Convexes divisibles

Yves Benoist

Résumé

Nous étudions les groupes discrets Γ de transformations projectives de l'espace projectif réel qui divisent un ouvert convexe saillant Ω, c'est-à-dire qui préservent Ω et ont un quotient $\Gamma\backslash\Omega$ compact.

Nous décrivons tout d'abord l'adhérence de Zariski de ces groupes Γ et étudions leur "espace de déformation".

Ensuite, nous supposons que Ω est strictement convexe. Nous montrons que le groupe Γ est un groupe hyperbolique, que le flot géodésique de l'espace quotient $\Gamma\backslash\Omega$ est d'Anosov, que le bord $\partial\Omega$ est de classe C^1 et que son application normale est Hölder continue. Nous montrons aussi le résultat de rigidité suivant: si l'application normale est absolument continue, alors Ω est un ellipsoïde.

Abstract **Divisible convex**

We study the discrete groups Γ of projective transformations of the real projective space which divide a properly convex open subset Ω (i.e. which preserve Ω and whose quotient $\Gamma\backslash\Omega$ is compact).

We describe the Zariski closure of these groups Γ and we study their "deformation space".

Suppose now that Ω is strictly convex. We show that Γ is hyperbolic, that the geodesic flow of the quotient space $\Gamma\backslash\Omega$ is Anosov, that the boundary $\partial\Omega$ is of class C^1 and that its normal map is Hölder continuous; moreover, the following rigidity assertion holds: the normal map is absolutely continuous if and only if Ω is an ellipsoïd.

1 Notations et définitions

Notons $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ l'espace projectif de $\mathbb{R}^m$ et $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ le groupe des transformations projectives de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$: c'est le quotient du groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ par le groupe des homothéties. Un ouvert Ω de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ est dit convexe si son intersection avec toute droite projective de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ est connexe. Il est dit convexe saillant (ou proprement convexe) si, en outre, il existe un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ qui ne rencontre pas l'adhérence de Ω. Il est dit strictement convexe si, en outre, toute droite projective de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ rencontre le bord $\partial\Omega := \overline{\Omega} - \Omega$ en au plus deux points. La situation qui nous intéresse ici est la suivante: on se donne un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ qui préserve un ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ et tel que le quotient $\Gamma\backslash\Omega$ est compact. On dit alors que Γ divise Ω et que Ω est divisible. Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer Γ sans torsion, ce que nous ferons dans tout cet article. Le quotient $M = \Gamma\backslash\Omega$ est alors une variété C^∞.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^m$ de signature $(1, m-1)$ et $\Omega_0 := \{[v] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^m) \ / \ q(v) > 0\}$. Nous appellerons *ellipsoïde* un tel ouvert convexe de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$. L'ellipsoïde est un ouvert strictement convexe divisible. En effet, il est divisé par tous les réseaux cocompacts du groupe $\mathrm{SO}(q)$ des isométries de q. Il existe d'autres ouverts strictement convexes divisibles. Cela résulte de la construction de [11], du théorème de Koszul dans [14] et du théorème 3.

Tout ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ est muni d'une distance d_Ω appelée distance de Hilbert et définie par, pour tout x, y dans Ω, $d_\Omega(x, y) = |\log((a, b, x, y))|$ où a et b sont les deux points du bord de Ω tels que a, b, x et y sont alignés et où (a, b, x, y) est le birapport de ces quatre points.

On appelle géodésique de Ω l'intersection de Ω avec une droite projective. Ces courbes minimisent la distance de Hilbert. Réciproquement, lorsque Ω est strictement convexe, toute courbe qui minimise la distance est obtenue ainsi. Pour toute variété C^∞, on note SN le fibré tangent en sphère à N: c'est la variété des directions tangentes à N. Les géodésiques de Ω définissent un feuilletage de dimension 1 Γ-invariant de $S\Omega$ appelé feuilletage géodésique de Ω. L'image de ce feuilletage dans la variété compacte SM est appelé feuilletage géodésique de M. Ce feuilletage est orienté et de classe C^∞.

Pour $w = (x, \xi)$ dans $S\Omega$, on note $\widetilde{\varphi}_t(w)$, la direction tangente à la géodésique issue de x dans la direction ξ, tangente prise au point x_t à distance t de x. Ce flot $\widetilde{\varphi}_t$, appelé flot géodésique, est porté par le feuilletage géodésique. Ce flot induit un flot noté φ_t sur le quotient $SM = \Gamma\backslash S\Omega$ encore appelé flot géodésique de la distance de Hilbert. Sa régularité est celle du bord $\partial\Omega$: autrement dit, si $\partial\Omega$ est de classe C^1, alors le flot géodésique aussi.

