Convexes divisibles II

Yves Benoist

RÉSUMÉ Un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$ est dit divisible si il existe un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui préserve C et tel que le quotient $\Gamma\backslash C$ est compact. Nous décrivons l'adhérence de Zariski d'un tel groupe Γ.

Nous montrons que si C n'est ni un produit ni un cône symétrique alors Γ est Zariski dense dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$.

ABSTRACT **Divisible convex sets II**

A properly convex open cone in $\mathbb{R}^m$ is called divisible if there exists a discrete subgroup Γ of $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ preserving C such that the quotient $\Gamma\backslash C$ is compact. We describe the Zariski closure of such a group Γ.

We show that if C is divisible but is neither a product nor a symmetric cone, then Γ is Zariski dense in $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$.

1 Introduction

Thématiquement, cet article fait suite à l'article *Convexes divisibles I* ([6]) où j'étudiais la régularité du bord des cônes strictement convexes divisibles. Néanmoins, ces deux articles sont logiquement indépendants.

1.1 Notations et résultat principal

Dans tout cet article, on note $V = \mathbb{R}^m$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et C un cône ouvert *proprement convexe*, c'est-à-dire un cône ouvert convexe ne contenant pas de droite affine (on dit aussi que C est convexe *saillant*).

On note $\overline{C}$ l'adhérence de C et $\mathrm{Aut}(C) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m) \ / \ g(C) = C\}$ le groupe des automorphismes de C.

Commençons par rappeler quelques définitions classiques.

$\star$ Le cône C est dit *produit* si il existe une décomposition en somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ telle que $C = C_1 + C_2$ avec $C_1 \subset V_1$ et $C_2 \subset V_2$. Sinon, on dit que C est *irréductible.*

$\star$ Le cône C est dit *strictement convexe* si les seuls segments inclus dans le bord $\partial C = \overline{C}–C$ sont les segments radiaux.

$\star$ Le cône C est dit *autodual* si il existe un produit scalaire euclidien $<.\,,.>$ sur V telle

que $\overline{C} = \{v \in V \ / \ \forall v' \in \overline{C} \ \ <v, v'> \geq 0\}$.
$\star$ Le cône C est dit *homogène* si le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ agit transitivement sur C.
$\star$ Le cône C est dit *symétrique* si, pour tout x dans C, il existe un automorphisme s de C tel que $s^2 = 1$ et tel que l'ensemble des points fixes de s est égal à la droite portée par x.
$\star$ Un sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ est dit *irréductible* si il n'existe pas de sous-espace vectoriel Γ-invariant non trivial de $\mathbb{R}^m$.

Les définitions suivantes sont dues à J.Vey :
$\star$ On dit qu'un sous-groupe Γ de $\mathrm{Aut}(C)$ *balaye* C si il existe un compact K de C tel que $C = \Gamma.K$. On dit alors que C est *balayable*.

Rappelons que le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ agit proprement sur C : c'est une conséquence de l'invariance de la métrique de Hilbert. Le quotient $\Gamma \backslash C$ est donc un espace compact.
$\star$ Lorsque Γ est discret et balaye C, on dit que Γ *divise* C et que C est *divisible*.

Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer Γ sans torsion, ce que nous ferons dans tout cet article. Le quotient $M = \Gamma \backslash C$ est alors une variété C^∞ compacte.

De même, quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer Γ Zariski connexe, c'est-à-dire connexe pour la topologie de Zariski de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ ce que nous ferons aussi dans tout cet article.

Le but de cet article est de décrire l'adhérence de Zariski de Γ :

Théorème 1.1 *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski connexe de $\mathrm{GL}(V)$ qui divise un cône ouvert proprement convexe C de V. Notons $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ la décomposition de V en somme directe telle qu'il existe des cônes ouverts proprement convexes irréductibles C_i de V_i avec $C = C_1 + \cdots + C_\ell$. Alors l'adhérence de Zariski G de Γ est un produit $G = G_1 \times \cdots \times G_\ell$ où G_i est un sous-groupe réductif de $\mathrm{GL}(V_i)$.*
- Lorsque C_i est homogène, C_i est symétrique et G_i est commensurable à $\mathrm{Aut}(C_i)$[1].
- Lorsque C_i n'est pas homogène, C_i est divisible et on a $G_i = \mathrm{GL}(V_i)$.

Remarque Dans ces deux cas, le groupe H_i des homothéties de V_i est inclus dans G_i, l'action de G_i sur V_i est irréductible et, lorsque $\dim V_i \geq 2$, l'algèbre de Lie de l'intersection $S_i := G_i \cap \mathrm{SL}(V_i)$ est simple.

L'étape principale consistera à montrer le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui divise un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$. On suppose que C n'est ni un produit ni un cône symétrique. Alors Γ est Zariski dense dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$*

Ce résultat a été en partie annoncé dans [5]. Je remercie H.Abels pour d'éclairantes discussions à ce sujet.

---

[1] i.e. le groupe $G_i \cap \mathrm{Aut}(C_i)$ est d'indice fini dans G_i et dans $\mathrm{Aut}(C_i)$.
Dans ce cas, C_i fait partie de la liste de Koecher-Vinberg (fait 1.3).

1.2 Motivations

Voici maintenant un petit historique de ce sujet qui permet, d'une part, de relier notre résultat à ses prédécesseurs et, d'autre part, de regrouper les énoncés que nous aurons à utiliser dans la démonstration.

Les cônes homogènes

A la fin des années 50, H.Koecher et E.Vinberg ont classifié les cônes ouverts proprement convexes symétriques de $\mathbb{R}^m$.

Fait 1.3 *Ceux qui sont irréductibles font partie de la liste*[2] *suivante avec* $n \geq 3$ *(voir [9], [17], [25] ou le livre récent [11] p. 97).*
- La demidroite $\Lambda_1 := \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \ \}$
- Les cônes de Lorentz $\Lambda_n := \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 > 0 \text{ et } x_1 > 0\}$ *(avec* $m = n$*)*
- $\Pi_n(\mathbb{R}) = \{\text{matrices réelles } n\times n \text{ symétriques définies positives}\}$ *(avec* $m = (n^2+n)/2$*)*
- $\Pi_n(\mathbb{C}) = \{\text{matrices complexes } n\times n \text{ hermitiennes définies positives}\}$ *(avec* $m = n^2$*)*
- $\Pi_n(\mathbb{H}) = \{\text{matrices quaternions } n\times n \text{ hermitiennes définies positives}\}$ *(avec* $m = 2n^2 - n$*)*
- $\Pi_3(\mathbb{O})$, c'est un cône tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\Pi_3(\mathbb{O}))) = \mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R}$ *(avec* $m = 27$*).*
Les autres cônes ouverts proprement convexes symétriques sont des produits de ceux-ci.

Remarquons que tous les cônes ouverts proprement convexes symétriques sont divisibles: en effet, le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ de leurs automorphismes est un groupe réductif qui agit transitivement sur C. Par le théorème de Borel ([8]), il contient un sous-groupe discret cocompact Γ. Ce groupe Γ divise C.

Parmi les cônes ouverts proprement convexes symétriques, seuls les cônes de Lorentz Λ_n sont strictement convexes et seuls ceux-ci ont un bord de classe C^1 en dehors de l'origine.

Peu après, E.Vinberg classifiait dans [26] tous les cônes ouverts proprement convexes homogènes. Cette liste beaucoup plus longue de cônes ne nous intéressera pas ici pour la raison suivante: il résulte de [26] que,

Fait 1.4 *Pour tout cône homogène* C*, on a les équivalences :*
Le cône C *est symétrique* $\Longleftrightarrow$ C *est autodual* $\Longleftrightarrow$ *Le groupe* $\mathrm{Aut}(C)$ *est unimodulaire.*

Donc, lorsque C est homogène mais n'est pas symétrique, le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ ne peut pas contenir de sous-groupe discret cocompact et C n'est pas divisible.

En dimension 3

L'étude des cônes ouverts proprements convexes divisibles de dimension 3 débute aussi à la fin des années 50. Dans sa thèse ([7]), Benzecri montre que, mis à part le trièdre, un tel cône C est strictement convexe et son bord ∂C est de classe C^1 en dehors de l'origine.

