Convexes divisibles III

Yves Benoist

RÉSUMÉ Soit Δ_0 un groupe de type fini et $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ la partie de $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$ formée des représentations fidèles pour lesquelles il existe un ouvert proprement convexe et Δ_0-invariant Ω de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ tel que le quotient $\Delta_0\backslash\Omega$ est compact. Koszul a montré dans [21] que cette partie $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ est ouverte. Nous décrivons l'adhérence de $\mathcal{F}_{\Delta_0}$. En particulier, nous montrons que cette partie $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ est fermée si et seulement si le centre virtuel de Δ_0 est trivial. Cette condition est satisfaite si et seulement si $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ contient une représentation fortement irréductible.

ABSTRACT **Divisible convex sets III**

Let Δ_0 be a group of finite type and $\mathcal{F}_{\Delta_0} \subset \mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$ be the subset of faithful representations for which there exists a properly convex Δ_0-invariant open subset Ω in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ such that the quotient $\Delta_0\backslash\Omega$ is compact. Koszul has proved in [21] that this subset $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ is open. We describe the closure of $\mathcal{F}_{\Delta_0}$. As a consequence, we show that this subset $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ is closed if and only if the virtual center of Δ_0 is trivial. This condition is satisfied if and only if $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ contains a strongly[1] irreducible representation.

1 Introduction

Thématiquement, cet article fait suite aux articles *Convexes divisibles I et II* ([5] et [6]). Néanmoins, à l'exception de la dernière partie, il est logiquement indépendant de ceux-ci.

Commençons par définir les *convexes divisibles.* Soit $V = \mathbb{R}^m$ un espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ l'espace projectif de $\mathbb{R}^m$ et $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ le groupe des transformations projectives de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$.

Un cône ouvert C de V est *proprement convexe* ou *convexe saillant* s'il est convexe et s'il ne contient pas de droite affine. Un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{GL}(V)$ *divise* C s'il préserve C et si le quotient $\Gamma\backslash C$ est compact. On dit alors que C est *divisible.*

[1] i.e. the restriction of the representation to any subgroup of finite index of Δ_0 is still irreducible.

De même, un ouvert Ω de $\mathbb{P}(V)$ est *proprement convexe* ou *convexe saillant* si c'est l'image, notée $\mathbb{P}(C)$, d'un cône ouvert proprement convexe C de V. Un sous-groupe discret Δ de $\mathrm{PGL}(V)$ *divise* Ω s'il préserve Ω et si le quotient $\Delta\backslash\Omega$ est compact. On dit alors que Ω est *divisible*.

Rappelons qu'un cône ouvert proprement convexe C de V est divisible si et seulement si son image $\Omega = \mathbb{P}(C)$ dans $\mathbb{P}(V)$ est divisible (corollaire II.4.3 de [6]). Autrement dit, pour étudier les ouverts convexes divisibles, il est équivalent de se placer dans un cadre vectoriel ou dans un cadre projectif.

Fixons maintenant un groupe Γ_0 et introduisons l'espace de déformation $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ formé des représentations ρ de Γ_0 dans $\mathbb{R}^m$ qui sont fidèles et dont l'image $\Gamma = \rho(\Gamma_0)$ est discrète et divise un cône ouvert non vide proprement convexe C_ρ de $\mathbb{R}^m$.

Lorsque $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ est non vide, le groupe Γ_0 est de type fini. Notons N le cardinal d'une partie génératrice de Γ_0. L'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m))$ s'identifie alors à un fermé de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)^N$. On le munit de la topologie induite.

En 1968, Koszul a montré dans [21] que *cet espace* $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ *est un ouvert dans l'espace* $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m))$. Le but de cet article est de *déterminer si cet espace* $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ *est fermé dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m))$.

Strictement parlant, cet espace n'est JAMAIS fermé quand il est non vide. En effet, on peut toujours "faire dégénérer l'action du centre virtuel de Γ_0" (voir les exemples de la section 7.1). Le résultat principal de cet article exprime que c'est la seule dégérescence possible (théorème 7.9). Contentons-nous dans cette introduction d'en décrire un corollaire en nous plaçant dans le cadre projectif.

Pour cela, fixons un autre groupe Δ_0 et notons $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ l'espace des morphismes ρ de Δ_0 dans $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$ qui sont fidèles et dont l'image $\Delta = \rho(\Delta_0)$ est discrète et divise un ouvert non vide proprement convexe Ω_ρ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$.

On appelle centre virtuel de Δ_0 le sous-groupe Z'_{Δ_0} de Δ_0 formé des éléments g dont le centralisateur est d'indice fini dans Δ_0.

Théorème 1.1 *Soit* Δ_0 *un groupe dont le centre virtuel est trivial. Alors l'espace* $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ *est fermé dans* $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$.

Par le théorème de Koszul cité ci-dessus, cet espace de déformation $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ est aussi ouvert dans $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$. On en déduit donc le corollaire :

Corollaire 1.2 *Soit* Δ_0 *un groupe dont le centre virtuel est trivial. Alors* $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ *est une réunion finie de composantes connexes de* $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$.

Remarques - Lorsque $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ est non vide, l'hypothèse sur le centre virtuel équivaut à : Δ_0 *ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini*; cette hypothèse est anodine car elle signifie qu'au moins une représentation $\rho \in \mathcal{F}_{\Delta_0}$ est fortement irréductible ou, ce qui est équivalent, que toute représentation $\rho \in \mathcal{F}_{\Delta_0}$ est fortement irréductible (voir corollaire

2.13). C'est automatiquement le cas lorsque l'un des ouverts Ω_ρ est strictement convexe.
- Il existe des groupes Δ_0 à centre trivial pour lesquels $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ n'est pas fermé (exemple 7.6).
- Nous verrons qu'à l'inverse, si l'espace $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ est un fermé non vide de $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$, alors le groupe Δ_0 a un centre virtuel trivial (proposition 7.7).
- En dimension $m-1=2$, ce théorème est dû à Choi-Goldman dans [15].
- En dimension $m-1=3$, et lorsque Δ_0 est un réseau cocompact de $\mathrm{SO}_e(1,3)$, ce théorème a été annoncé indépendamment par Kim dans [20].
- Nous verrons aussi que, lorsque $Z'_{\Delta_0} = \{1\}$, si une suite ρ_n de $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ converge alors la suite des ouverts proprement convexes Ω_{ρ_n} converge aussi vers un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ (corollaire 3.5).

L'outil technique principal introduit dans la preuve du théorème 1.1 est celui de représentation "semiproximale". Nous avons montré dans [3] que si un groupe divise un cône ouvert proprement convexe, alors la représentation correspondante est "proximale", et nous avons "décrit" ces représentations proximales. Nous montrons ici qu'une limite de telles représentations est "semiproximale" et nous développons une théorie pour les représentations semiproximales, et en particulier une notion de "positivité" et une notion "d'équivalence modulo 2", analogue à celle que nous avons développé dans [3] pour les représentations proximales.

Au passage nous décrivons, dans un groupe de Lie semisimple réel G, le groupe des composantes connexes du centralisateur d'un sous-espace de Cartan, le "groupe des signes" de G. Surtout, nous définissons un "groupe des signes" pour tout sous-groupe Zariski dense Γ de G.

Certaines propriétés asymptotiques des sous-groupes Zariski denses Γ des groupes de Lie semisimples démontrées dans [2], par exemple la convexité du cône limite ℓ_Γ, joueront un rôle important dans la démonstration. Nous aurons aussi besoin de raffinements, démontrés en appendice, de ces propriétés asymptotiques de Γ faisant intervenir les composantes elliptiques des éléments loxodromiques de Γ.

Donnons maintenant, de façon plus précise, les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1. On considère un élément ρ de l'adhérence de $\mathcal{F}_{\Delta_0}$. Il est bien connu (fait 2.5) que cette représentation ρ est fidèle et que son image $\rho(\Delta_0)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$. On relève cette image en un sous-groupe discret Δ de $\mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^m)$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$(H1)$: Δ ne contient pas de sous-groupe nilpotent distingué infini.
$(H2)$: Tout élément g de Δ est positivement semiproximal .

La condition "g positivement semiproximal" signifie que le rayon spectral de g est valeur propre de g.

Le point crucial consiste à relier ces hypothèses à la dimension cohomologique virtuelle de Δ :

Proposition 1.3 *Soit Δ un sous-groupe discret de type fini de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ *qui vérifie les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$.

Alors on a l'inégalité $\mathrm{vcd}(\Delta) \leq m - 1$.

En cas d'égalité, le groupe Δ divise un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$.

L'essentiel de notre effort consistera à démontrer cette proposition. L'hypothèse $(H1)$ permet de nous ramener au cas où l'adhérence de Zariski $\mathbf{G}$ de Δ est un $\mathbb{R}$-groupe réductif. L'hypothèse $(H2)$ assure que $V = \mathbb{R}^m$ est une représentation "positivement Δ-semiproximale". En particulier, c'est une représentation "semiproximale" de G. On classifiera l'ensemble des représentations irréductibles semiproximales des groupes réductifs. On munira cet ensemble d'une relation d'équivalence: "l'égalité modulo 2". Et on cherchera dans chaque classe d'équivalence une représentation de dimension minimale.

Décrivons enfin le plan de cet article.

La partie 2 est constituée de divers rappels sur les groupes réductifs, leurs représentations, leurs sous-groupes discrets ainsi que sur les convexes divisibles.

Dans la partie 3, nous reformulons la proposition 1.3 en termes de groupes réductifs et de représentations semiproximales.

Dans la partie 4, nous étudions le *groupe des signes* S_G d'un $\mathbb{R}$-groupe réductif. Ce groupe permet de comprendre le signe de la plus grande valeur propre de l'image d'un élément loxodromique de G par une représentation proximale.

La partie 5 est consacrée aux représentations semiproximales: classification, équivalence modulo 2 et dimension.

La partie 6 contient la démonstration de la proposition 1.3 et du théorème 1.1

Enfin dans la partie 7, nous décrivons l'adhérence de $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ sans hypothèse sur le centre virtuel de Γ_0 (théorème 7.9).

La partie 8 est un appendice consacré à quelques compléments à l'article [2]: nous associons à tout sous-groupe Zariski dense Γ de G, un ensemble limite T_Γ dans le sous-groupe compact maximal T_G d'un sous-groupe de Cartan maximalement déployé. Cet ensemble limite T_Γ est adhérence de l'ensemble des composantes elliptiques des éléments loxodromiques de Γ. On montre que T_Γ est un sous-groupe de T_G qui contient la composante neutre de T_G.

Je renvoie à la longue introduction de l'article [6] pour un historique de ce sujet ainsi que pour des motivations. La prépublication de cet article est disponible depuis janvier 02. Il a été annoncé dans [4].

2 Notations et rappels préliminaires

Cette partie est constituée de rappels sans démonstration sur les groupes de Lie semisimples, leurs représentations et leurs sous-groupes discrets et sur les convexes divisibles.

2.1 Groupes semisimples

> Dans la théorie des représentations des groupes semisimples, le point de vue purement groupe de Lie est un peu mystérieux. Il est éclairé par le point de vue groupe algébrique que nous utiliserons largement dans cet article (voir le chapitre 24 de [9]).