L'hypothèse de stricte convexité sur notre ouvert Ω peut être vue comme un analogue de l'hypothèse de courbure négative pour les variétés riemanniennes. Les résultats que nous allons présenter confirmeront en général cette analogie.

2 Principaux résultats

Théorème 1 *Soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion de* $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ *qui divise un ouvert convexe saillant* Ω *de l'espace projectif* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$. *On note* C *l'un des deux cônes convexes de* $\mathbb{R}^m$ *d'image* Ω. *Alors, on est dans l'un des trois cas suivants.*
(i) C *est un produit.*
(ii) C *est homogène.*
(iii) Γ *est Zariski dense dans* $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$.

Remarques (i) "C est un produit" signifie qu'il existe une décomposition de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ et des cônes convexes C_1 et C_2 de $\mathbb{R}^{m_1}$ et $\mathbb{R}^{m_2}$ avec $C = C_1 \times C_2$. Dans ce cas, les ouverts convexes Ω_i images de C_i dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{m_i})$ sont divisibles.
(ii) Les cônes convexes saillants homogènes divisibles sont exactement les cônes convexes homogènes autoduaux. Ils ont été classifiés par Koecher et Vinberg.
(iii) Lorsque Ω est strictement convexe, on retrouve le théorème 3.6 de [3].

Ce théorème donne donc toutes les adhérences de Zariski possibles des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ qui divisent un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$.

Fixons maintenant un groupe Γ_0 de type fini. On appelle centre virtuel de Γ_0 le sous-groupe Z'_{Γ_0} de Γ_0 formé des éléments g dont le centralisateur est d'indice fini dans Γ_0.

Notons $\mathcal{H}_{\Gamma_0} := \mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$ et notons $\mathcal{E}_{\Gamma_0} := \{\rho \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}$ fidèle, d'image $\Gamma := \rho(\Gamma_0)$ discrète et divisant un ouvert convexe saillant Ω_ρ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ $\}$. Koszul a montré dans [14] que cet ensemble $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ est ouvert dans $\mathcal{H}_{\Gamma_0}$.

Le théorème suivant apporte des précisions sur cet "espace de déformation" $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$.

Théorème 2 *Si le centre virtuel de* Γ_0 *est trivial,* $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ *est fermé dans* $\mathcal{H}_{\Gamma_0}$.

Remarques - Autrement dit, $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ est une réunion finie de composantes connexes de $\mathcal{H}_{\Gamma_0}$.
- L'hypothèse $Z'_{\Gamma_0} = \{1\}$ est anodine car elle est vérifiée dès qu'il existe un élément ρ de $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ pour lequel on n'est pas dans le cas trivial (i) du théorème 1. C'est automatiquement le cas lorsque un des ouverts Ω_ρ est strictement convexe.
- En dimension $m - 1 = 2$, ce théorème est dû à Choi-Goldman ([5]).
- En dimension $m - 1 = 3$, ce théorème a été annoncé indépendamment par Kim ([13]).

Théorème 3 *Soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion de* $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ *qui divise un ouvert convexe saillant* Ω *de l'espace projectif* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$. *Alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) L'ouvert Ω *est strictement convexe.*
(ii) Le bord $\partial\Omega$ *est de classe* C^1.
(iii) Le groupe Γ *est hyperbolique.*
(iv) Le feuilletage géodésique de la variété projective quotient $\Gamma\backslash\Omega$ *est d'Anosov.*

La notion de groupe hyperbolique est celle de Gromov (voir [8]).

Un feuilletage d'Anosov est simplement un feuilletage qui porte un champ de vecteurs d'Anosov (voir [1]). Lorsque $\partial\Omega$ est de classe C^1, l'assertion (iv) signifie donc que le flot géodésique de $\Gamma\backslash\Omega$ est d'Anosov.

Théorème 4 *Soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion de* $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ *qui divise un ouvert strictement convexe* Ω *de l'espace projectif* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$*. Alors,*
a) il existe $\alpha \in]1,2[$ *tel que le bord* $\partial\Omega$ *est de classe* C^α*.*
b) Le flot géodésique φ_t *du quotient* $\Gamma\backslash\Omega$ *est topologiquement mélangeant*

Remarques (i) Autrement dit, l'application normale est Hölder continue. Cet énoncé est équivalent à la régularité Hölder de la distribution stable du flot d'Anosov φ_t, mais cet énoncé ne semble pas se déduire de [2].
(ii) "Topologiquement mélangeant" signifie: $\forall U, V$ ouverts de $\Gamma\backslash S\Omega$, $\exists t_0 > 0$, $\forall t > t_0$, $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Ce théorème nous permet d'appliquer les résultats standards de la théorie ergodique des systèmes dynamiques hyperboliques (c.f. [9]) au flot φ_t. Par exemple, on obtient un équivalent pour le nombre $N(T)$ de géodésiques fermées sur $\Gamma\backslash\Omega$ de longueur majorée par T :

$$N(T) \simeq \frac{e^{hT}}{2hT}$$

où $h \in]0,\infty[$ est l'entropie topologique du flot géodésique φ_t.