[2] Signalons que cette liste (sans Λ_1) est naturellement en bijection avec la liste des algèbres de Jordan euclidiennes simples et aussi avec la liste des espaces symétriques riemanniens compacts de rang 1. Tout ceci est bien expliqué dans [11].

Il aimerait bien montrer qu'un tel cône est le cône de Lorentz Λ_3, mais les arguments qu'il donne nécessitent une hypothèse de régularité C^2 pour $\partial C - \{0\}$. Cette hypothèse n'est pas anodine. En effet, à la fin des années 60, Kac et Vinberg construisent un cône ouvert proprement convexe divisible qui n'est ni le trièdre, ni le cône de Lorentz Λ_3.

Ces cônes ouverts proprement convexes divisibles C de dimension 3 ne seront bien compris qu'à la fin des années 80 grâce au travail de Goldman qui fournit dans [12] une élégante paramétrisation des groupes Γ sans torsion qui divisent de tels cônes C, paramétrisation analogue à la paramétrisation de Fenchel-Nielsen de l'espace de Teichmüller.

L'existence des cônes divisibles

A la fin des années 60, Koszul avait construit quelques exemples en dimension supérieure par un processus de déformation que voici: Pour tout groupe Γ_0 de type fini, il a introduit l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\Gamma_0} := \{\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)) \text{ fidèle, d'image } \Gamma := \rho(\Gamma_0) \text{ discrète} \\ \text{et divisant un cône ouvert proprement convexe } C_\rho \text{ de } \mathbb{R}^m\ \}\end{aligned}$$

et il a montré dans [18] que *cet ensemble* $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ *est ouvert dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m))$. Il partait alors d'un sous-groupe discret cocompact Δ_0 de $\mathrm{SO}(m-1,1)$ engendré par des réflexions, il introduisait le groupe Γ_0 produit de Δ_0 par un groupe discret d'homothéties et il déformait Γ_0 dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$; ce qui lui permettait de construire des exemples de cônes proprement convexes divisibles en dimension $m = 4$ ou 5.

C'est seulement dans les années 80 que, indépendamment de cette problématique, Johnson et Millson ont construit dans [14], pour tout $m \geq 3$, des sous-groupes discrets cocompacts de $\mathrm{SO}(m-1,1)$ qui se déforment en des sous-groupes Zariski denses de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$.

Ces deux résultats combinés prouvent qu'il existe, pour tout $m \geq 3$, des cônes proprement convexes divisibles et irréductibles qui ne sont pas symétriques. J'ai montré dans [6] que les cônes construits de cette façon sont strictement convexes.

La semi-simplicité du groupe Γ

Entre-temps, en 1970, Vey avait montré dans [24] l'assertion suivante :

Fait 1.5 *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ *qui balaye un cône ouvert proprement convexe* C. *On note* H *le commutant de* Γ *dans* $\mathrm{GL}(V)$. *Alors*
a) Il existe une décomposition de V *en somme directe de sous-espaces* Γ*-invariants* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ *telle que l'on a* $H = \{g \in \mathrm{GL}(V)\ /\ \forall i = 1, \ldots, \ell\ ,\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R}^*\ ,\ g|_{V_i} = \lambda_i Id|_{V_i}\}$.
b)Le cône C *se décompose en* $C = C_1 + \cdots + C_\ell$ *où les* C_i *sont des cônes ouverts proprement convexes de* V_i.
c) Si en outre Γ *est discret, l'action de* Γ *sur chaque* V_i *est irréductible.*

Nous verrons que, si Γ est discret, les cônes C_i sont aussi divisibles (proposition 4.4).

Cette étude ramène donc la description des cônes ouverts proprement convexes divisibles à celle des cônes ouverts proprement convexes divisibles et irréductibles. Elle prouve aussi:

Fait 1.5.bis *Pour tout sous-groupe discret et Zariski connexe* Γ *de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$, *qui divise* *un cône ouvert proprement convexe, on a l'équivalence :*

Le cône C est irréductible $\Longleftrightarrow$ *Le sous-groupe Γ de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ *est irréductible.*

L'adhérence de Zariski de Γ

Récemment, j'ai décrit dans [4] les adhérences de Zariski possibles G pour les sous-groupes discrets et irréductibles Γ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui préservent un cône proprement convexe C. En particulier, on a (proposition 3.1 et corollaire 3.5 de [4]):

Fait 1.6 *a) Le groupe G contient un élément proximal, c'est-à-dire un élément g ayant un point fixe attracteur dans l'espace projectif* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$.
b) L'intersection $G \cap \mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ *ne préserve jamais de formes symplectiques sur* $\mathbb{R}^m$.

Ceci m'a permis de montrer que, *si Γ divise un cône ouvert strictement convexe C avec C non symétrique, alors Γ est Zariski dense dans* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ (théorème 3.6 de [4]).

Le théorème 1.2 généralise donc cet énoncé en ôtant l'hypothèse de stricte convexité.

La régularité du bord de C

J'ai étudié plus en détail dans [6], les cônes ouverts strictement convexes divisibles en toute dimension $m \geq 3$. J'ai montré que le bord ∂C est de classe C^1 en dehors de l'origine et que, si C n'est pas symétrique, la courbure du bord est portée par une partie de mesure nulle.

Stricte convexité de C et groupes hyperboliques

Tout sous-groupe discret irréductible Γ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui divise un cône ouvert proprement convexe C contient une homothétie non triviale. Le groupe Δ image de Γ dans $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ est donc un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ (voir par exemple la proposition 4.1). J'ai montré dans [6] que la stricte convexité de C est une propriété du groupe abstrait Δ; plus précisément, on a l'équivalence

Le cône C est strictement convexe $\Leftrightarrow$ *Le groupe Δ est un groupe hyperbolique.*

1.3 Méthode suivie

Expliquons maintenant la structure de la démonstration du théorème 1.2.

Notons Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(V)$ qui divise C. Comme nous l'avons déjà dit, on peut supposer que le groupe Γ est Zariski connexe et est sans torsion. Le théorème de Vey (fait 1.5) affirme que le groupe Γ est irréductible et que le commutant de Γ dans $\mathrm{GL}(V)$ est le groupe des homothéties.

On note alors G l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{GL}(V)$, $S = \{g \in G \;/\; \det g = \pm 1\}$ et $\mathbb{R}^* = \{\lambda.\mathrm{Id} \;/\; \lambda \neq 0\}$ le groupe des homothéties de V. Le groupe S est semisimple et on a l'égalité $G = \mathbb{R}^*.S$ (fait 2.6).

L'adhérence $\overline{\Gamma}$ de Γ dans l'espace vectoriel réel $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V va jouer un rôle central dans la démonstration. Nous construirons tout d'abord, pour tout point v de $\overline{C}$ un élément g de $\overline{\Gamma}$ tel que v est dans l'image $g(C)$ (lemme 2.2). Ce lemme clef sera utilisé dans chacune des deux étapes de la démonstration.

La première étape consiste à montrer que V est préhomogène sous l'action de S, c'est-à-dire que le groupe S a une orbite ouverte dans V. Il s'agit donc de montrer qu'il n'existe pas de polynôme homogène non constant S-invariant sur V. On utilise le lemme clef pour montrer qu'un tel polynôme est nul sur le bord ∂C (lemme 2.4).

La deuxième étape est la Zariski densité de Γ dans $\mathrm{GL}(V)$. Elle est basée sur la classification de Kimura-Sato des espaces préhomogènes ([16]). On doit montrer que le seul cas possible est celui où $S = \mathrm{SL}(V)$. On éliminera tous les autres cas sauf un en construisant sur l'orbite ouverte $\mathcal{O}$ de S dans V un feuilletage $\mathcal{F}$ de sorte que les feuilles de $\mathcal{F}$ contiennent des droites affines. On vérifie alors, à l'aide du lemme clef que l'intersection $\partial C \cap \mathcal{O}$ est une réunion de feuilles (voir lemme 3.4), ce qui contredit le caractère saillant du cône C. Il ne reste alors plus qu'un cas de cette liste à éliminer; c'est un cas où S préserve une forme bilinéaire symplectique, cas que nous avons déjà exclu par le fait 1.6.b.

2 Préhomogénéité de V

Le but de cette partie est de montrer la proposition 2.3 qui constitue la première étape de la démonstration du théorème 1.2.