Chaque fois qu'une lettre $\mathbf{G}$ désignera un $\mathbb{R}$-groupe, i.e. un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, on notera G ou $\mathbf{G}_\mathbb{R}$ le groupe des points réels de $\mathbf{G}$, G_e la composante neutre de G, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'algèbre de Lie complexifiée. Pour tout $\mathbb{R}$-tore $\mathbf{H}$, on identifiera le groupe des caractères $X(\mathbf{H})$ de $\mathbf{H}$ à un sous-groupe discret du dual de $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$, grâce à l'application $\chi \to d\chi$.

On suppose que $\mathbf{G}$ est un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe. Quitte à remplacer $\mathbf{G}$ par un revêtement fini, on supposera souvent que le groupe dérivé $[\mathbf{G},\mathbf{G}]$ est simplement connexe. On note $\mathbf{Z}$ la composante neutre du centre de $\mathbf{G}$. On choisit un $\mathbb{R}$-sous-tore déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$ et un $\mathbb{R}$-sous-tore maximal $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{A}$. On note $\mathbf{L}$ le centralisateur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$, $\mathbf{M}$ le $\mathbb{R}$-sous-groupe réductif connexe anisotrope maximal de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{T}$ le $\mathbb{R}$-sous-tore anisotrope maximal de $\mathbf{H}$. Ce tore $\mathbf{T}$ est donc inclus dans $\mathbf{M}$. Le rang réel $r = \mathrm{rang}_\mathbb{R}(G)$ est la dimension de $\mathbf{A}$.

On choisit une involution θ de $\mathbf{G}$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\theta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ et telle que le $\mathbb{R}$-groupe $\mathbf{K} := \{g \in \mathbf{G} \;/\; \theta(g) = g\}$ soit un $\mathbb{R}$-sous-groupe anisotrope maximal de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{M}_G := \mathbf{K} \cap \mathbf{L}$ et $\mathbf{T}_G := \mathbf{K} \cap \mathbf{H}$. On a donc les inclusions $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}_G$ et $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_G$.

On note $\Sigma := \Sigma(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathbf{A}) \subset \mathfrak{a}^*$ le système de racines restreintes de $\mathfrak{g}$: c'est l'ensemble des poids non nuls de l'action adjointe de $\mathbf{A}$ dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. De même, on note $\Sigma_\mathbb{C} = \Sigma(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathbf{H}) \subset i\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{h}^*_\mathbb{C}$ le système de racines de $\mathfrak{g}$ et $\Sigma_0 = \Sigma(\mathfrak{m}_\mathbb{C}, \mathbf{T}) \subset i\mathfrak{t}^*$ le système de racines de $\mathfrak{m}$.

On choisit un système de racines positives Σ^+ de Σ, on note $\mathfrak{a}^+$ la chambre de Weyl correspondante $\mathfrak{a}^+ := \{X \in \mathfrak{a} \;/\; \forall \alpha \in \Sigma^+ \;\; \alpha(X) \geq 0\}$, $\mathbf{N}$ le $\mathbb{R}$-sous-groupe unipotent maximal de $\mathbf{G}$ associé à Σ^+ et $\mathbf{N}^-$ le $\mathbb{R}$-sous-groupe unipotent maximal de $\mathbf{G}$ associé à $-\Sigma^+$. On a donc l'égalité $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$. On choisit un système de racines positives Σ_0^+ de Σ_0 et on note $\Sigma_\mathbb{C}^+$ le système de racines positives de $\Sigma_\mathbb{C}$ donné par $\Sigma_\mathbb{C}^+ := \{\alpha \in \Sigma_\mathbb{C} \;/\; \alpha|_\mathfrak{a} \in \Sigma^+\} \cup \Sigma_0^+$.

Pour g dans G, on note $\ell(g)$ l'élément de $\mathfrak{a}^+$ tel que $\exp(\ell(g))$ est conjugué à la composante hyperbolique de la décomposition de Jordan de g. L'élément g de G est dit *loxodromique* (ou $\mathbb{R}$-régulier) si $\ell(g)$ est dans l'intérieur $\mathring{\mathfrak{a}}^+$ de la chambre de Weyl.

Les groupes M et T sont connexes. Mais, même lorsque $\mathbf{G}$ est semisimple et simplement connexe, les groupes Z, L, H, M_G, T_G et A ne sont pas toujours connexes, ce qui jouera un rôle important dans cet article (voir la partie 4) .

On note $W_\mathbb{C}$ (resp. W, W_0) le groupe de Weyl du système de racines $\Sigma_\mathbb{C}$ (resp. Σ, Σ_0) et on munit $i\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*$ d'un produit scalaire $<.,.>$ $W_\mathbb{C}$-invariant. On note $P_\mathbb{C} := X(\mathbf{H})$, $P := X(\mathbf{A})$ et

$$P_{\mathbb{C},+} := \{\lambda \in X(\mathbf{H}) \;/\; \forall \alpha \in \Sigma_\mathbb{C}^+ \;,\; <\lambda, \alpha> \geq 0\} \;,$$

$$P_+ := \{\lambda \in X(\mathbf{A}) \;/\; \forall \alpha \in \Sigma^+ \;,\; <\lambda, \alpha> \geq 0\}$$

les ensembles des caractères dominants de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{A}$ et R_0 le réseau des racines de Σ_0,

$$R_0 := \sum_{\alpha \in \Sigma_0} \mathbb{Z}.\alpha$$

On note $\Pi_{\mathbb{C}}$ (resp. Π, Π_0) l'ensembles des racines simples de $\Sigma_{\mathbb{C}}^+$ (resp. Σ^+, Σ_0^+).

Pour tout α dans $\Pi_{\mathbb{C}}$, on note $\omega_\alpha \in i\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*$ le poids fondamental associé à α: c'est la forme linéaire nulle sur $\mathfrak{z}$ donnée par, pour tout β dans $\Pi_{\mathbb{C}}$, $2\frac{<\omega_\alpha,\beta>}{<\beta,\beta>} = \delta_{\alpha,\beta}$.

Pour tout $\dot\alpha$ dans Π, on note $\pi_{\dot\alpha} \in \mathfrak{a}^*$ le poids fondamental associé à $\dot\alpha$: c'est la forme linéaire nulle sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}$ donnée par, pour tout $\dot\beta$ dans Π, $2\frac{<\pi_{\dot\alpha},\dot\beta>}{<\dot\beta,\dot\beta>} = d_{\dot\alpha}\delta_{\dot\alpha,\dot\beta}$ où $d_{\dot\alpha} = 1$ si $2\dot\alpha \notin \Sigma^+$ et $d_{\dot\alpha} = 2$ si $2\dot\alpha \in \Sigma^+$.

Remarques - Dans la terminologie groupe de Lie, G_e est un groupe de Lie linéaire réductif connexe, $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan, θ est une involution de Cartan et K est un sous-groupe compact maximal de G_e, M_G est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, T_G est le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans K, M est la composante neutre de M_G et T est la composante neutre de T_G (La notation M diffère donc de la notation traditionnelle où M désigne le groupe que nous notons ici M_G).

- Tout groupe de Lie linéaire semisimple connexe s'identifie à la composante neutre G_e du groupe G des points réels d'un $\mathbb{R}$-groupe semisimple connexe $\mathbf{G}$. Lorsque $\mathbf{G}$ est simplement connexe, on a $G_e = G$. Dans ce cas, le groupe L est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans G, H est le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans G et on a $A = \{a \in H \ / \ \theta(a) = a^{-1}\}$. Dans ce cas, $P_{\mathbb{C}}$ est le réseau des poids du système de racines $\Sigma_{\mathbb{C}}$ et P est le réseau des poids du système de racines restreintes Σ (voir lemme 4.3).

2.2 Représentations irréductibles

Dans cet article, on appellera représentation[2] $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de G dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie V la restriction aux points réels d'un $\mathbb{R}$-morphisme de $\mathbb{R}$-groupes encore noté $\rho : \mathbf{G} \to \mathbf{GL(V)}$. On notera $(V_{\mathbb{C}}, \rho_{\mathbb{C}})$ la représentation complexifiée. Les poids de l'action de $\mathbf{A}$ dans $V_{\mathbb{C}}$ sont appelés *les poids restreints de* ρ. On munit P de l'ordre habituel : $\lambda \leq \mu$ si et seulement si $\mu - \lambda$ est dans $\mathbb{N}\Sigma^+$. L'ensemble des poids restreints de ρ admet un plus grand élément λ appelé *le plus haut poids restreint de* ρ. C'est un élément de P_+ et l'espace de poids λ n'est autre que l'espace $V^{\mathfrak{n}}$ des vecteurs annulés par $\mathfrak{n}$. On sait que l'action de $\mathfrak{m}$ sur $V^{\mathfrak{n}}$ est irréductible. On note $V^{\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}}$ l'espace des vecteurs de $V^{\mathfrak{n}}$ annulés par $\mathfrak{t}$.

Définition 2.1 - *La représentation ρ est dite proximale* si $\dim V^{\mathfrak{n}} = 1$.
- *La représentation ρ est dite semiproximale si $V^{\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}} \neq 0$.*

Une représentation irréductible proximale est donc semiproximale. En effet, les sous-groupes compacts connexes de $\mathbb{R}^*$ sont triviaux.

[2]Lorsque $\mathbf{G}$ est semisimple et simplement connexe, cette définition coïncide avec la notion de représentation réelle du groupe de Lie G.

Notons $P'_+ := P_+ \cap P_{\mathbb{C}}$. Le plus haut poids restreint définit alors une bijection de l'ensemble des représentations irréductibles proximales de G sur P'_+ (voir [1] ou la remarque du lemme 5.2). On a les inclusions $2P_+ \subset P'_+ \subset P_+$ (voir la proposition 4.3 de [3] ou le corollaire 4.4).

2.3 Groupes discrets

Fait 2.2 *Soit* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe et* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense de* G*. On note* ℓ_Γ *le cône limite de* Γ*, i.e. le plus petit cône fermé de* $\mathfrak{a}^+$ *contenant* $\ell(\Gamma)$*.*
a) L'ensemble des éléments loxodromiques de Γ *est Zariski dense dans* G*.*
b) Le cône limite ℓ_Γ *est convexe et, si* $\mathbf{G}$ *est semisimple,* ℓ_Γ *est d'intérieur non vide.*
c) Pour tout cône ouvert ω *de* $\mathfrak{a}^+$ *qui rencontre* ℓ_Γ*, il existe un sous-semigroupe ouvert* G' *de* G *qui rencontre* Γ*, et tel que* $\ell_{G'} \subset \omega$*.*
d) Pour tout sous-semigroupe ouvert G' *de* G *qui rencontre* Γ*, le sous-semigroupe* $\Gamma' := \Gamma \cap G'$ *est encore Zariski dense dans* G*.*

Démonstration Cela résulte des théorème 1.2 et propositions 6.2 et 6.3 de [2]. $\square$

Remarque Conformément au point de vue de [2], les sous-semigroupes ouverts de G seront utilisés comme des "filtres" pour analyser Γ.

Les faits suivants sont bien classiques mais fort utiles.

Fait 2.3 *Soit* Γ *un sous-groupe Zariski dense d'un groupe de Lie semisimple linéaire connexe* G_e*, alors* Γ *ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini* N*.*

Démonstration L'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski d'un tel N serait alors un idéal nilpotent non nul de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Contradiction. $\square$

Le fait suivant est dû à Auslander.