Voici maintenant quatre propriétés de rigidité pour notre ouvert convexe divisible Ω.

Théorème 5 *Soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion de* $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ *qui divise un ouvert strictement convexe* Ω *de l'espace projectif* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$*. On pose*
$\alpha_\Omega := \sup\{\alpha \in]1,2[\ / \ \partial\Omega \text{ est } \mathrm{C}^\alpha\}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\alpha_\Omega = 2$*.*
(ii) $\partial\Omega$ *est* $\mathrm{C}^{1+\text{absolument continue}}$*.*
(iii) Le flot géodésique φ_t *du quotient* $\Gamma\backslash\Omega$ *préserve une densité.*
(iv) Ω *est un ellipsoïde.*

Remarques (i) En particulier, lorsque Ω n'est pas un ellipsoïde, le bord $\partial\Omega$ n'est pas $\mathrm{C}^{1+\text{Zygmund}}$. Ceci contraste, en dimension $m-1=2$, avec les résultats de régularité de [10], mais ceci ne les contredit pas car notre flot ne préserve pas de densité. Le fait que $\partial\Omega$ ne soit pas de classe C^2 était essentiellement déjà connu (voir [4], [6] et [17]).
(ii) Lorsque Ω n'est pas un ellipsoïde, l'application normale n'est donc jamais absolument continue. Ceci contraste avec l'absolue continuité de l'holonomie du feuilletage stable du flot d'Anosov φ_t (théorème d'Anosov cf. [1] et [15]) mais ceci ne le contredit pas. En dimension $m-1=2$, l'implication $(ii) \Rightarrow (iv)$ est due à Benzecri ([4]).
(iii) Par définition une "densité" est une mesure absolument continue par rapport à Lebesgue. L'absence de densité invariante par le flot géodésique est la principale différence entre nos quotients $\Gamma\backslash\Omega$ et les variétés Riemanniennes compactes à courbure négative.

Rappelons que, pour celles-ci, on dispose de la mesure de Liouville qui est une densité C^∞ invariante par le flot géodésique.

Les preuves complètes seront publiées ailleurs.

Références

[1] D.V.Anosov - Geodesic flows on closed Riemannian manifold with negative curvature, Proc. Stekl. Inst. Math. 90 (1967).

[2] D.V.Anosov - Tangential fields of transversal foliations in $\mathcal{U}$-systems. Math. Notes of USSR Acad. Sc., 2 (1967) p.818-823.

[3] Y.Benoist - Automorphismes des cônes convexes, Inv. Math. 141 (2000) p.149-193.

[4] J.P.Benzecri - Sur les variétés localement affines et localement projectives, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960) p.229-332.

[5] S.Choi, W.Goldman - Convex real projective structures on closed surfaces are closed, Proc. Am. Math. Soc. 118 (1993) p.657-661.

[6] P.Foulon - Locally symmetric Finsler spaces in negative curvature, Comptes Rendus Acad. Sc. 324 (1997) p.1127-1132.

[7] W.Goldman - Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) p.791-845.

[8] M.Gromov - Hyperbolic groups, in "Essays in group theory" MSRI Publ. 8 (1987) p.75-263.

[9] B.Hasselblatt, A.Katok - Modern theory of dynamical systems, Cambridge Univ. Press (1995).

[10] S.Hurder, A.Katok - Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows, Publ. Math. IHES 72 (1990) p.5-61.

[11] D.Johnson, J.Millson - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." PM 67 Birkhaüser(1984) p.48-106.

[12] V.Kac, E.Vinberg - Quasihomogeneous cones, Math. Notes 1 (1967) p.231-235.

[13] I.Kim - Rigidity and deformation spaces of strictly convex real projective structures on compact manifolds, preprint (2000).

[14] J.L.Koszul - Déformation des connexions localement plates, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) p.103-114.

[15] C.Pugh, M.Shub - Ergodicity of Anosov actions, Invent. Math. 15 (1972) p.1-23.

[16] J.Vey - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 24 (1970) p.641-665.

[17] E.Socié-Méthou - Isométries hyperboliques en géométrie de Hilbert, preprint (2000).

Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris

benoist@dma.ens.fr