2.1 Les facettes du convexe $\overline{C}$

Soit C un cône ouvert proprement convexe de $V = \mathbb{R}^m$.

Définition 2.1 *Une partie convexe fermée P de $\overline{C}$ est dite extrémale si son complémentaire $\overline{C} - P$ est aussi convexe.*

On appelle facette de $\overline{C}$ l'intérieur relatif F d'une partie extrémale de $\overline{C}$ obtenue en prenant l'intersection de $\overline{C}$ avec un sous-espace vectoriel.

On appelle support de la facette F l'espace vectoriel engendré par F.

On appelle dimension de F la dimension de son support.

Les facettes sont donc des cônes proprement convexes qui sont ouverts dans leur support. Remarquons que les facettes de $\overline{C}$ forment une partition de $\overline{C}$: pour construire la facette F_v qui contient le point v de $\overline{C}$, on considère le plus grand sous-espace vectoriel V_v de V tel que $\overline{C} \cap V_v$ engendre V_v et contient v dans son intérieur relatif. Ce sous-espace V_v n'est autre que le support de la facette F_v.

Le lemme suivant jouera un rôle clef dans la démonstration.

Lemme 2.2 *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de $V = \mathbb{R}^m$. On rappelle que $\overline{\Gamma}$ est l'adhérence de Γ dans $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$.*
a) Alors, pour tout point v de $\overline{C}$, il existe un élément g de $\overline{\Gamma}$ et un point w de C tel que $g(w) = v$.
b) En outre, pour tout élément g de $\overline{\Gamma}$ tel que v est dans $g(C)$, l'image $g(V)$ est incluse dans le support V_v.

Démonstration Choisissons une suite v_n de points de C qui convergent vers v. Comme Γ balaye C, il existe une suite g_n d'éléments de Γ tels que la suite $w_n = g_n^{-1} v_n$ reste dans un compact de C.

Montrons que la suite g_n est bornée. Pour cela, choisissons une distance euclidienne d sur V et notons B_ε la boule de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$ avec ε suffisamment petit pour que, pour tout $n \geq 1$, on a $w_n + B_\varepsilon \subset C$. Chacun des ellipsoïdes $g_n(B_\varepsilon) = g_n(w_n + B_\varepsilon) - v_n$ est inclus dans $-v_n + C$ et donc aussi dans $v_n - C$. Comme C est saillant et que la suite v_n est bornée, l'intersection $(-v_n + C) \cap (v_n - C)$ reste dans une partie bornée de V. Donc le diamètre de $g_n(B_\varepsilon)$ est majoré. Autrement dit, la suite g_n est bornée.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite w_n converge vers un point w de C et que la suite g_n converge vers un point g de $\overline{\Gamma}$. On a alors $g(w) = v$.

b) Cela résulte de ce que $g(C)$ est à la fois ouvert dans l'espace vectoriel $g(V)$ et inclus dans $\overline{C}$. $\square$

2.2 Polynômes invariants

Proposition 2.3 *Soit Γ un sous-groupe Zariski connexe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$. Soient G l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$, G_e la composante connexe de G et $S = G \cap \mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$.*
On suppose que Γ est irréductible. Alors on est dans un des deux cas suivants:
1. Le groupe G_e préserve C et agit transitivement sur C.
2. Le groupe S a une orbite ouverte dans $\mathbb{R}^m$.

Remarques - Dans le premier cas, le cône C est un cône homogène.

- Ces deux cas s'excluent mutuellement. En effet, si S a une orbite ouverte dans V, la réunion des orbites ouvertes de S dans V est dense dans V. D'autre part, un élément de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ qui préserve C préserve aussi les surfaces de niveau de la fonction *caractéristique* $\varphi_C : C \to \mathbb{R}$ définie par $\forall v \in C$,

$$\varphi_C(v) = \int_{C^*} e^{-f(v)} df$$

où df est une mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel V^* dual de V et où

$$C^* := \{f \in V^* \;/\; \forall v \in \overline{C} - \{0\}\,,\; f(v) > 0\}$$

est le cône ouvert de V^* dual de C.

Pour démontrer cette proposition, on étudie les polynômes homogènes S-invariants :

Lemme 2.4 *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$. Soient G l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$, G_e la composante connexe de G et $S = G \cap \mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$.*
Soit P un polynôme sur V homogène de degré $d \geq 1$ et S-invariant. Alors,
a) Pour tout v dans le bord ∂C, on a $P(v) = 0$.
b) Si P est non nul, alors le groupe G_e préserve C et agit transitivement sur C.

Démonstration a) On peut supposer que, pour tout g dans Γ on a $\det g > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe un point v du bord ∂C tel que $P(v) \neq 0$. D'après le lemme 2.2.a, il existe un élément g de $\overline{\Gamma}$ et un point w de C tel que $g(w) = v$. Choisissons une suite g_n d'éléments de Γ qui converge vers g. On peut écrire $g_n = \lambda_n h_n$ avec $\lambda_n > 0$ et $h_n \in S$. On a alors les égalités

$$P(v) = \lim_{n\to\infty} P(g_n w) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^d P(h_n w) = P(w). \lim_{n\to\infty} \lambda_n^d \, .$$

Comme $P(v)$ est non nul, la suite λ_n converge vers un réel λ non nul. Donc g est inversible, ce qui est exclu car comme w est dans l'intérieur de $\overline{C}$ et que g préserve $\overline{C}$, le point v serait aussi dans l'intérieur de $\overline{C}$. Contradiction.
b) On veut montrer que le cône C est G_e-invariant : L'ensemble Z des zéros de P dans $\mathbb{R}^m$ est une variété algébrique G-invariante qui contient, d'après a), la variété topologique de dimension $m-1$ ∂C. La variété Z est donc de dimension $m-1$. Notons Z' l'ensemble des points lisses de Z. C'est un ouvert G-invariant de Z. L'intersection $\partial C \cap Z'$ est ouvert et fermé dans Z', cette intersection est donc une réunion de composante connexes de Z'. Elle est donc G_e-invariante. D'autre part, comme le complémentaire de Z' dans Z est de dimension au plus $m-2$, cette intersection est dense dans le bord ∂C (voir [3]). Donc ce bord ∂C est G_e-invariant et C aussi.

Pour conclure, on remarque que le groupe de Lie réel G n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et on applique le lemme 2.5 ci-dessous au groupe G_e. □

Lemme 2.5 *Soit G un sous-groupe fermé connexe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$. Alors G agit transitivement sur C.*

Démonstration Cela résulte du théorème d'Abels (théorème 1.2 de [1]). En effet, ce théorème affirme que toute action propre de G sur un espace localement compact X admet une tranche globale. Autrement dit, en notant K un sous-groupe compact maximal de G, il existe un fermé K-invariant S de X tel que l'application G-équivariante $G \times_K S \to X$; $[g, s] \mapsto g.s$ est un homéomorphisme. Rappelons que $G \times_K S$ désigne l'espace des K-orbites dans $G \times S$ pour l'action $k.(g, s) = (gk^{-1}, ks)$. En particulier, cet espace $G \times_K S$ est homéomorphe à $(G/K) \times S \simeq \mathbb{R}^\ell \times S$, où $\ell := \dim(G/K)$. Dans notre cas où l'action de G sur $X := C$ admet un quotient $G\backslash X$ compact, la tranche S est compacte et X est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$. La tranche S est donc réduite à un point. □

Pour terminer la démonstration de la proposition 2.3, nous aurons aussi besoin du fait suivant qui est dû a Vey ([24]).