Fait 2.4 *Soient* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{GL}(V)$*,* E *l'adhérence de Zariski de* Γ *dans* $\mathrm{GL}(V)$*,* R *un sous-groupe fermé distingué résoluble de* E *et* p *la projection de* E *sur* E/R*. On suppose soit que* E/R *est semisimple, soit que* Γ *ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini. Alors le groupe* $p(\Gamma)$ *est un sous-groupe discret de* E/R*.*

Démonstration Voir [23] chapitre VIII. $\square$

La démonstration du fait bien connu suivant repose sur les mêmes idées.

Fait 2.5 *Soient* E *un groupe de Lie et* Γ_0 *un groupe de type fini qui ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini. Alors l'ensemble des morphismes fidèles discrets de* Γ_0 *dans* E *est fermé dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, E)$*.*

Démonstration Voir [17] lemme 1.1. L'argument repose sur le lemme de Zassenhaus : il existe un voisinage O de l'élément neutre tel que tous les sous-groupes discrets de E engendrés par une partie de O sont nilpotents (voir [23] chapitre VIII). $\square$

Dans nos raisonnements, la dimension cohomologique virtuelle[3] $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ interviendra via le fait suivant.

Fait 2.6 *Soit Γ' un groupe sans torsion qui agit proprement sur un espace X homéomorphe à $\mathbb{R}^m$, alors on a $\mathrm{cd}(\Gamma') \leq m$ avec égalité si et seulement si le quotient $\Gamma' \backslash X$ est compact.*

Cet entier s'avère très utile, car on a le lemme de Selberg : *Tout sous-groupe de type fini Γ de $\mathrm{GL}(V)$ admet un sous-groupe d'indice fini Γ' sans torsion.*

2.4 Proximalité

Pour tout élément g de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$, on note $\lambda_1(g) \geq \cdots \geq \lambda_m(g)$ la suite des modules des valeurs propres de g répétées avec multiplicité. Le premier élément $\lambda_1(g)$ de cette suite est donc le rayon spectral de g.

Définition 2.7 *Un élément g de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ est dit*
- proximal si $\lambda_1(g) > \lambda_2(g)$.
- positivement proximal si $\lambda_1(g) > \lambda_2(g)$ et si $\lambda_1(g)$ est valeur propre de g.

Soient $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe, Γ un sous-groupe Zariski dense de G et (V, ρ) une représentation réelle de G.

Définition 2.8 *On dit que ρ est Γ-proximale (resp. positivement Γ-proximale) si tout élément loxodromique g de Γ a une image $\rho(g)$ proximale (resp. positivement proximale).*

Fait 2.9 *On suppose la représentation ρ irréductible. Alors*
a) ρ est Γ-proximale si et seulement si ρ est G-proximale si et seulement si ρ est proximale.
b) ρ est positivement Γ-proximale si et seulement si Γ préserve un cône proprement convexe de V.
c) ρ est positivement G-proximale si et seulement si ρ est sphérique (i.e. $V^K \neq \{0\}$).

Démonstration Le point a) résulte du fait 2.2.a. Les points b) et c) résultent des §3.4 et 4.3 de [3]. $\square$

[3]Par définition, $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ est la dimension cohomologique $\mathrm{cd}(\Gamma')$ des sous-groupes d'indice fini sans torsion Γ' de Γ.

2.5 Convexes divisibles

Le fait standard suivant sera utilisé de façon implicite:

Fait 2.10 *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{GL}(V)$ *qui préserve un cône ouvert proprement convexe* C *de* V. *Alors* Γ *agit proprement sur* C.

Démonstration En effet, Γ préserve la distance de Hilbert de C. $\square$

Définition 2.11 *Un cône ouvert proprement convexe* C *est dit produit s'il existe une décomposition en somme directe* $V = V_1 \oplus V_2$ *telle que* $C = C_1 + C_2$ *avec* $C_1 \subset V_1$ *et* $C_2 \subset V_2$. *Sinon, on dit que* C *est irréductible. Les cônes* C_i *sont appelés facteurs de* C.

Fait 2.12 *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{GL}(V)$ *qui divise un cône ouvert proprement convexe* C *de* V. *On note* H *le commutant de* Γ *dans* $\mathrm{GL}(V)$. *Alors*
a) Il existe une décomposition de V *en somme directe* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ *telle que* H *soit le groupe des éléments de* $\mathrm{GL}(V)$ *qui agissent par homothétie sur chacun des* V_i.
b) Il existe des cônes ouverts proprement convexes C_i *de* V_i *tels que* $C = C_1 + \cdots + C_\ell$.
c) La restriction de Γ *à* V_i *est irréductible. En outre, si* Γ *est Zariski connexe, le cône* C_i *est irréductible.*
d) Le centre $Z := \Gamma \cap H$ *de* Γ *est un sous-groupe cocompact de* H *isomorphe à* $\mathbb{Z}^\ell$.
e) Pour tout $i = 1, \ldots, \ell$, *le cône* C_i *est divisible.*
f) Les seuls cônes ouverts proprement convexes Γ*-invariants de* V *sont les* 2^ℓ *cônes obtenus par changement de signes* $C^\varepsilon := \varepsilon_1 C_1 + \cdots + \varepsilon_\ell C_\ell$ *où* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell) \in \{-1, 1\}^\ell$.

Démonstration Les points a), b) et c) sont dûs à Vey dans [26].

Les points d) et e) sont dans la proposition 4.4 de [6].

Démontrons le point f) : remarquons tout d'abord que, par les faits 2.6 et 2.10, tous les cônes ouverts proprement convexes Γ-invariants C' de V sont divisés par Γ. Ils admettent donc aussi une décomposition $C' = C'_1 + \cdots + C'_\ell$ avec, pour tout i, $C'_i \subset V_i$. D'après la proposition 3.1.2 de [3], pour tout i, il existe un plus petit ouvert proprement convexe Γ-invariant $\Omega_{i,\min}$ de $\mathbb{P}(V_i)$ ainsi qu'un plus grand $\Omega_{i,\max}$. Il existe donc, modulo un changement de signes, un plus petit cône ouvert proprement convexe Γ-invariant $C_{\min}$ de V ainsi qu'un plus grand $C_{\max}$. On a donc, après changement de signes, les inclusions $C_{\min} \subset C \subset C_{\max}$. D'après le fait 2.6 ces trois cônes sont divisés par Γ. Le cône $C_{\min}$ est donc ouvert et fermé dans $C_{\max}$ et ces inclusions sont des égalités $C_{\min} = C = C_{\max}$. En raisonnant de même avec C', on obtient $C' = C^\varepsilon$, pour un signe ε convenable. $\square$

Remarque Il résulte du fait 2.12.d que l'entier ℓ ne dépend que du groupe abstrait Γ et pas de son plongement dans $\mathrm{GL}(V)$. Nous verrons en 7.4 qu'il en est de même pour la liste des dimensions des V_i.

Le corollaire suivant clarifie la signification de l'hypothèse du théorème 1.1.

Corollaire 2.13 *Soit* Δ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{PGL}(V)$ *qui divise un ouvert proprement convexe* Ω *de* $\mathbb{P}(V)$*. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) *Le centre virtuel de* Δ *est fini.*
(i') *Le centre virtuel de* Δ *est trivial.*
(ii) *Tous les sous-groupes d'indice fini de* Δ *ont un centre fini.*
(ii') *Tous les sous-groupes d'indice fini de* Δ *ont un centre trivial.*
(iii) *Le groupe* Δ *est un sous-groupe fortement irréductible*[4] *de* $\mathrm{PGL}(V)$*.*
(iii') *L'adhérence de Zariski de* Δ *dans* $\mathrm{PGL}(V)$ *est semisimple.*
(iv) *Le groupe* Δ *ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini.*
(iv') *Le groupe* Δ *ne contient pas de sous-groupe distingué abélien infini.*

Démonstration Soit C l'un des deux cônes ouverts proprement convexes de V dont l'image dans $\mathbb{P}(V)$ est Ω. On peut relever Δ en un sous-groupe Δ_0 de $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$: le sous-groupe formé des éléments g qui préservent C et dont l'image dans $\mathrm{PGL}(V)$ est dans Δ. Par construction le groupe $\Gamma := 2^{\mathbb{Z}} \times \Delta_0$ est discret et divise C.
Les équivalences entre (i), (i'), (ii), (ii'), (iii) et (iii') résultent du fait 2.12 appliqué au groupe Γ.
(iii') implique (iv) : cela résulte du fait 2.3.
(iv) implique évidemment (iv').
(iv') implique (ii) : En effet, dans chaque sous-groupe d'indice fini se trouve un sous-groupe distingué d'indice fini. En outre, le centre d'un sous-groupe distingué d'indice fini est un sous-groupe distingué abélien. $\square$

3 Limites de cônes convexes divisibles irréductibles

Le but de cette partie est de montrer comment la proposition 1.3 implique le théorème 1.1.

3.1 Groupes préservant un cône convexe

Commençons par un lemme très simple qui sera une des clefs de notre étude.

Définition 3.1 *Un élément* g *de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ *est dit*
- semiproximal si $\lambda_1(g)$ *ou* $-\lambda_1(g)$ *est valeur propre de* g*.*
- positivement semiproximal si $\lambda_1(g)$ *est valeur propre de* g*.*

Lemme 3.2 *Soit* Γ *un sous-semigroupe de* $\mathrm{GL}(V)$ *qui préserve un cône ouvert proprement convexe* C *de* V*. Alors tout élément* g *de* Γ *est positivement semiproximal.*

Remarques - On verra que dans ce cas, l'espace propre de g associé à la valeur propre $\lambda_1(g)$ rencontre $\overline{C}$.

[4] i.e. tous les sous-groupes d'indice fini de Δ sont irréductibles.

- L'élément g n'est pas toujours positivement proximal, comme le prouve l'exemple suivant avec $m = 3$: $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z > (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\}$, Γ est le groupe des automorphismes de C et g est une rotation autour de l'axe des z.

Démonstration On peut supposer que le semigroupe Γ est engendré par g. On note W le sous-espace vectoriel g-invariant de V dont le complexifié $W_{\mathbb{C}}$ est la somme des espaces propres de g correspondant aux valeurs propres de module maximum.

Même lorsque g n'est pas diagonalisable, si on part d'un point v de V en position générale, les valeurs d'adhérence w de la suite $\frac{g^n.v}{\|g^n.v\|}$ sont des éléments non nuls de W. Il suffit pour s'en convaincre d'écrire, dans une base convenable du complexifié $V_{\mathbb{C}}$ de V, la transformation g sous forme de matrice bloc de Jordan.

Si on choisit v dans C, ces valeurs d'adhérence w sont dans $W \cap \overline{C}$.

Introduisons le cône C' intérieur relatif de $W \cap \overline{C}$, le sous-espace vectoriel V' engendré par C' et la restriction g' de g à V'. Par construction, cet élément g' est semisimple, toutes les valeurs propres de g' sont de même module $\lambda > 0$ et g' préserve le cône ouvert proprement convexe C' de V'. L'élément $h := g'/\lambda$ est encore semisimple, préserve encore ce cône C' et toutes ses valeurs propres sont de module 1.

Choisissons alors un produit scalaire h-invariant sur V', notons S' la sphère de rayon 1 de V' et choisissons un point v de $S' \cap C'$. La suite des moyennes

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h^k(v)$$

converge vers le point $p(v)$ où p est le projecteur h-invariant sur $\mathrm{Ker}(h - 1)$.

