complex surfaces, Math. Annalen 249 (1980) p.75-94.
- [19] B.KLINGLER - Structures affines et projectives sur les surfaces complexes, Ann. Inst. Fourier 48 (1998) p.441-477.
- [20] B.KLINGLER - Un théorème de rigidité non métrique pour les variétés localement symétriques hermitiennes, preprint (1999).
- [21] J.MILNOR - On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, Advances in Math. 25 (1977) p.178-187.
- [22] T.NAGANO, K.YAGI - The affine structure on the real two torus, Osaka Jour. Math. 11 (1974) p.181-210.
- [23] RAGHUNATHAN - Discrete subgroups of Lie groups, Springer (1972).
- [24] J.SMILLIE - Affine manifolds with diagonal holonomy, preprint (1976) p.1-11.
- [25] D.SULLIVAN, W.THURSTON - Manifolds with canonical coordinate charts: some examples, L'Ens. Math. 29 (1983) p.15-25.