Fait 2.6 *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.*
a) Le commutant de Γ dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ est le groupe $\mathbb{R}^*$ des homothéties.
b) Le groupe S est semisimple.
c) On a $G = \mathbb{R}^*.S$

Démonstration Rappelons, pour la commodité du lecteur, les arguments de [24].

a) Si ce n'est pas le cas, l'entier m est pair et il existe sur $\mathbb{R}^m$ une structure complexe qui est Γ-invariante. Pour tout nombre complexe z_0, l'application $v \to z_0.v$ définit un champ de vecteurs Γ-invariant sur V. Comme Γ balaye C, la restriction de ce champ de vecteurs à C est complète. Donc, pour tout réel t, on a $e^{tz_0}C = C$. En prenant $t = 1$ et $z_0 = i\pi$, on obtient $C = -C$ ce qui contredit le fait que le cône C est saillant.

b) Comme la représentation de G dans $\mathbb{R}^m$ est irréductible, le groupe G est réductif. D'après a), son centre est inclus dans le groupe $\mathbb{R}^*$.

c) Si ce n'est pas le cas, tous les éléments de G sont de déterminant ± 1. La fonction caractéristique φ_C est alors Γ-invariante (voir la remarque ci-dessus). Comme le groupe Γ balaye C, la fonction φ_C est bornée sur C. Ceci contredit le fait que cette fonction φ_C est homogène de degré $-m$. $\square$

Démonstration de la proposition 2.3 Introduisons l'anneau $\mathbb{C}[V]^S$ des polynômes S-invariants sur V à valeurs complexes ainsi que le corps $\mathbb{C}(V)^S$ des fractions rationnelles S-invariantes sur V à valeurs complexes. D'après les lemmes 2.4 et 2.5, si C n'est pas homogène, alors on a $\mathbb{C}[V]^S = \mathbb{C}$. Comme S est semisimple, le corps $\mathbb{C}(V)^S$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{C}[V]^S$. On en déduit que l'on a $\mathbb{C}(V)^S = \mathbb{C}$. Ce qui implique, d'après un théorème de Rosenlicht (voir [19] p.23), que le groupe complexifié $S_{\mathbb{C}}$ a une orbite ouverte dans $V_{\mathbb{C}}$. Comme tout ouvert de Zariski de $V_{\mathbb{C}}$ rencontre V, S a aussi une orbite ouverte dans V. $\square$

3 Zariski densité de Γ

Le but de cette partie est de terminer la démonstration du théorème 1.2.

3.1 L'hypothèse (HT)

Au vu de la proposition 2.3, la définition suivante est bien adaptée à notre problème.

Définition 3.1 *On appelle espace préhomogène semisimple irréductible, la donnée d'un triplet (S, V, ρ) où S est un groupe de Lie semisimple réel connexe à centre fini, $\rho : S \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible de S de noyau fini et telle que S admette une orbite ouverte $\mathcal{O}$ dans V.*

Remarque Comme S est semisimple, cette orbite $\mathcal{O}$ est unique et son complémentaire $\mathcal{O}^c$ est de codimension au moins 2 (voir [16] proposition 20 p.69). En effet, si le complémentaire de la réunion des orbites ouvertes était de codimension 1, il existerait une droite de l'anneau $\mathbb{R}[V]$ des polynômes qui serait S-invariante; et comme S est semisimple, les éléments de cette droite seraient aussi S-invariants, ce qui contredirait l'existence de l'orbite ouverte.

Démonstration du théorème 1.2 Elle résulte des faits 1.4 et 1.5.bis et de la proposition 3.2 suivante. $\square$

Proposition 3.2 *Soit Γ un sous-groupe Zariski connexe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$. On suppose que Γ est irréductible et que le cône C n'est pas homogène.*
Alors Γ est Zariski dense dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$.

Démonstration Cela résulte de la proposition 2.3, du fait 2.6.c et de la proposition 3.3 suivante. □

Proposition 3.3 *Soient (S, V, ρ) un espace préhomogène semisimple irréductible. On suppose qu'il existe un sous-groupe irréductible Γ du produit $\mathbb{R}^*.\rho(S)$ qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de V. Alors on a $\rho(S) := \mathrm{SL}(V)$.*

Remarque L'hypothèse Γ *irréductible* dans la proposition 3.3 est probablement superflue. Nous l'utiliserons uniquement pour éliminer le cas (2) de la liste 3.7.

Pour démontrer cette proposition, nous allons utiliser la classification de Kimura-Sato des espaces préhomogènes et le lemme suivant. Ce lemme d'apparence technique s'appliquera à tous les espaces préhomogènes semisimples sauf deux.

Lemme 3.4 *Soit (S, V, ρ) un espace préhomogène semisimple irréductible. Notons $\mathcal{O}$ l'orbite ouverte de S dans V, $G = \mathbb{R}^*.\rho(S)$ et $\overline{G}$ l'adhérence de G dans $\mathrm{End}(V)$.*

Pour tout point v dans $\mathcal{O}$, on note :

$$\mathcal{V}_v := \bigcap_{\{g \in \overline{G} / v \in g(V)\}} g(V) \ .$$

On suppose que (S, V, ρ) vérifie l'hypothèse (HT) suivante :
(i) Pour tout v dans $\mathcal{O}$ et v' dans $\mathcal{V}_v \cap \mathcal{O}$, on a $\mathcal{V}_{v'} = \mathcal{V}_v$.
(ii) Pour tout v dans $\mathcal{O}$, l'intersection $\mathcal{V}_v \cap \mathcal{O}$ est une réunion de droites affines.

Alors il n'existe pas de sous-groupe Γ de G qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de V.

Remarques - On a bien sûr, pour tout g dans G et v dans $\mathcal{O}$, $\mathcal{V}_{gv} = g(\mathcal{V}_v)$.
- Les hypothèses (i) et (ii) signifient que les parties $\mathcal{F}_v := \mathcal{V}_v \cap \mathcal{O}$ sont les feuilles d'un feuilletage de l'orbite ouverte $\mathcal{O}$ et que ces feuilles sont des réunions de droites.

Démonstration D'après la remarque ci-dessus, l'orbite ouverte $\mathcal{O}$ est dense dans V. Elle rencontre donc $\overline{C}$. Choisissons un point v_0 dans l'intersection $\overline{C} \cap \mathcal{O}$ et notons $W = \mathcal{V}_{v_0}$.

Le lemme 2.2 prouve que l'espace vectoriel W est inclus dans le support V_{v_0} de la facette de $\overline{C}$ contenant v_0. De la même façon, d'après l'hypothèse (i), pour tout point v de $W \cap \mathcal{O}$, on a $W \subset V_v$. En particulier, $\overline{C} \cap W \cap \mathcal{O}$ est ouvert dans $W \cap \mathcal{O}$. Mais $\overline{C} \cap W \cap \mathcal{O}$ est clairement fermé dans $W \cap \mathcal{O}$. On en déduit que $\overline{C}$ contient une composante connexe de $W \cap \mathcal{O}$. L'hypothèse (ii) contredit alors le fait que le cône C est saillant. □

3.2 Simplicité de $\mathfrak{s}$.

Donnons maintenant un exemple concret où le lemme 3.4 s'applique.

Exemple 3.5 *Soient* $2 \leq n < p$, $S := \mathrm{SL}(n) \times \mathrm{SL}(p)$ *et* ρ *la représentation produit tensorielle de* S *dans* $V := \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^p$. *Alors l'espace préhomogène* (S, V, ρ) *vérifie l'hypothèse* (HT).

Démonstration On peut remplacer V par $V := \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ de sorte que

$$G = \{g \in \mathrm{GL}(V) \ / \ \exists (g_1, g_2) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{GL}(\mathbb{R}^p) \ / \ \forall M \in V \ , \ g(M) := g_1 M g_2\} \ .$$

On a bien sûr $\mathcal{O} = \{M \in V \ / \ \mathrm{rang} M = n\}$. Vérifions que, pour M dans $\mathcal{O}$, on a

$$\mathcal{V}_M := \{M' \in V \ / \ \mathrm{Ker} M' \supset \mathrm{Ker} M\} \ .$$

Notons $\mathcal{V}_M^o$ le membre de droite. L'ensemble

$$\{g \in \mathrm{End}(V) \ / \ \exists (g_1, g_2) \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{End}(\mathbb{R}^p) \ / \ \forall M \in V \ , \ g(M) := g_1 M g_2\} \ .$$

est fermé. Il est donc égal à $\overline{G}$. Soit g un élément de $\overline{G}$. Il est donné par un tel couple (g_1, g_2). Remarquons que l'intersection $g(V) \cap \mathcal{O}$ est non vide si et seulement g_1 est inversible et $\mathrm{rang}(g_2) \geq n$. On a alors

$$g(V) = \{M' \in V \ / \ \mathrm{Ker} M' \supset \mathrm{Ker} g_2\} \ .$$

Donc, pour tout point M de $g(V) \cap \mathcal{O}$, on a $\mathcal{V}_M^o \subset g(V)$.