Comme le cône C' est proprement convexe, l'enveloppe convexe de $S' \cap \overline{C'}$ est un compact K qui ne contient pas le point 0. Remarquons que la suite v_n est dans K, et donc que sa limite $p(v)$ est aussi dans K. Donc $p(v)$ est non nul et 1 est une valeur propre de h. Ce qui prouve bien que g est positivement semiproximal. □

3.2 Semiproximalité

Soient $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe, Γ un sous-groupe Zariski dense de G et (V, ρ) une représentation réelle de G.

Définition 3.3 *On dit que ρ est Γ-semiproximale (resp. positivement Γ-semiproximale) si tout élément loxodromique g de Γ a une image $\rho(g)$ semiproximale (resp. positivement semiproximale).*

Ces notions seront étudiées en détail dans le chapitre 5. En particulier, le lien entre représentations irréductibles Γ-semiproximales et représentations irréductibles semiproximales sera expliqué dans le corollaire 5.1.

La proposition 3.4 ci-dessous est quasiment une reformulation de la proposition 1.3.

Proposition 3.4 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe,* Γ *un sous-groupe discret, de type fini et Zariski dense de* G*, et* (V, ρ) *une représentation réelle de* G *de noyau fini. On suppose que* ρ *est positivement* Γ*-semiproximale.*

Alors on a l'inégalité $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \dim V$*.*

Cette inégalité est une égalité si et seulement si Γ *divise un cône ouvert proprement convexe* C *de* V*.*

Remarque L'hypothèse "Γ de type fini" n'est utilisée que pour assurer, grâce au lemme de Selberg, la finitude de $\mathrm{vcd}(\Gamma)$.

Cette proposition 3.4 n'est qu'une réponse partielle à la question suivante.

Lorsque ρ *est irréductible et positivement* Γ*-semiproximale, le groupe* Γ *préserve-t-il un cône proprement convexe de* V*?*

Une réponse positive à cette question nous aurait bien simplifié la vie. Malheureusement la réponse à cette question est négative car il existe des représentations semiproximales qui ne sont pas proximales. Le premier exemple (avec G non compact) est de dimension 10. Il s'agit de la représentation ρ du groupe $G = \mathrm{SO}_e(2n, 1)$ dans $V = \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n+1})$ avec $n = 2$. Il suffit alors de prendre pour Γ n'importe quel sous-groupe discret Zariski dense de G. En effet, dans ce cas, l'espace de plus haut poids $V^{\mathfrak{n}} \simeq \mathbb{R}^{2n-1}$ est la représentation standard du groupe $M \simeq \mathrm{SO}(2n-1)$. La représentation ρ n'est pas proximale car $\dim(V^{\mathfrak{n}}) > 1$. Elle positivement G-semiproximale car tout élément de $\mathrm{SO}(2n-1)$ admet 1 comme valeur propre.

L'exemple ci-dessus est à la source d'une partie des complications techniques de cet article. Par exemple, ce ne sera qu'à la fin de la section 5 que nous serons capable de montrer la majoration de la proposition 3.4 sous l'hypothèse supplémentaire que la représentation semiproximale ρ est irréductible. Alors que, pour les représentations proximales irréductibles, cette majoration est une conséquence immédiate de l'existence d'un cône proprement convexe invariant (fait 2.9.b) et de la propreté de l'action de Γ sur ce cône (faits 2.10 et 2.6).

La démonstration de cette proposition 3.4 sera l'objet des sections 4 à 6. Auparavant montrons comment celle-ci implique la proposition 1.3 et le théorème 1.1.

3.3 Fermeture de $\mathcal{F}_{\Gamma_0}$

Montrons que la proposition 3.4 implique la proposition 1.3.

Notons $\mathbb{R}^*$ le groupe des homothéties de $V := \mathbb{R}^m$, E l'adhérence de Zariski dans $\mathrm{GL}(V)$ du produit $\Delta.\mathbb{R}^*$, U le radical unipotent de E et p la projection de E sur un sous-groupe réductif maximal $G \simeq E/U$ de E. Comme Δ ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini, la restriction de p à Δ a un noyau fini et, d'après le fait 2.4, le groupe image $\Delta' := p(\Delta)$ est un sous-groupe discret de G. Ce groupe Δ' ne contient pas d'homothéties non triviales et le même fait 2.4, prouve que le groupe $\Gamma := \Delta' \times 2^{\mathbb{Z}}$ est encore discret.

D'après l'hypothèse $(H2)$, tous les éléments de Γ sont positivement semiproximaux. On applique la proposition 3.4 à Γ : On obtient l'inégalité $\mathrm{vcd}(\Delta) = \mathrm{vcd}(\Gamma) - 1 \leq m - 1$.

En cas d'égalité, le groupe Δ' divise un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}(V)$. D'après le corollaire 2.13, la représentation de Δ' dans V est irréductible. La représentation de G dans V est donc aussi irréductible. Comme G normalise U, G préserve le sous-espace vectoriel W des vecteurs U-invariants de V. Par le théorème d'Engels, W est non nul. On en déduit $W = V$ puis $U = \{e\}$ et $\Delta = \Delta'$. □

Montrons que la proposition 1.3 implique le théorème 1.1.

Soit ρ_n une suite dans $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ qui converge vers un élément ρ de $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(V))$. On veut montrer que ρ est dans $\mathcal{F}_{\Delta_0}$. Le corollaire 2.13 assure que Δ_0 ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini. Notons Ω_n l'ouvert proprement convexe divisé par $\rho_n(\Delta_0)$ et C_n l'un des deux cônes convexes d'image Ω_n. Pour tout $n \geq 1$, on note $\rho'_n : \Delta_0 \to SL^{\pm}(V)$ le morphisme qui relève ρ_n et tel que $\rho'_n(C_n) = C_n$. Comme Δ_0 est de type fini, quitte à extraire une sous-suite, la suite ρ'_n converge vers un morphisme ρ' qui relève ρ. D'après le fait 2.5, ρ' est fidèle et discret. Comme Δ_0 divise les ouverts Ω_n, on a l'égalité : $\mathrm{vcd}(\Delta_0) = m - 1$. D'après le lemme 3.2, tous les éléments de $\rho'_n(\Delta_0)$ sont positivement semiproximaux; par passage à la limite, il en est de même des éléments de $\rho'(\Delta_0)$. La proposition 1.3 appliquée au groupe $\Delta := \rho'(\Delta_0)$ affirme alors que ce groupe $\rho'(\Delta_0)$ divise un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}(V)$. On a bien montré que ρ est dans $\mathcal{F}_{\Delta_0}$. □

On peut préciser le théorème 1.1.

Corollaire 3.5 *Soient Δ_0 un groupe dont le centre virtuel est trivial et ρ_n une suite d'éléments de $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ qui converge vers un élément ρ de* $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(V))$. *On note Ω_n les ouverts proprement convexes de $\mathbb{P}(V)$ divisés par $\rho_n(\Delta_0)$. Alors la suite $\overline{\Omega_n}$ converge, vers l'adhérence $\overline{\Omega}$ d'un ouvert Ω proprement convexe de $\mathbb{P}(V)$. Cet ouvert est divisé par $\rho(\Delta_0)$.*

Remarque La convergence est celle pour la distance de Hausdorff.

Démonstration Notons Ω l'ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}(V)$ divisé par $\rho(\Delta_0)$, ouvert qui est donné par le théorème 1.1. Notons $K \subset \mathbb{P}(V)$ une valeur d'adhérence de la suite de compacts $\overline{\Omega_n}$. Ce compact est convexe non vide et $\rho(\Delta_0)$-invariant. Or, par le corollaire 2.13, la représentation ρ est irréductible. Ce qui prouve que K est l'adhérence $\overline{\Omega'}$ d'un ouvert proprement convexe Ω'. Par le fait 2.12.f, on a forcément $\Omega' = \Omega$ et donc la suite $\overline{\Omega_n}$ converge vers $\overline{\Omega}$. □

Il ne reste plus qu'à montrer cette proposition 3.4. C'est le coeur de cet article. Cela nous occupera pendant les trois prochaines sections et utilisera l'appendice.

4 Le groupe des signes de G

Cette partie est indépendante du reste de cet article sauf pour les notations de la section 2.1. Elle sera utilisée dans la partie 5. Son but est de calculer, pour tout $\mathbb{R}$-groupe $\mathbf{G}$ semisimple connexe et simplement connexe, son "groupe des signes", c'est-à-dire le groupe $S_G := L/L_e$ des composantes connexes du centralisateur dans G d'un tore déployé maximal de $\mathbf{G}$.

4.1 Les composantes connexes de L

Commençons par rappeler quelques résultats sur ce groupe L/L_e.

Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe. On reprend les notations et les définitions de la section 2.1.

Le groupe algébrique $\mathbf{L}$ est Zariski connexe car c'est le centralisateur d'un tore mais L n'est pas en général connexe.

Définition 4.1 *Le groupe $S_G := L/L_e$ est appelé groupe des signes de G.*

Le lemme suivant est certainement connu (voir [25]). Nous en donnons une démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme 4.2 *Soient $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe.*
a) Les injections de M_G, H et T_G dans L induisent des isomorphismes de groupes:

$$M_G/M \simeq L/L_e \simeq H/H_e \simeq T_G/T \ .$$

b) L'injection de A dans H induit une surjection

$$A/A_e \longrightarrow H/H_e \ .$$

c) Le groupe S_G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r'}$ avec $r' \leq rang_{\mathbb{R}}(G)$.

Remarques - L'assertion c) permet de voir S_G comme un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension r'.
- Nous verrons que, lorsque $\mathbf{G}$ est semisimple et simplement connexe, on a $r' = \mathrm{card}(\Pi_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}^*)$ (corollaire 4.8).

Démonstration a) & b)
$\star$ *La multiplication induit un isomorphisme de groupes entre $M_G \times A_e$ et L.*
En effet, notons $\mathfrak{g}^{-\theta} := \{X \in \mathfrak{g} \ / \ \theta(X) = -X\}$ et restreignons à L la décomposition de Cartan qui identifie G à $K \times \exp(\mathfrak{g}^{-\theta})$. Si un élément $g = k \exp X$ est dans L, alors $\exp 2X = \theta(g)^{-1} g$ est aussi dans L, on a $[X, \mathfrak{a}] = 0$ et, par maximalité de $\mathfrak{a}$, X est dans $\mathfrak{a}$, puis k est dans M_G. Ceci prouve l'isomorphisme $M_G/M \simeq L/L_e$.

⋆ *La multiplication induit un isomorphisme de groupes entre $T_G \times A_e$ et H.*
En effet, il suffit de restreindre à H l'isomorphisme ci-dessus. Ceci prouve l'isomorphisme $T_G/T \simeq H/H_e$.

⋆ *La multiplication induit un morphisme de groupes surjectif de $T \times A$ sur H.*
En effet, $\mathbf{T}$ est le sous-tore anisotrope maximal de $\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$ est le sous-tore isotrope maximal de $\mathbf{H}$ et cette assertion est une propriété générale des tores définis sur $\mathbb{R}$. Comme T est connexe, ceci prouve que le morphisme $A/A_e \to H/H_e$ est surjectif.

⋆ *La multiplication induit un morphisme de groupes surjectif de $M \times A$ sur L.*
En effet, comme $\mathbf{L}$ est un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe et de groupe dérivé $[\mathbf{L}, \mathbf{L}]$ anisotrope, tout élément g de L est dans un sous-tore maximal $\mathbf{H}'$ de $\mathbf{L}$ défini sur $\mathbb{R}$. On termine alors comme dans le point précédent. Ceci prouve que le morphisme $A/A_e \to L/L_e$ est surjectif et donc que le morphisme $H/H_e \to L/L_e$ est aussi surjectif.

⋆ *Le morphisme de H/H_e sur L/L_e est injectif.*
En effet, comme le groupe $\mathbf{H}$ est un tore, il est commutatif et $H \cap M$ aussi. Par maximalité de T, on a alors $H \cap M = T$, puis $H \cap L_e = H_e$. C'est ce que l'on voulait.

c) Le groupe A est isomorphe à $(\mathbb{R}^*)^r$ donc le groupe A/A_e s'identifie aux groupes

$$A/A_e \simeq \{a \in A \ / \ a^2 = 1\} = A \cap T_G = A \cap M_G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \ . \qquad \square$$

Remarque On détermine facilement le groupe S_G à l'aide de la suite exacte de $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow A \cap T \longrightarrow A \cap T_G \longrightarrow S_G \longrightarrow 0 \ .$$

4.2 La dualité entre S_G et $P'/2P$

Le corollaire suivant affirme que le groupe S_G des signes de G est en dualité non dégénérée avec le groupe $P'/2P$ des "représentations proximales modulo 2"

Rappelons qu'on identifie le groupe des caractères d'un tore à un sous-groupe du dual de son algèbre de Lie.

Lemme 4.3 *Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe semisimple connexe et simplement connexe. Avec les notations de la section 2.1.*
a) Le réseau $P_{\mathbb{C}} := X(\mathbf{H})$ est le réseau des poids du système de racines $\Sigma_{\mathbb{C}}$. Autrement dit,

$$P_{\mathbb{C}} = \{\lambda \in i\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^* \ / \ \forall \alpha \in \Sigma_{\mathbb{C}} \ , \ 2\frac{<\lambda, \alpha>}{<\alpha, \alpha>} \in \mathbb{Z}\} \ .$$

b) Le réseau $P := X(\mathbf{A})$ est le réseau des poids du système de racines restreintes Σ. Autrement dit,

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \ / \ \forall \alpha \in \Sigma \ , \ 2\frac{<\lambda, \alpha>}{<\alpha, \alpha>} \in \mathbb{Z}\} \ .$$

c) Le réseau $P' := P_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}^*$ est le réseau $X(\mathbf{H})_{\mathbb{R}}$ des caractères de $\mathbf{H}$ définis sur $\mathbb{R}$.

Remarques - Donc, lorsque $\mathbf{G}$ est semisimple connexe et simplement connexe, la famille ω_α, pour α dans $\Pi_{\mathbb{C}}$, est une base du $\mathbb{Z}$-module $P_{\mathbb{C}}$ et la famille $\pi_{\dot{\alpha}}$, pour $\dot{\alpha}$ dans Π, est une base du $\mathbb{Z}$-module P.
- Comme le $\mathbb{R}$-tore $\mathbf{A}$ est déployé, tous les caractères de $\mathbf{A}$ sont définis sur $\mathbb{R}$.

Démonstration a) C'est une assertion classique de la théorie du plus haut poids (voir par exemple le corol. 1 de la prop. 11 de [14]).

b) En effet, d'après le §7.2 de [10], il existe un $\mathbb{R}$-sous-groupe semisimple connexe déployé $\mathbf{G}' \subset \mathbf{G}$ contenant $\mathbf{A}$ et tel que l'ensemble des racines de $\mathbf{G}'$ soit égal au système de racines réduit

$$\Sigma' := \{\alpha \in \Sigma \;/\; 2\alpha \notin \Sigma\} \ .$$

Le réseau des poids du système de racines Σ est égal à celui de Σ'. Or il résulte du §4.6 de [11] que $\mathbf{G}'$ est simplement connexe. Il suffit alors d'appliquer le point a) à $\mathbf{G}'$.

c) Cela résulte du point a). □

Corollaire 4.4 *Soit* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe semisimple connexe et simplement connexe. On a les inclusions*

$$2P \subset P' \subset P$$

et l'application

$$\theta : P' \times H \to \{\pm 1\} \;\; ; \;\; (\lambda, h) \mapsto \mathrm{signe}(\lambda(h))$$

induit une dualité non dégénérée de $\mathbb{F}_2$*-espaces vectoriels*

$$\dot{\theta} : (P'/2P) \times S_G \longrightarrow \{\pm 1\} \simeq \mathbb{F}_2 \ .$$

Remarque Rappelons que, d'après la proposition 4.2, on a $S_G \simeq H/H_e$.

Démonstration Nos assertions sont des conséquences du lemme 4.3 et des propriétés générales suivantes des tores $\mathbf{H}$ définis sur $\mathbb{R}$ et de leur sous-tore $\mathbb{R}$-déployé maximal $\mathbf{A}$:
- Tout carré d'un caractère de $\mathbf{A}$ est restriction d'un unique caractère de $\mathbf{H}$ défini sur $\mathbb{R}$.
- Soit χ dans $X(\mathbf{H})_{\mathbb{R}}$. Alors l'image $\chi(\mathbf{H}_{\mathbb{R}})$ est incluse dans $]0, \infty[$ si et seulement si $\chi|_{\mathbf{A}}$ est le carré d'un caractère de $\mathbf{A}$.
- Soit h dans $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$. Alors le réel $\chi(h)$ est positif pour tout caractère χ dans $X(\mathbf{H})_{\mathbb{R}}$ si et seulement si h est un carré dans $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ si et seulement si h est dans H_e .
On peut montrer directement ces propriétés en remarquant qu'il n'existe que trois $\mathbb{R}$-tores irréductibles $\mathbf{H}$, tores pour lesquels, les points réels sont respectivement $H = \mathbb{R}^*$, $H = \mathbb{S}^1$ et $H = \mathbb{C}^*$ (voir le chapitre 8 de [9]) □

4.3 Le cardinal de S_G

Pour déterminer le groupe S_G et son dual $P'/2P$, nous aurons besoin de quelques notations supplémentaires.

Pour tout χ dans $P_{\mathbb{C}}$, on note $\overline{\chi}$ le poids complexe conjugué et $\dot{\chi} := \frac{1}{2}(\chi + \overline{\chi})$. Décomposons l'ensemble $\Pi_{\mathbb{C}}$ des racines simples de $\Sigma_{\mathbb{C}}^{+}$ en une réunion disjointe

$$\Pi_{\mathbb{C}} = \Pi_0 \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \ \text{ où}$$

$\Pi_0 := \Pi_{\mathbb{C}} \cap i\mathfrak{t}^*$, $\Pi_1 := \{\alpha \in \Pi_{\mathbb{C}} - \Pi_0 \ / \ \overline{\alpha} = \alpha \bmod R_0\}$ et $\Pi_2 := \{\alpha \in \Pi_{\mathbb{C}} \ / \ \overline{\alpha} \neq \alpha \bmod R_0\}$.

On note aussi

$$\Pi' = \Pi_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}^* \ .$$

On note α^* l'élément de Π_2 tel que $\overline{\alpha} = \alpha^* \bmod R_0$. Une telle racine α^* existe car $\overline{\alpha}$ est dans $\Sigma_{\mathbb{C}}^{+}$ et est donc une somme de racines simples qui sont toutes dans Π_0 sauf exactement une α^* qui est dans Π_2. Par définition, on a $\alpha^* \neq \alpha$ et $(\alpha^*)^* = \alpha$. On note $\Pi_2^{\bullet}$ une partie de Π_2 obtenue en choisissant une seule racine simple α dans chaque doublet $\{\alpha, \alpha^*\}$.

Remarques Dans le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$ (voir [18] p.532) :
- Π_0 correspond aux points noirs.
- Π_1 aux points blancs qui ne sont pas à l'extrémité d'une flèche.
- Π_2 aux points blancs à l'extrémité d'une flèche.
- Π' aux points blancs qui ne sont ni à l'extrémité d'une flèche ni voisin d'un point noir.
- $\Pi_2^{\bullet}$ est obtenu en choisissant un point à l'extrémité de chaque flèche.

Lemme 4.5 *Soit* **G** *un* $\mathbb{R}$*-groupe semisimple connexe et simplement connexe.*
a) La famille $\Pi_0 \cup \{\alpha - \overline{\alpha} \ / \ \alpha \in \Pi_2^{\bullet}\}$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $i\mathfrak{t}^*$*.*
b) On a l'égalité $\Pi = \{\dot{\alpha} \ / \ \alpha \in \Pi_1 \cup \Pi_2^{\bullet}\}$*.*
c) Pour tout α *dans* Π_1*, on a* $\omega_\alpha \in \mathfrak{a}^*$*.*
d) Pour tout α *dans* Π_2*, on a* $\overline{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha^*}$*.*
e) La famille $\{\omega_\alpha \ / \ \alpha \in \Pi_1\} \cup \{\omega_\alpha + \overline{\omega_\alpha} \ / \ \alpha \in \Pi_2^{\bullet}\}$ *est une base du* $\mathbb{Z}$*-module* P'*.*
f) On a l'inclusion $\Pi' \subset \Pi_1$*.*

Démonstration Ces affirmations sont classiques. Voici quelques détails de leur preuve.
a) Il suffit d'écrire la matrice de l'application $\sigma : \chi \to \overline{\chi}$ dans la base $\Pi_{\mathbb{C}}$ de $\Sigma_{\mathbb{C}}$.
b) Cela résulte du point *a*).
c) & d) La matrice de l'application σ dans la base des poids fondamentaux est transposée de celle dans la base $\check{\Pi}_{\mathbb{C}}$ des coracines.
e) En effet, pour tout élément $\chi = \sum_{\alpha \in \Pi_{\mathbb{C}}} n_\alpha \omega_\alpha$ de $P_{\mathbb{C}}$, on a l'équivalence

$$\overline{\chi} = \chi \text{ si et seulement si } (n_\alpha = 0 \ , \forall \alpha \in \Pi_0 \text{ et } n_{\alpha^*} = n_\alpha \ , \forall \alpha \in \Pi_2).$$

f) En effet, Π' ne rencontre ni Π_0 ni Π_2. □

Le lemme clef pour la description de S_G est le lemme 4.6 qui compare la base de P' avec la base $\pi_{\dot{\alpha}}$ de P.

Lemme 4.6 *Soit* **G** *un* $\mathbb{R}$*-groupe semisimple connexe et simplement connexe.*
a) Si α *est dans* Π'*, alors on a* $\omega_\alpha = \pi_{\dot{\alpha}}$*.*

b) Si α est dans $\Pi_1 - \Pi'$, alors on a $\omega_\alpha = 2\pi_{\dot\alpha}$.
c) Si α est dans $\Pi_2^\bullet$, alors on a $\omega_\alpha + \overline{\omega_\alpha} = 2\pi_{\dot\alpha}$.

Démonstration La démonstration repose sur les travaux d'Araki. Les divers renvois à [18] ci-dessous sont tous des renvois à l'exercice F p.530 de [18] qui résume ces travaux.