On a bien montré que $\mathcal{V}_M^o \subset \mathcal{V}_M$. L'inclusion inverse est évidente.

Vérifions maintenant les deux points de l'hypothèse (HT).

(i) Cela résulte de l'égalité $\mathcal{V}_M \cap \mathcal{O} = \{M' \in V \ / \ \mathrm{Ker} M' = \mathrm{Ker} M\}$.

(ii) L'intersection $\mathcal{V}_M \cap \mathcal{O}$ s'identifie à l'ensemble des matrices inversibles sur $\mathbb{R}^n$. □

Cet exemple permet de montrer le corollaire suivant :

Corollaire 3.6 *Sous les hypothèses de la proposition 3.3.*
a) La représentation ρ *est absolument irréductible (i.e. la représentation complexifiée* $\rho_{\mathbb{C}}$ *est encore irréductible).*
b) L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ *de* S *est simple.*
c) Mieux, l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ *est absolument simple (i.e. l'algèbre de Lie complexifiée* $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ *est encore simple).*

Démonstration a) Si ce n'était pas le cas, il y aurait sur V une structure complexe S-invariante, ce qui contredirait le fait 1.5.

b) Si cette algèbre de Lie n'est pas simple, on peut écrire $S = S_1 \times S_2$ où S_1, S_2 sont des sous-groupes semisimples connexes non triviaux de S qui commutent et tels que $S_1 \cap S_2$ est fini. On peut alors écrire $V = V_1 \otimes V_2$ et $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ où, pour $i = 1, 2$, ρ_i est une représentation irréductible de S_i dans V_i. Comme S_i est semisimple, on a $\rho_i(S_i) \subset \mathrm{SL}(V_i)$. Comme le noyau de ρ est fini, on a $\dim V_i \geq 2$. Comme (S, V, ρ) est préhomogène, on a $\dim V_1 \neq \dim V_2$. Tout ceci contredit la proposition 3.4 appliquée à l'exemple 3.5.

c) Si $\mathfrak{s}$ n'est pas simple, l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ admet une décomposition en idéaux simples $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{s}_1 \oplus \overline{\mathfrak{s}_1}$ où $\overline{\mathfrak{s}_1}$ désigne la conjuguée de $\mathfrak{s}_1$. D'après le b), le $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$-module $V_{\mathbb{C}}$ complexifié du $\mathfrak{s}$-module irréductible V est encore irréductible. On peut donc écrire $V_{\mathbb{C}} := W_1 \otimes \overline{W_1}$ où W_1 est une représentation irréductible complexe de $\mathfrak{s}_1$ et où $\overline{W_1}$ est la représentation de $\overline{\mathfrak{s}_1}$ conjuguée de W_1. Ceci fournit une contradiction car l'action du groupe complexe $\mathrm{SL}(W_1) \times \mathrm{SL}(W_1)$ sur $W_1 \otimes W_1$ n'est pas préhomogène. $\square$

3.3 Espaces préhomogènes.

Nous utiliserons le fait suivant.

Fait 3.7 *Soit (S, V, ρ) un espace préhomogène semisimple absolument irréductible. Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de S est simple, on est, à revêtement fini près, dans un des quatre cas suivants ou un cas dual :*

(1) $S = \mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ *et ρ est la représentation naturelle dans* $V = \mathbb{R}^m$ $\quad (m \geq 2)$
(2) $S = \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ *et ρ est la représentation naturelle dans* $V = \mathbb{R}^{2n}$ $\quad (n \geq 2)$
(3) $S = \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2n+1})$ *et ρ est la représentation naturelle dans* $V = \Lambda^2\mathbb{R}^{2n+1}$ $\quad (n \geq 2)$
(4.a) $S = \mathrm{Spin}(5,5)$ *et ρ est la représentation semispinorielle dans* $V = \mathbb{R}^{16}$ $\quad (m = 16)$.
(4.b) $S = \mathrm{Spin}(9,1)$ *et ρ est la représentation semispinorielle dans* $V = \mathbb{R}^{16}$ $\quad (m = 16)$.

Démonstration C'est une conséquence de la classification de Kimura-Sato des espaces préhomogènes complexes. En effet, le triplet complexifié $(S_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}, \rho_{\mathbb{C}})$ est un espace préhomogène irréductible complexe associé à un groupe $S_{\mathbb{C}}$ simple. Il fait donc partie de la liste suivante extraite de la proposition 1 p.143 de [16]:

(1) $S_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(\mathbb{C}^m)$ et $\rho_{\mathbb{C}}$ est la représentation naturelle dans $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^m$ $\quad (m \geq 2)$
(2) $S_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2n})$ et $\rho_{\mathbb{C}}$ est la représentation naturelle dans $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{2n}$ $\quad (n \geq 2)$
(3) $S_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(\mathbb{C}^{2n+1})$ et $\rho_{\mathbb{C}}$ est la représentation naturelle dans $V_{\mathbb{C}} = \Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1}$ $\quad (n \geq 2)$
(4) $S_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spin}(10, \mathbb{C})$ et $\rho_{\mathbb{C}}$ est la représentation semispinorielle dans $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{16}$ $\quad (m = 16)$.

On détermine alors aisément les formes réelles de chacune de ces représentations (voir [22] p.522-523). $\square$

Démonstration de la proposition 3.3 D'après le corollaire 3.6, l'espace préhomogène (S, V, ρ) fait partie de la liste 3.7.
- Le cas (2) est exclu par le fait 1.6.b car Γ est irréductible.
- Les cas (3), (4.a) et (4.b) sont exclus par le lemme 3.4 appliqué respectivement aux exemples 3.8, 3.9 et 3.12 ci-dessous.
- Seul le cas (1) est donc possible. $\square$

Voici donc un deuxième exemple concret où le lemme 3.4 s'applique.

Exemple 3.8 *Soient $n \geq 2$, $S := \mathrm{SL}(2n+1)$ et ρ la représentation naturelle de S dans $V := \Lambda^2\mathbb{R}^{2n+1}$. Alors l'espace préhomogène (S, V, ρ) vérifie l'hypothèse* (HT).

Démonstration C'est exactement la même que celle de l'exemple 3.5. On note $W := \mathbb{R}^{2n+1}$. On peut remplacer V par l'espace vectoriel $V := \Lambda^2 W^*$ des formes bilinéaires alternées sur W de sorte que

$$G = \{g \in \mathrm{GL}(V) \ / \ \exists h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2n+1}) \ / \ \forall \omega \in V \ , \ g(\omega) := h_*\omega\} \ .$$

On a bien sûr $\mathcal{O} = \{\omega \in V \ / \ \mathrm{rang}\omega = 2n\}$. Vérifions que, pour ω dans $\mathcal{O}$, on a

$$\mathcal{V}_\omega = \{\omega' \in V \ / \ \mathrm{Ker}\omega' \supset \mathrm{Ker}\omega\} \ .$$

Notons $\mathcal{V}_\omega^o$ le membre de droite. L'ensemble

$$\{g \in \mathrm{End}(V) \ / \ \exists h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n+1}) \ / \ \forall \omega \in V \ , \ g(\omega) := h_*\omega\} \ .$$

est fermé. Il est donc égal à $\overline{G}$. Soit g un élément de $\overline{G}$. Il est de la forme $g = h_*$. L'intersection $g(V) \cap \mathcal{O}$ est non vide si et seulement $\mathrm{rang}(h) \geq 2n$. On a alors

$$g(V) = \{\omega' \in V \ / \ \mathrm{Ker}\omega' \supset \mathrm{Ker}h\} \ .$$

Donc, pour tout point ω de $g(V) \cap \mathcal{O}$, on a $\mathcal{V}_\omega^o \subset g(V)$.

On a bien montré que $\mathcal{V}_\omega^o \subset \mathcal{V}_\omega$. L'inclusion inverse est évidente.

Vérifions maintenant les deux points de l'hypothèse (HT).

(i) Cela résulte de l'égalité $\mathcal{V}_\omega \cap \mathcal{O} = \{\omega' \in V \ / \ \mathrm{Ker}\omega' = \mathrm{Ker}\omega\}$.