Remarquons tout d'abord que $\dot\omega_\alpha$ est orthogonal à toutes les racines simples restreintes $\dot\beta$ différentes de $\dot\alpha$. On a donc $\dot\omega_\alpha = k\pi_{\dot\alpha}$ où k est donné par

$$k = \frac{2}{d_{\dot\alpha}} \frac{< \dot\omega_\alpha, \dot\alpha >}{< \dot\alpha, \dot\alpha >} \; .$$

Remarquons ensuite que *l'angle θ_α entre α et $\overline{\alpha}$ vaut* 0*, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.* En effet, dans un système de racines, l'angle θ entre deux racines de même longueur vérifie $\cos\theta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. D'après [18], on a $\theta_\alpha \neq \frac{\pi}{3}$. Comme α n'est pas dans Π_0, on a aussi $\theta_\alpha \neq \pi$.

a) & b) On a l'égalité $\dot\omega_\alpha = \omega_\alpha$. Distinguons trois cas.

1$^{\text{er}}$ cas : $\theta_\alpha = 0$. Autrement dit, $\alpha \in \Pi'$. Dans ce cas, on a $\dot\alpha = \alpha$ et d'après [18], on a $2\dot\alpha \notin \Sigma^+$, et donc $d_{\dot\alpha} = 1$, puis $k = 2\frac{<\omega_\alpha, \alpha>}{<\alpha,\alpha>} = 1$. Donc $\omega_\alpha = \pi_{\dot\alpha}$.

2$^{\text{ème}}$ cas : $\theta_\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on a $<\dot\alpha, \dot\alpha> = \frac{1}{2}<\alpha, \alpha>$ et d'après [18], on a $2\dot\alpha \notin \Sigma^+$, et donc $d_{\dot\alpha} = 1$, puis $k = 4\frac{<\omega_\alpha, \alpha>}{<\alpha,\alpha>} = 2$. Donc $\omega_\alpha = 2\pi_{\dot\alpha}$.

3$^{\text{ème}}$ cas : $\theta_\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Dans ce cas, on a $<\dot\alpha, \dot\alpha> = \frac{1}{4}<\alpha, \alpha>$ et d'après [18], on a $2\dot\alpha \in \Sigma^+$, et donc $d_{\dot\alpha} = 2$, puis $k = 4\frac{<\omega_\alpha, \alpha>}{<\alpha,\alpha>} = 2$. Donc $\omega_\alpha = 2\pi_{\dot\alpha}$.

c) Comme ω_α est orthogonal à $\overline{\alpha}$, on a l'égalité $<\dot\omega_\alpha, \dot\alpha> = \frac{1}{2}<\omega_\alpha, \alpha>$. Distinguons deux cas.

1$^{\text{er}}$ cas : $\theta_\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on a $<\dot\alpha, \dot\alpha> = \frac{1}{2}<\alpha, \alpha>$ et d'après [18], on a $2\dot\alpha \notin \Sigma^+$, et donc $d_{\dot\alpha} = 1$, puis $k = 2\frac{<\omega_\alpha, \alpha>}{<\alpha,\alpha>} = 1$. Donc $\dot\omega_\alpha = \pi_{\dot\alpha}$ et $\omega_\alpha + \overline{\omega_\alpha} = 2\pi_{\dot\alpha}$.

2$^{\text{ème}}$ cas : $\theta_\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Dans ce cas, on a $<\dot\alpha, \dot\alpha> = \frac{1}{4}<\alpha, \alpha>$ et d'après [18], on a $2\dot\alpha \in \Sigma^+$, et donc $d_{\dot\alpha} = 2$, puis $k = 2\frac{<\omega_\alpha, \alpha>}{<\alpha,\alpha>} = 1$. Donc $\dot\omega_\alpha = \pi_{\dot\alpha}$ et $\omega_\alpha + \overline{\omega_\alpha} = 2\pi_{\dot\alpha}$. □

Lemme 4.7 *Soit* **G** *un $\mathbb{R}$-groupe semisimple connexe et simplement connexe. Notons* **B** *le $\mathbb{R}$-sous-tore de* **A** *intersection des noyaux des caractères $\pi_{\dot\alpha}$ pour $\dot\alpha$ dans $\Pi - \Pi'$. Alors, l'injection de B dans L induit un isomorphisme*

$$B/B_e \widetilde{\longrightarrow} S_G.$$

Remarque - Π' est vu ici comme une partie de Π.
- Comme **G** est semisimple et simplement connexe, les poids fondamentaux $\pi_{\dot\alpha}$ sont des caractères de **A** (lemme 4.3).

Démonstration Rappelons que S_G s'identifie à H/H_e. Par construction, $\mathbf{B}$ est un sous-tore du tore déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{H}$. Comme la famille $\pi_{\dot\alpha}$, pour $\dot\alpha$ dans Π' est une base du $\mathbb{Z}$-module $X(\mathbf{B})$, le lemme 4.6 assure que l'application $\chi \to \chi|_{\mathbf{B}}$ induit alors une bijection du groupe $X(\mathbf{H})_{\mathbb{R}}/2X(\mathbf{A})$ sur le groupe $X(\mathbf{B})/2X(\mathbf{B})$. C'est une propriété générale des $\mathbb{R}$-tores que dans une telle situation, l'injection de B dans H induit un isomorphisme $B/B_e \simeq H/H_e$. $\square$

Corollaire 4.8 *Soit* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe semisimple connexe et simplement connexe,* $S_G := L/L_e$ *le groupe des signes de* G *et* $\Pi' := \Pi_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}^*$.

Alors S_G *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r'}$ *avec* $r' = \mathrm{card}(\Pi')$.

Autrement dit, r' est le nombre de points blancs du diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$ qui ne sont ni à l'extrémité d'une flèche ni voisin d'un point noir.

Démonstration Cela résulte du lemme 4.7 car $\mathbf{B}$ est un tore déployé de dimension r'.$\square$

5 Semiproximalité

Nous rassemblons dans cette partie diverses propriétés des représentations irréductibles semiproximales d'un groupe de Lie semisimple connexe G, propriétés qui nous seront utiles pour démontrer la proposition 3.4 dans la partie 6.

Nous utilisons librement les notations de l'appendice 8.

5.1 Semiproximalité et Γ-semiproximalité

Voici une première application à notre problème des résultats de la partie 8.

Corollaire 5.1 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe,* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense de* G *et* (V, ρ) *une représentation réelle irréductible de* G.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ρ *est* Γ*-semiproximale.*

(ii) ρ *est* G*-semiproximale.*

(iii) ρ *est semiproximale.*

Remarque Ce corollaire est analogue au fait 2.9.a.

Démonstration Montrons que (i) implique (iii) : Si ρ n'est pas semiproximale, il existe un élément t de T dont l'action sur $V^{\mathfrak{n}}$ n'a pas de point fixe non nul: $\det((\rho(t)-1)|_{V^{\mathfrak{n}}}) \neq 0$. D'après le corollaire 8.5, il existe un élément loxodromique g_0 de Γ et un élément x_0 de G tel que $x_0 g_0 x_0^{-1} = t' exp(\ell(g_0))$ avec $t' \in T$ proche de t et $\ell(g_0) \in \mathring{\mathfrak{a}}^+$. Mais alors, on a $\det((\rho(t') - 1)|_{V^{\mathfrak{n}}}) \neq 0$, l'élément $\rho(g_0)$ n'est pas semiproximal et ρ n'est pas Γ-semiproximal.

Montrons que (iii) implique (ii) : Si ρ est semiproximale, l'espace $V^{\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}}$ est non nul. On veut montrer qu'alors tout élément loxodromique g de G a une image $\rho(g)$ semiproximale.

On peut supposer que g est dans $T_G exp(\overset{\circ}{\mathfrak{a}}^+)$. Rappelons que $V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}}$ est la somme des espaces propres de $\rho(g)$ associés aux valeurs propres de modules maximum. En outre les valeurs propres de $\rho(g)$ dans le sous-espace $V^{\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}}$ sont toutes réelles. Ceci prouve bien que $\rho(g)$ est semiproximal.

Enfin, il est clair que (ii) implique (i). □

5.2 Plus haut poids des représentations semiproximales

Décrivons maintenant les représentations irréductibles semiproximales de G à l'aide des plus hauts poids de leur représentation complexifiée[5].

Pour tout χ dans $P_{\mathbb{C}}$, on note $\widehat{\chi}$ l'unique élément de $P_{\mathbb{C},+}$ qui est dans la même $W_{\mathbb{C}}$-orbite que le poids complexe conjugué $\overline{\chi}$, de sorte que si χ est le plus haut poids d'une représentation irréductible complexe de G, alors $\widehat{\chi}$ est le plus haut poids de la représentation complexe conjuguée.

Lemme 5.2 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe,* (V,ρ) *une représentation réelle irréductible de* G*,* $\lambda \in P_+$ *le plus haut poids restreint de* V *et* $\chi \in P_{\mathbb{C},+}$ *le plus haut poids d'une sous-représentation irréductible complexe de* $V_{\mathbb{C}}$*.*
a) La représentation (V,ρ) *est semiproximale si et seulement si* χ *est dans* $R_0 + P'_+$*.*
b) Dans ce cas, on a $\lambda \in P'_+$*.*

Remarques - La représentation complexifiée $(V_{\mathbb{C}},\rho_{\mathbb{C}})$ est soit irréductible, soit somme directe de deux représentations irréductibles complexes conjuguées.
- La correspondance $V \leftrightarrow \chi$ met en bijection les représentations réelles irréductibles de G et l'ensemble $P_{\mathbb{C},+}/_{\sim}$ où la relation d'équivalence $\chi \sim \chi'$ sur $P_{\mathbb{C},+}$ est donnée par $\chi' = \chi$ ou $\widehat{\chi}$.
- Comme on a $R_0 \subset i\mathfrak{t}^*$ et $P' \subset \mathfrak{a}^*$, on a l'équivalence: $\chi \in R_0 + P'_+ \Leftrightarrow \widehat{\chi} \in R_0 + P'_+$.
- On retrouve le fait que (V,ρ) est proximale si et seulement si $\chi \in P'_+$ (voir [1]).

Démonstration Écrivons $\chi = \chi_{\mathfrak{t}} + \dot{\chi}$ avec $\chi_{\mathfrak{t}} \in i\mathfrak{t}^*$ et $\dot{\chi} \in \mathfrak{a}^*$ et notons $W \subset V_{\mathbb{C}}$ la sous-représentation complexe irréductible de plus haut poids χ. Dire que la représentation ρ est semiproximale c'est dire que $W^{\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}}$ est non nul. Il est équivalent de dire que la représentation de T dans $W^{\mathfrak{n}}$ admet 0 comme poids. Comme $W^{\mathfrak{n}}$ est une représentation complexe irréductible de M de plus haut poids $\chi_{\mathfrak{t}}$, il est équivalent de dire que son plus haut poids $\chi_{\mathfrak{t}}$ est dans le réseau R_0 des racines de M. Mais comme R^0 est inclus dans $P_{\mathbb{C}}$, $\dot{\chi}$ est alors dans $P_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}^*$, c'est-à-dire dans P'.

b) En effet, on a $\lambda = \dot{\chi}$. □

[5]Rappelons que l'application "plus haut poids" définit une bijection entre l'ensemble des (classes d'équivalences de) représentations complexes irréductibles de G et l'ensemble $P_{\mathbb{C},+}$.

5.3 Signe des représentations semiproximales

Relions maintenant le groupe S_Γ des signes de Γ (définition 8.6 de l'appendice) aux représentations irréductibles positivement Γ-semiproximales.