(ii) L'intersection $\mathcal{V}_\omega \cap \mathcal{O}$ s'identifie à l'ensemble des formes bilinéaires symplectiques sur $\mathbb{R}^{2n}$. □

3.4 La représentation semispinorielle de Spin(5,5)

L'exemple suivant correspond au cas $(4.a)$ de la liste 3.7.

Exemple 3.9 *Soient $S := \mathrm{Spin}(5,5)$ et ρ la représentation semispinorielle de S dans $V := \mathbb{R}^{16}$. Alors l'espace préhomogène (S, V, ρ) vérifie l'hypothèse* (HT).

Pour étudier cet exemple, commençons par un lemme assez général que nous aurions pu appliquer aussi aux exemples 3.5 et 3.8.

Lemme 3.10 *Avec les notations du lemme 3.4. Soient v un point de l'orbite ouverte $\mathcal{O}$, $H := \{g \in G \ / \ g(v) = v\}$ le groupe d'isotropie de v, R le radical résoluble de H et $\mathcal{V}^R := \{v \in V \ / \ \forall g \in R \ \ g(v) = v\}$. Alors,*

a) On a l'égalité : $\overline{H} = \{g \in \overline{G} \ / \ v \in g(V)\}$.

b) On a l'inclusion : $\mathcal{V}^R \subset \mathcal{V}_v$.

Démonstration a) L'inclusion $\subset$ est évidente. Pour montrer l'inclusion inverse, considérons un élément g de $\overline{G}$ ayant v dans son image. Choisissons alors une suite g_n d'éléments de G qui converge vers g et un point w de V tel que $g(w) = v$. La suite $v_n := g_n(w)$ converge vers v. Elle est donc dans $\mathcal{O}$ pour n suffisamment grand, et on peut trouver une suite g'_n dans G telle que $g'_n(v) = v_n$ et $\lim_{n\to\infty} g'_n = e$. La suite $h_n := g_n g'_n$ est alors dans H et converge vers g. Ce qui prouve bien que g est dans $\overline{H}$.

b) Notons S_H un sous-groupe semisimple de H tel que $H = S_H.R$. Comme H normalise R, l'espace vectoriel $\mathcal{V}^R$ est H-invariant. Notons $r : H \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}^R)$ la restriction. Comme R agit trivialement sur $\mathcal{V}^R$, on a $r(H) = r(S_H)$. Comme S_H est semisimple, l'image $r(S_H)$ est fermée dans $\mathrm{End}(\mathcal{V}^R)$. Donc, pour tout élément h de $\overline{H}$, la restriction de h à $\mathcal{V}^R$ est bijective et on a donc l'inclusion $\mathcal{V}^R \subset h(V)$. On en déduit à l'aide du a) que l'on a $\mathcal{V}^R \subset \mathcal{V}_v$. □

Démonstration de l'exemple 3.9

Rappelons brièvement la description de la représentation semispinorielle :

On note $E = \mathbb{R}^5$, $F := E^*$, $e_1, \ldots, e_5$ la base canonique de E et $f_1, \ldots, f_5$ la base de F qui lui est duale. On note $W := E \oplus F$ et q la forme quadratique sur W donnée par $q(e + f) = f(e)$, pour tout e dans E et f dans F. La représentation naturelle du groupe S dans W permet de décrire son algèbre de Lie :

$$\mathfrak{s} := \{X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \ / \ A, B, C \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5) \text{ avec } B = -{}^tB \text{ et } C = -{}^tC\} \ .$$

On notera a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} les coefficients des matrices A, B et C. On notera alors A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} la base de $\mathfrak{s}$ dans laquelle l'élément X s'écrit :

$$X = \sum_{1\le i,j\le 5} a_{ij}A_{ij} + \sum_{1\le i<j\le 5} b_{ij}B_{ij} + \sum_{1\le i<j\le 5} c_{ij}C_{ij}$$

L'espace vectoriel V de la représentation semispinorielle est la partie paire $V := \Lambda^{\mathrm{pair}}E$ de l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet E$ de E. C'est un espace vectoriel de dimension 16 qui admet pour base

$$1\ , \quad e_i \wedge e_j \text{ pour } 1 \le i < j \le 5\ , \quad e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_\ell \text{ pour } 1 \le i < j < k < \ell \le 5\ .$$

Pour $1 \le i \le 5$, on note $\mathbf{e}_i : \Lambda^\bullet E \to \Lambda^\bullet E$ le produit extérieur par e_i et $\mathbf{i}_i : \Lambda^\bullet E \to \Lambda^\bullet E$ le produit intérieur par f_i. L'action semispinorielle sur V de l'élément X est donnée par la formule :

$$d\rho(X) = \sum_{1\le i\ne j\le 5} a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{i}_j + \sum_{1\le i\le 5} a_{ii}(\mathbf{e}_i\mathbf{i}_i - \frac{1}{2}) + \sum_{1\le i<j\le 5} b_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \sum_{1\le i<j\le 5} c_{ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$$

L'action adjointe de l'élément $Z_0 := -A_{55}$ sur $\mathfrak{s}$ a trois valeurs propres : -1, 0 et 1. On note $\mathfrak{u}^-$, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{u}$ les sous-espaces propres correspondants. Ce sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{s}$ de dimension 8, 29 et 8. On note $\mathfrak{p} := \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ et P le normalisateur dans S de $\mathfrak{p}$. C'est un sous-groupe parabolique maximal de S que l'on peut aussi décrire comme le stabilisateur de la droite isotrope $\mathbb{R}f_5$ de W. On a l'égalité $P = LU$ où L est le centralisateur de Z_0 dans S et U le groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$.

On notera $G = \mathbb{R}^* \times S$, au lieu de $\mathbb{R}^*.\rho(S)$, et on notera $\mathfrak{g} = \mathbb{R}I \oplus \mathfrak{s}$ son algèbre de Lie.

L'action de Z_0 dans V a deux valeurs propres $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. On note V^- et V^+ les sous-espaces propres correspondants. On a donc

$$V^- = \{v \in V \ / \ \mathbf{e}_5(v) = 0\} \ \text{ et } \ V^+ = \{v \in V \ / \ \mathbf{i}_5(v) = 0\} \ .$$

Ces espaces sont de dimension 8 et V^+ est P-invariant.

Soient $v := 1 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \in V^+$, H le stabilisateur de v dans G et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de H. Les points e) et f) du lemme 3.11 ci-dessous prouvent que notre exemple vérifie l'hypothèse (HT). $\square$

Lemme 3.11 *Avec les notations ci-dessus (en particulier, S est le groupe* $\mathrm{Spin}(5,5)$ *et* (V, ρ) *est la représentation semispinorielle). On a*
a) $\mathfrak{l} = \mathbb{R}Z_0 \oplus [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ *et* $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ *est isomorphe à* $\mathfrak{so}(4,4)$.
b) $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(2Z_0 - I) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s})$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{u}$ *et* $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{so}(3,4)$.
c) L'orbite $S.v$ est l'orbite ouverte $\mathcal{O}$.
d) $\mathcal{V}_v = V^+$.
e) Mieux, pour tout v' dans $V^+ \cap \mathcal{O}$, on a $\mathcal{V}_{v'} = V^+$.
f) L'intersection $V^+ \cap \mathcal{O}$ est une réunion de droites affines

Démonstration a) C'est clair.

b) Un petit calcul permet de déterminer une base explicite de $\mathfrak{h}$. On trouve :

$$\left\{ \ 2Z_0 - I \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq 4 \ , \ 1 \leq j \leq 4 \text{ et } j \neq i \\ A_{ii} - A_{jj} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = i + 1 \\ B_{ij} - C_{k\ell} \text{ pour } i < j, \ k < \ell \text{ tous quatre distincts dans } \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{i5} \text{ pour } 1 \leq i \leq 4 \\ C_{i5} \text{ pour } 1 \leq i \leq 4. \end{array} \right.$$

c) Cela résulte de l'égalité de dimensions : $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}) = \dim \mathfrak{s} - \dim V = 29$.

d) Le projecteur π sur V^+ parallèlement à V^- est dans l'adhérence du groupe à un paramètre de générateur $2Z_0 - I$. Donc $\mathcal{V}_v$ est inclus dans V^+. Réciproquement, d'après b), le radical résoluble R de H a pour algèbre de Lie $\mathfrak{r} = \mathbb{R}(2Z_0 - I) \oplus \mathfrak{u}$. Comme U agit trivialement sur V^+, le lemme 3.10.b prouve que V^+ est inclus dans $\mathcal{V}_v$.