Pour tout élément g de G qui est conjugué à un élément h de H (c'est toujours le cas si g est loxodromique), on appelle signe de g l'élément $s_g \in S_G \simeq H/H_e$ image de h. Il ne dépend pas du choix de h.

Pour tout λ dans P', on note $s_\lambda \in P'/2P$ son image modulo $2P$.

Définition 5.3 *Soit (V, ρ) une représentation réelle irréductible semiproximale de G et λ son plus haut poids restreint. On appelle signe de ρ le caractère $\varepsilon_\rho : S_G \to \{\pm 1\}$ donné par, pour tout s dans S_G, $\varepsilon_\rho(s) = \dot{\theta}(s_\lambda, s)$.*

Lemme 5.4 *Soient $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe, Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G, (V, ρ) et (V', ρ') deux représentations réelles irréductibles semiproximales de G. Notons λ et λ' leurs plus haut poids restreints.*
a) Les représentations ρ et ρ' ont même signe si et seulement si $\lambda - \lambda'$ est dans $2P$.
b) Le groupe S_Γ est inclus dans $\mathrm{Ker}(\varepsilon_\rho)$ si et seulement si la représentation ρ est positivement Γ-semiproximale.
c) Supposons $\lambda - \lambda'$ dans $2P$. Alors la représentation ρ est positivement Γ-semiproximale si et seulement si ρ' est positivement Γ-semiproximale.

Démonstration a) Comme $\dot{\theta}$ est une dualité non dégénérée (corollaire 4.4), on a l'égalité $\varepsilon_\rho = \varepsilon_{\rho'}$ si et seulement si $s_\lambda = s_{\lambda'}$.

b) Notons $P(V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}})$ l'ensemble des poids de $\mathbf{H}$ dans $V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}}$. La représentation ρ est semiproximale si et seulement si $P(V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}})$ contient un poids χ_0 défini sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire un poids trivial sur $\mathbf{T}$. Comme tous les éléments de $P(V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}})$ ont même restriction à $\mathbf{A}$, ce poids χ_0 est unique: c'est le caractère de $\mathbf{H}$ défini sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbf{A}$ est égale au plus haut poids restreint λ de V.

Supposons tout d'abord que l'on a $S_\Gamma \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon_\rho)$. Soit g un élément loxodromique de Γ. On veut montrer que $\rho(g)$ est positivement semiproximal. On peut supposer que g est dans $T_G \exp(\mathring{\mathfrak{a}}^+)$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ de module maximum sont les nombres complexes $\chi(g)$, avec χ dans $P(V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}})$. Comme $\varepsilon_\rho(s_g) = +1$, le réel $\chi_0(g)$ est positif. Donc $\rho(g)$ est positivement semiproximal.

A l'inverse, supposons que l'on a $S_\Gamma \not\subset \mathrm{Ker}(\varepsilon_\rho)$. Utilisons les notations τ_Γ et T_Γ de l'appendice 8.3. Comme T_Γ est un sous-groupe de T_G contenant T dont l'image dans S_G est égal à S_Γ (corollaire 8.5), on peut trouver un élément t de T_Γ tel que

$$\varepsilon_\rho(s_t) = -1 \text{ et } \forall \chi \in P(V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}}) - \{\chi_0\} \ , \ \chi(t) \notin \mathbb{R} \ .$$

Comme la partie τ_Γ est dense dans T_Γ, on peut trouver un élément loxodromique g de Γ avec t très proche de $\tau(g)$. On a alors

$$\varepsilon_\rho(s_g) = -1 \text{ et } \forall \chi \in P(V_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{n}}) - \{\chi_0\} \ , \ \chi(g) \notin \mathbb{R} \ .$$

Comme $\varepsilon_\rho(s_g) = -1$, le réel $\chi_0(g)$ est négatif. Cet élément $\rho(g)$ n'est donc pas positivement semiproximal.

c) D'après le point *a*), ρ et ρ' ont même signe. Il suffit alors d'utiliser le point *b*). □

5.4 Représentations semiproximales et produit tensoriel

Les deux lemmes suivants nous seront plusieurs fois utile pour réduire certaines démonstrations au cas où G est quasisimple (i.e. au cas où $\mathfrak{g}$ est simple).

Lemme 5.5 *a) Soient $\mathbf{G} = \mathbf{G}' \times \mathbf{G}''$ le produit de deux $\mathbb{R}$-groupes réductifs connexes et (V, ρ) une représentation réelle irréductible de G. Alors, il existe des représentations réelles irréductibles (V', ρ') de G' et (V'', ρ'') de G'' telles que l'on soit dans l'un des deux cas suivants:*

1. ρ' ou ρ'' est absolument[6] irréductible, on a $V = V' \otimes_{\mathbb{R}} V''$ et $\rho = \rho' \otimes_{\mathbb{R}} \rho''$.

2. V' et V'' ont une structure complexe invariante, on a $V = V' \otimes_{\mathbb{C}} V''$ et $\rho = \rho' \otimes_{\mathbb{C}} \rho''$.

b) En outre.

- La représentation ρ est proximale si et seulement si ρ' et ρ'' le sont.

- La représentation ρ est semiproximale si et seulement si ρ' et ρ'' le sont.

- La représentation ρ est positivement G-semiproximale si et seulement si ρ' et ρ'' le sont.

c) Soit Γ un sous-groupe Zariski-dense de G. Si deux des trois représentations ρ, ρ' et ρ'' sont positivement Γ-semiproximales alors la troisième aussi.

Remarques - La représentation ρ est absolument irréductible si et seulement si ρ' et ρ'' sont absolument irréductibles.

- Dans le point c), on a implicitement prolongé ρ' et ρ'' en des représentations de G triviales respectivement sur G'' et G'.

Démonstration a) C'est bien connu. On prend pour V' un sous-G'-module simple de V et pour V'' le G''-module simple $V'' := \mathrm{Hom}_{G'}(V', V)$. On a alors une surjection G-équivariante $V' \otimes_{\mathbb{R}} V'' \to V$. On distingue deux cas selon que ce produit tensoriel est simple ou non.

b) et c) Cela résulte des définitions. □

Le lemme suivant sera souvent utilisé de façon implicite.

Lemme 5.6 *Soient $\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ un $\mathbb{R}$-morphisme surjectif entre $\mathbb{R}$-groupes réductifs, Γ un sous-groupe Zariski dense de G, $\Gamma' := \pi(\Gamma)$, (V, ρ') une représentation réelle irréductible de G' et $\rho := \rho' \circ \pi$. Alors, la représentation (V, ρ') est positivement Γ'-semiproximale si et seulement si (V, ρ) est positivement Γ-semiproximale.*

Démonstration L'implication directe est claire car tout élément loxodromique g de G a une image $\pi(g)$ loxodromique dans G'.

[6] i.e. la représentation complexifiée est aussi irréductible.

La difficulté pour la réciproque vient de ce que certains éléments non loxodromiques g de G ont des images $\pi(g)$ loxodromiques dans G'. On contourne facilement cette difficulté en construisant dans Γ, à l'aide du fait 2.2.d et du corollaire 8.5, un sous-semigroupe Zariski-dense Δ de Γ dont tous les éléments sont loxodromiques et tel que $S_\Delta = S_\Gamma$. Il suffit alors d'utiliser le lemme 5.4.b. $\square$

5.5 Dimension des représentations semiproximales

Le lemme suivant nous permettra de remplacer certaines représentations semi-proximales par des représentations proximales.

Lemme 5.7 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe semisimple connexe et simplement connexe et* (V, ρ) *une représentation réelle irréductible semiproximale de* G.

Si ρ *n'est pas proximale, alors il existe une représentation réelle irréductible proximale* (V', ρ') *de* G *qui a même signe que* ρ *et telle que* $\dim V' < \dim V$.

Pour la démontration, nous utiliserons le lemme suivant. Rappelons que $\Pi' = \Pi_\mathbb{C} \cap \mathfrak{a}^*$. Pour tout élément $\chi = \sum_{\alpha\in\Pi_\mathbb{C}} n_\alpha \omega_\alpha$ de $P_\mathbb{C}$, on note $\dot\chi := \frac{1}{2}(\chi + \overline{\chi})$ et $\chi' := \sum_{\alpha\in\Pi'} n_\alpha\omega_\alpha$.

Lemme 5.8 *a) Si* χ *est dans* $P_{\mathbb{C},+}$*, alors* χ' *est dans* P'_+.
b) Si χ *est dans* $R_0 + P'$*, alors* $\dot\chi - \chi'$ *est dans* $2P$.

Démonstration du lemme 5.8 a) Par construction, χ' est dans $P_\mathbb{C}^+ \cap \mathfrak{a}^*$.

b) Par linéarité, on peut supposer que χ est dans R_0 ou dans P'.

$\star$ Supposons que χ soit dans R_0. Pour tout α dans $\Pi_\mathbb{C} \cap \mathfrak{a}^*$, on a $<\chi, \alpha> = 0$. On a donc $\dot\chi = \chi' = 0$ et $\dot\chi - \chi'$ est dans $2P$.

$\star$ Supposons que χ soit dans P'. On a $\dot\chi = \chi$. On peut supposer que χ est un des éléments de la base de P' donnée dans le lemme 4.5. On utilise alors le lemme 4.6 pour comparer cette base à celle de $2P$:

- Si $\chi = \omega_\alpha$ avec α dans Π'. On a $\chi' = \chi$ et $\dot\chi - \chi' = 0$ est dans $2P$.
- Si $\chi = \omega_\alpha$ avec α dans $\Pi_1 - \Pi'$. On a $\chi' = 0$ et $\dot\chi - \chi' = \omega_\alpha = 2\pi_{\dot\alpha}$ est dans $2P$.
- Si $\chi = \omega_\alpha + \overline{\omega_\alpha}$ avec α dans Π_2. On a $\chi' = 0$ et $\dot\chi - \chi' = \omega_\alpha + \overline{\omega_\alpha} = 2\pi_{\dot\alpha}$ est dans $2P$. $\square$

Démonstration du lemme 5.7

Notons χ le plus haut poids d'une sous-représentation irréductible complexe W de $V_\mathbb{C}$. Le plus haut poids restreint de ρ est donc égal à $\dot\chi$. Prenons pour (V', ρ') la représentation irréductible proximale de plus haut poids restreint χ'. C'est possible, car d'après le lemme 5.8.a, le caractère χ' est dans P'_+.

D'après les lemmes 5.2.a, 5.4.a et 5.8.b, les deux représentations ρ et ρ' sont de même signe. En outre, par construction, la différence $\chi - \chi'$ est dans $P_{\mathbb{C},+}$. Rappelons la formule de la dimension de Weyl (théorème 3 p.75 de [14])

$$\dim_\mathbb{C} W = \prod_{\alpha\in\Sigma_\mathbb{C}^+} \frac{< \chi + \delta, \alpha >}{< \delta, \alpha >}$$

avec $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Sigma^+_{\mathbb{C}}} \alpha$. Des inégalités $0 < <\chi' + \delta, \alpha> \leq <\chi + \delta, \alpha>$, pour α dans $\Sigma^+_{\mathbb{C}}$, on déduit la majoration $\dim V' = \dim_{\mathbb{C}} V'_{\mathbb{C}} < \dim_{\mathbb{C}} W \leq \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim V$. □

5.6 Dimension des représentations semiproximales positives

Même si $\mathfrak{g}$ est simple et non compacte, il se peut que la seule représentation ρ' dont le lemme 5.7 assure l'existence soit la représentation triviale $V' = \mathbb{R}$.