e) Comme $\mathfrak{s} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$, tout point v' de $V^+ \cap \mathcal{O}$ vérifie $d\rho(\mathfrak{l}).v' = V^+$ et est donc dans une L-orbite ouverte. Le complexifié $L_\mathbb{C}$ a une orbite ouverte et dense dans $V^+_\mathbb{C}$. En particulier v et v' sont dans la même $L_\mathbb{C}$-orbite. Comme $L_\mathbb{C}$ normalise la complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$, on en déduit que les stabilisateurs dans G de v et v' ont même radical résoluble et donc que le raisonnement fait en d) s'applique aussi au point v'.

f) L'orbite d'un point non nul v' de V^+ par un sous-groupe à un paramètre unipotent de $[L, L]$ est une droite ou un point. Comme $[L, L]$ n'a pas de points fixes dans V^+, au moins une de ces orbites est une droite. $\square$

3.5 La représentation semispinorielle de Spin(9,1)

Le dernier exemple que nous devons étudier pour terminer la démonstration du théorème 1.2 est une variante du précédent.

Exemple 3.12 *Soient $S := \mathrm{Spin}(9,1)$ et ρ la représentation semispinorielle de S dans $V := \mathbb{R}^{16}$. Alors l'espace préhomogène (S, V, ρ) vérifie l'hypothèse* (HT).

Démonstration C'est la même que pour l'exemple 3.9. Il existe encore un élément Z_0 de $\mathfrak{s}$ dont l'action adjointe sur $\mathfrak{s}$ a pour valeurs propres -1, 0, 1 avec espaces propres $\mathfrak{u}^-$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{u}$ et dont l'action sur V a pour valeur propre $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ avec espaces propres V^- et V^+. La seule différence est que l'algèbre de Lie $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(8)$ au lieu de $\mathfrak{so}(4,4)$, ce qui ne change pas les arguments. Les détails sont laissés au lecteur. $\square$

Remarque Il existe au moins deux autres façons d'éliminer l'exemple 3.12:
- On pourrait remarquer que le groupe $\rho(S)$ ne contient pas d'élément proximal, ce qui contredit le fait 1.6.a.
- On pourrait aussi remarquer que la "dimension non compacte" de S est strictement inférieure à celle de C (i.e. $9 < 16$), ce qui contredit la proposition 5.2 de [2]

4 Convexes divisibles produits

Le but de cette partie est de montrer comment le théorème 1.2 permet de décrire l'adhérence de Zariski de tous les sous-groupes Γ de $\mathrm{GL}(V)$ qui divisent un cône ouvert proprement convexe C de V (théorème 1.1).

4.1 Balayer et diviser

Dans la proposition 3.2, le groupe Γ n'est pas forcément discret car il peut contenir un sous-groupe dense de $\mathbb{R}^*$. La proposition suivante affirme que c'est la seule obstruction à la discrétude de Γ.

Proposition 4.1 *Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ qui balaye un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$. On suppose que Γ est irréductible et que le cône C n'est pas homogène. Alors*
a) Le groupe $\Delta := \{|\det g|^{-\frac{1}{m}}.g \;/\; g \in \Gamma\}$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^m)$.
b) Le groupe Γ contient des homothéties positives non triviales.

Démonstration a) On peut supposer que, pour tout g dans Γ, on a $\det g > 0$. D'après la proposition 3.2, Δ est Zariski-dense dans le groupe $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$. Comme ce groupe a une algèbre de Lie simple, Δ est soit discret soit dense. Comme Δ préserve C, Δ n'est pas dense. Donc Δ est discret.

b) Comme Δ est discret, le groupe $\mathbb{R}^*_+.\Delta$ est fermé dans $\mathrm{Aut}(C)$. Il agit donc proprement sur C. Comme Γ balaye C, Γ est cocompact dans $\mathbb{R}^*_+.\Delta \simeq \mathbb{R}^*_+ \times \Delta$ et donc $\Gamma \cap \mathbb{R}^*_+$ est cocompact dans $\mathbb{R}^*$. $\square$

La proposition suivante est une reformulation de la proposition 4.1.

Proposition 4.2 *Soit C un cône ouvert proprement convexe de $\mathbb{R}^n$. Si C est balayable, n'est pas homogène, et si le groupe* $\mathrm{Aut}(C)$ *des automorphismes de C est fortement irréductible, alors ce groupe* $\mathrm{Aut}(C)$ *est discret modulo les homothéties.*

Corollaire 4.3 *Soit Ω un ouvert strictement convexe de l'espace projectif* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ *qui n'est pas un ellipsoïde. Si le groupe* $\mathrm{Aut}(\Omega)$ *des automorphismes projectifs de Ω balaye Ω alors ce groupe* $\mathrm{Aut}(\Omega)$ *est discret.*

Démonstration du corollaire 4.3 Si le groupe $\Delta := \mathrm{Aut}(\Omega)$ est irréductible, on utilise la proposition 4.2.

On doit donc montrer que Δ est irréductible (signalons que ce fait a été montré récemment dans [13] lorsque Δ est un groupe de transformations affines). Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-espace projectif propre Δ-invariant. D'après [23], ce sous-espace rencontre $\overline{\Omega}$ mais pas Ω. Comme Ω est strictement convexe, il existe un point Δ-invariant x_0 sur $\partial\Omega$. Introduisons alors comme dans [23], le flot f_t "géodésique vers x_0": pour tout x dans Ω, $f_t(x)$ est le point sur le segment $[x_0, x]$ à distance t de x pour la métrique de Hilbert d_Ω. Pour $t > 0$, f_t est une contraction qui commute à Δ. Elle induit donc une contraction surjective F_t de l'espace métrique compact $\Delta\backslash\Omega$. On en déduit que cette contraction est une isométrie. Par stricte convexité de Ω, on en déduit que tout couple de points (x, y) de Ω tel que $d_\Omega(x, y) = d_\Omega(x, \Delta.y)$ est de la forme $y = f_t(x)$. En particulier, Ω est homogène sous $\Delta \times \mathbb{R}$.

Si Ω est homogène sous Δ, par stricte convexité, Ω est un ellipsoïde (voir [25]).

Si Ω n'est pas homogène sous Δ, alors les Δ-orbites dans Ω sont de codimension 1. Les Δ-orbites sont donc tangentes en chaque point x de Ω à l'horosphère centrée en x_0 passant par ce point. On en déduit que cette orbite est une réunion d'horosphères de centre x_0 et donc que les horosphères sont C^∞. Par suite $\partial\Omega - \{x_0\}$ est C^∞ à Hessien défini positif. Il résulte alors de [7] que Ω est un ellipsoïde. Contradiction. □

4.2 Les cônes $\mathbf{C}_i$ sont divisibles

La proposition suivante complète agréablement le théorème de Vey (fait 1.5).

Proposition 4.4 *Soit Γ un sous-groupe discret de* $\mathrm{GL}(V)$ *qui divise un cône ouvert proprement convexe C de V. On note H le commutant de Γ dans* $\mathrm{GL}(V)$, *$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ la décomposition de V en somme directe telle que H est le groupe des éléments de* $\mathrm{GL}(V)$ *qui agissent par homothétie sur chacun des V_i, et C_i les cônes ouverts proprement convexes de V_i tels que $C = C_1 + \cdots + C_\ell$ (voir le fait 1.5). Alors*
a) Le centre $Z := \Gamma \cap H$ de Γ est un sous-groupe cocompact de H isomorphe à $\mathbb{Z}^\ell$.
b) Pour tout $i = 1, \ldots, \ell$, le cône C_i est divisible.

Remarque Lorsque Γ est Zariski connexe, les cônes C_i sont irréductibles. En effet, Γ permute les facteurs irréductibles de C.

Démonstration a) C'est une généralisation du lemme 3.7.b de [4]. Nous reproduisons la démonstration bien qu'elle s'adapte sans changement.

Soient Δ l'adhérence dans $\mathrm{GL}(V)$ du groupe $H\Gamma$ et Δ_e la composante connexe de Δ.

Montrons que le groupe Δ_e commute à Γ. Pour cela introduisons le groupe $[\Gamma, \Delta_e]$ engendré par les commutateurs $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$ avec $\gamma \in \Gamma$ et $\delta \in \Delta_e$. D'une part, ce groupe $[\Gamma, \Delta_e]$ est connexe, d'autre part, on a les inclusions $[\Gamma, \Delta_e] \subset \overline{[\Gamma, H\Gamma]} \subset \overline{[\Gamma, \Gamma]} \subset \Gamma$. Il est donc discret et on a $[\Gamma, \Delta_e] = \{1\}$.

On a donc l'égalité $\Delta_e = H_e$ où H_e est la composante connexe de H. Ceci prouve que le groupe $H_e\Gamma$ est fermé. Comme ce groupe $H_e\Gamma$ agit proprement sur C et que le quotient $\Gamma\backslash C$ est compact, le groupe $H_e/(\Gamma \cap H_e)$ est compact. C'est ce que l'on voulait.

b) On peut supposer que Γ est Zariski connexe. Comme le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ agit proprement sur C , le groupe Γ est un sous-groupe discret cocompact du groupe $\mathrm{Aut}(C_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(C_\ell)$. Chacun des cônes C_i est balayé par le groupe Γ_i image de Γ dans $\mathrm{Aut}(C_i)$ et, par le théorème de Vey (fait 1.5.c), ce groupe Γ_i est un sous-groupe irréductible de $\mathrm{GL}(V_i)$. Distinguons deux cas :

- Le cône C_i est homogène. La composante connexe $\mathrm{Aut}_e(C_i)$ du groupe $\mathrm{Aut}(C_i)$ agit transitivement sur C_i. On en déduit que $\mathrm{Aut}_e(C_i)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Aut}(C_i)$ puis que $\mathrm{Aut}_e(C_i)$ est aussi un sous-groupe irréductible de $\mathrm{GL}(V_i)$ et enfin que $\mathrm{Aut}_e(C_i)$ est un groupe réductif. Par le théorème de Borel ([8]), Ce groupe $\mathrm{Aut}_e(C_i)$ contient un réseau cocompact et donc C_i est divisible.
- Le cône C_i n'est pas homogène. L'intersection $\Delta_i := (\mathbb{R}_+^*.\Gamma_i) \cap \mathrm{SL}(V_i)$ est, d'après la proposition 4.2, un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(C_i)$. Le groupe $\Gamma_i' := 2^{\mathbb{Z}}.\Delta_i$ aussi. Comme Γ_i' balaye le cône C_i, ce cône est divisible. □

Corollaire 4.5 *Un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$ est divisible si et seulement si son image Ω dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ est divisible.*

Démonstration Supposons tout d'abord C divisible et prenons les notations de la proposition 4.4. Comme l'intersection $[\Gamma, \Gamma] \cap H$ est triviale, on peut trouver un sous-groupe Γ_1 de Γ qui ne rencontre pas Z et tel que le groupe $\Gamma' := Z \times \Gamma_1$ soit d'indice fini dans Γ. Introduisons alors un réseau Z' de $H \cap \mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$. Le groupe $\Delta' := Z' \times \Gamma_1$ divise alors Ω. Donc Ω est divisible. La réciproque est évidente. □

4.3 L'adhérence de Zariski de Γ

En combinant les propositions 3.2 et 4.4, on obtient la :

Démonstration du théorème 1.1 D'après la proposition 4.4.a, pour tout $i = 1, \ldots, \ell$, G contient le groupe $H_i \simeq \mathbb{R}^*$ des homothéties de V_i et l'image Δ de Γ dans $\mathrm{PGL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{PGL}(V_\ell)$ est un sous-groupe discret du groupe $S := \mathrm{Aut}(\Omega_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(\Omega_\ell)$ où Ω_i est l'image de C_i dans $\mathbb{P}(V_i)$. Comme S agit proprement sur $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_\ell$, le groupe Δ est un réseau cocompact de S. Notons $I' = \{i \leq \ell \ / \ \Omega_i \text{ est homogène}\}$, $S' := \prod_{i \in I'} \mathrm{Aut}(\Omega_i)$ et $S'' := \prod_{i \notin I'} \mathrm{Aut}(\Omega_i)$ de sorte que $S = S' \times S''$. Par le fait 1.3 et la proposition 4.2, le groupe S' est semisimple et virtuellement connexe tandis que le groupe S'' est discret. Donc le groupe $\Delta' := \Delta \cap S'$ est un réseau cocompact de S'. La projection de Δ sur S' est discrète car elle normalise Δ'. On en déduit que le groupe $\Delta'' := \Delta \cap S''$ est d'indice fini dans S''. Par le théorème de densité de Borel, l'adhérence de Zariski du groupe Δ' est d'indice fini dans S'. Par la proposition 3.2, l'adhérence de Zariski du groupe Δ'' est égale à $\prod_{i \notin I'} \mathrm{PGL}(V_i)$. C'est ce que l'on voulait. $\square$

Voici un corollaire immédiat du théorème 1.1.

Corollaire 4.6 *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(V)$ qui divise un cône ouvert proprement convexe C de $\mathbb{R}^m$. Alors l'adhérence de Zariski G de Γ est d'indice fini dans celle de $\mathrm{Aut}(C)$.*

Références

[1] H.Abels - Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups, Math. Ann. 212 (1974) p.1-19.

[2] H.Abels - Some topological aspects of proper group actions; noncompact dimension of groups, Journ. London Math. Soc. 25 (1982) p.525-538.

[3] R.Benedetti, J.J.Risler - Real algebraic and semialgebraic sets, Hermann (1990).

[4] Y.Benoist - Automorphismes des cônes convexes, Inv. Math. 141 (2000) p.149-193.

[5] Y.Benoist - Convexes divisibles, Comp. Rend. Ac. Sc. 332 (2001) p.387-390.

[6] Y.Benoist - Convexes divisibles I, preprint (2001).

[7] J.P.Benzecri - Sur les variétés localement affines et localement projectives, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960) p.229-332.

[8] A.Borel - Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology 2 (1963) p.111-122.

[9] H.Braun, M.Koecher - Jordan-Algebren, Grundlehren 128 Springer (1966).

[10] S.Choi, W.Goldman - Convex real projective structures on closed surfaces are closed, Proc. Am. Math. Soc. 118 (1993) p.657-661.

[11] J.Faraut, A.Koranyi - Analysis on symmetric cones, Oxford Math. Mono. Clarendon (1994).

[12] W.Goldman - Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) p.791-845.

[13] Kyeonghee Jo - Quasi-homogeneous domains and convex affine manifolds, preprint (2001).

[14] D.Johnson, J.Millson - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." PM 67 Birkhaüser(1984) p.48-106.

[15] V.Kac, E.Vinberg - Quasihomogeneous cones, Math. Notes 1 (1967) p.231-235.

[16] T.Kimura, M.Sato - A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariant. Nagoya Math. Journal 65 (1977) p.1-155.

[17] M.Koecher - The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications, Lect. Notes in Math. 1710 Springer (1999)

[18] J.L.Koszul - Déformation des connexions localement plates, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) p.103-114.

[19] H.Kraft, P.Slodowy, T.Springer - Algebraic transformation groups and invariant theory, DMV 13 Birkhaüser (1989).

[20] N.Kuiper - On convex locally projective spaces, Convegno Internazionale di Geometria Differentiale, Cremonese (1954) p.200-213.

[21] G.Margulis, E.Vinberg- Some linear groups virtually having a free quotient, Jour. Lie Theory 10 (2000) p.171-180.

[22] H.Saito - On a classification of prehomogeneous vector spaces over local and global fields, Jour. Alg. 187 (1997) p.510-536.

[23] J.Vey - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes dans les espaces numériques. Comp. Rend. Ac. Sc. 270 (1970) p.249-251.
[24] J.Vey - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 24 (1970) p.641-665.
[25] E.Vinberg - The theory of convex homogeneous cones, Transl. Mosc. Math. Soc. (1963) p.340-403.
[26] E.Vinberg - The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone, Transl. Mosc. Math. Soc. (1965) p.63-93.

Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris
benoist@dma.ens.fr   www.dma.ens.fr/~benoist