Le corollaire 5.10 ci-dessous permettra de contourner cette difficulté.

Voici un tel exemple (on peut montrer que c'est le seul !): avec les notations de [18] p.518 et 534, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-5)}$ et (V, ρ) est la représentation absolument irréductible dont la complexifiée a pour plus haut poids $\chi := 2\omega_7 = \alpha_7 + \omega_6$. La représentation ρ est positivement G-semiproximale alors que la représentation irréductible positivement G-proximale non triviale de dimension minimale (V'', ρ'') de G a pour plus haut poids restreint ω_6. Et on a $\dim V = 1463 \leq \dim V'' = 1539$.

Remarquons que dans cet exemple, on a $\dim G/K = 64$ ...

Lemme 5.9 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe quasisimple connexe et simplement connexe,* K *un sous-groupe compact maximal de* G *et* (V, ρ) *une représentation réelle irréductible semiproximale de* G *vérifiant l'inégalité*

$$\dim V - 1 \leq \dim G/K$$

Alors ρ *est proximale.*

Démonstration Par hypothèse, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple.

1$^{\text{er}}$ cas : $\mathfrak{g}$ *est compacte.*
Autrement dit, on a $\dim(G/K) = 0$. Donc ρ est triviale.

2$^{\text{ème}}$ cas : $\mathfrak{g}$ *est quasidéployée.*
Autrement dit, le groupe M est commutatif et $R_0 = \{0\}$. Donc ρ est proximale.

3$^{\text{ème}}$ cas : $\mathfrak{g}$ *n'est ni compacte ni quasidéployée.*
Dressons la liste de ces algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ en utilisant [18]. Pour chacune d'elles, on va déterminer toutes les représentations réelles irréductibles non triviales (V, ρ) telles que $\dim V - 1 \leq \dim G/K$. Nous verrons qu'il y en a très peu. Pour chacune d'elles, nous vérifierons que ρ est proximale ou que ρ n'est pas semiproximale.

Pour cela, on notera W une sous-représentation complexe irréductible de $V_{\mathbb{C}}$. On remarquera que la dimension sur $\mathbb{C}$ de W est majorée par $\dim V \leq \dim G/K + 1$ et même par $\frac{1}{2} \dim V \leq \frac{1}{2}(\dim G/K + 1)$ lorsque W n'admet pas de forme réelle.

⋆ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ avec $n \geq 2$. Dans ce cas, on a
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$ et $\dim G/K = 2n^2 - n - 1$.

- ρ est la représentation naturelle, de dimension $4n$, dans $V = \mathbb{H}^n$ ou celle, de dimension $2n^2 - n$, dans l'espace vectoriel V des matrices $n \times n$ hermitiennes à coefficients dans $\mathbb{H}$, représentation donnée par, pour tout g dans G et M dans V, $\rho(g)(M) = gM^t\overline{g}$ ou encore une représentation duale de celles-ci.

Dans cet exemple, on peut prendre pour $\mathfrak{a}^+$ le cône des matrices diagonales à coefficients réels et décroissants. L'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ s'identifie alors à $\mathfrak{sl}(1,\mathbb{H})^n$.

La première représentation n'est pas semiproximale car $V^{\mathfrak{n}} = \mathbb{H} \times 0 \times \cdots \times 0$.

La deuxième représentation est proximale car $V^{\mathfrak{n}}$ est formé des matrices hermitiennes dont tous les coefficients sont nuls sauf le premier qui est réel.

$\star$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,q)$ avec $1 \le p < q$. Dans ce cas, on a
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ avec $n = p+q$ et $\dim G/K = 2pq \le \frac{1}{2}n^2$.
- ρ est la représentation naturelle[7], de dimension $2n$, dans $\mathbb{C}^n$. Et n'est pas semiproximale.

$\star$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p,q)$ avec $1 \le p \le q$. Dans ce cas, on a
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ avec $n = p+q$ et $\dim G/K = 4pq \le n^2$.
- ρ est la représentation naturelle, de dimension $4n$, dans $\mathbb{C}^{2n}$. Et n'est pas semiproximale.

$\star$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,q)$ avec[8] $1 \le p \le q-3$ et $q \ge 5$. Dans ce cas, on a
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ avec $n = p+q$ et $\dim G/K = pq \le \frac{1}{4}(n^2-9)$.
- ρ est la représentation naturelle, de dimension n, dans $V = \mathbb{R}^n$.

Cette représentation est proximale car $V^{\mathfrak{n}}$ est une droite isotrope.

$\star$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}^*(2n)$ avec $n \ge 6$. Dans ce cas, on a
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ et $\dim G/K = n^2 - n$.
- ρ est la représentation naturelle, de dimension $4n$, dans $\mathbb{H}^n$. Et n'est pas semiproximale.

$\star$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$. Dans ce cas, on a
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_6$ et $\dim G/K = 32$.
- Il n'existe pas[9] de telle représentation ρ.

$\star$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-26)}$. Dans ce cas, on a
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_6$ et $\dim G/K = 26$.
- ρ est la représentation de dimension 27. Son plus haut poids $\chi = \omega_1$ est dans $\mathfrak{a}^*$. Cette représentation est donc proximale.

$\star$ $\mathfrak{g}$ de type[10] $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$ ou $\mathfrak{f}_4$. Dans ce cas, il n'existe pas de telle représentation ρ car la représentation de dimension minimale est l'adjointe. $\square$

Corollaire 5.10 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe semisimple connexe et simplement connexe,* K *un sous-groupe compact maximal de* G *et* (V,ρ) *une représentation réelle irréductible de*

[7] Noter que la représentation complexe dans $W := \Lambda^2\mathbb{C}^n$ n'a pas de forme réelle.

[8] Noter que pour $q = p$, $p+1$ ou $p+2$, $\mathfrak{so}(p,q)$ est quasidéployée et que $\mathfrak{so}(1,4) \simeq \mathfrak{sp}(1,1)$.

[9] Noter que la représentation complexe de dimension 27 de $\mathfrak{e}_6$ n'admet pas de forme réelle sur $\mathfrak{e}_{6(-14)}$.

[10] Noter que l'unique forme réelle non compacte de $\mathfrak{g}_2$ est déployée.

G dont le noyau est fini et qui est positivement G-semiproximale . Alors on a l'inégalité

$$\dim G/K \leq \dim V - 1$$

En outre, en cas d'égalité, la représentation ρ est positivement G-proximale et G agit proprement et transitivement sur un ouvert proprement convexe G-invariant Ω de $\mathbb{P}(V)$.

Démonstration Si G n'est pas quasisimple, on procède par résurrence sur $\dim G$ en écrivant comme dans le lemme 5.5, $G = G' \times G''$ et $V = V' \otimes_{\mathbb{K}} V''$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et avec $2 \leq \dim_{\mathbb{K}} V' \leq \dim_{\mathbb{K}} V''$. On a alors

$$\dim G/K \leq (\dim V' - 1) + (\dim V'' - 1) \leq 2 \dim V'' - 1 \leq \dim V - 1 \ .$$

On peut donc supposer que G est quasisimple. D'après le fait 2.9.a et le lemme 5.9, on peut aussi supposer que la représentation (V, ρ) est G-proximale. Elle est alors positivement G-proximale et, d'après le fait 2.9.b appliqué au groupe G, le groupe G préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}(V)$. Comme l'action de G sur Ω est propre, on a donc $\dim G/K \leq \dim V - 1$ avec égalité si et seulement si Ω est homogène sous G. □

Pour évaluer le chemin que nous avons parcouru, terminons cette partie en donnant la

Démonstration de la proposition 3.4 lorsque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est simple et ρ irréductible :
Rappelons que cette représentation ρ est positivement Γ-semiproximale et distinguons deux cas :

1$^{\text{er}}$ cas : *ρ est positivement G-semiproximale.*
Comme la représentation ρ est irréductible et de noyau fini, la composante déployée du centre de $\mathbf{G}$ est de dimension au plus 1. Le fait 2.6 et le corollaire 5.10 (appliqué au groupe $[\mathbf{G}, \mathbf{G}]$) prouvent alors que l'on a les inégalités

$$\mathrm{vcd}\Gamma \leq \dim G/K \leq 1 + dim[G,G]/([G,G] \cap K) \leq \dim V \ .$$

La première inégalité est une égalité si et seulement si Γ est cocompact dans G. Par le corollaire 5.10, les deux autres inégalités sont des égalités si et seulement si G agit proprement et transitivement sur un cône ouvert proprement convexe G-invariant C de V.

2$^{\text{ème}}$ cas : *ρ n'est pas positivement G-semiproximale.*
D'après le corollaire 5.1, la représentation ρ est semiproximale. La représentation proximale (V', ρ') donnée par le lemme 5.7 a un noyau fini car $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est simple et car ρ' n'est pas positivement G-proximale. Cette représentation ρ' est positivement Γ-proximale. D'après le fait 2.9.b, Γ préserve un cône ouvert proprement convexe C' de V'. On a donc par le fait 2.6,

$$\mathrm{vcd}\Gamma \leq \dim C' = \dim V' < \dim V \ . \qquad \square$$

6 Représentations positivement Γ-semiproximales

Le but de cette partie est de montrer la proposition 3.4.

Les trois premières sections permettront de supposer que toutes les sous-représentations irréductibles de ρ sont positivement Γ-semiproximales.

6.1 Discrétude de la projection d'un groupe discret

Lemme 6.1 *Soient $p : \mathbf{G} \to \mathbf{G_1}$ un $\mathbb{R}$-morphisme surjectif entre $\mathbb{R}$-groupes réductifs connexes et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. On note $\mathbf{G}_0 := \mathrm{Ker}\, p$, $\mathfrak{g}_0 :=$ Lie(G_0), $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_0^+ := \mathfrak{a}^+ \cap \mathfrak{g}_0$ et ℓ_Γ le cône limite de Γ.*
Si on a $\ell_\Gamma \cap \mathfrak{a}_0^+ = \{0\}$, alors le noyau $\Gamma \cap G_0$ est fini et l'image $p(\Gamma)$ est discrète dans G_1.

Démonstration Notons $\mu_G : G \to \mathfrak{a}^+$ la projection de Cartan de G. C'est l'application donnée par, pour tout g dans G, $g \in K \exp(\mu_G(g))K$. Notons $dp : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ la différentielle de p et $\mathfrak{a}_1^+$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{g}_1$ donnée par $\mathfrak{a}_1^+ := dp(\mathfrak{a}^+)$.

Comme le cône ℓ_Γ est le cône asymptote à $\mu_G(\Gamma)$ (théorème 1.2.a de [2]) et que μ_G est propre, notre hypothèse assure que l'application $dp \circ \mu_G : \Gamma \to \mathfrak{a}_1^+$ est propre. Comme on a $dp \circ \mu_G = \mu_{G_1} \circ p$, on en déduit que la restriction $p|_\Gamma$ de p à Γ est propre. Elle a donc un noyau fini et une image discrète. $\square$

6.2 Représentations

Voici une propriété bien connue des représentations irréductibles des groupes semisimples dont nous aurons besoin.

Lemme 6.2 *Soient $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe semisimple connexe et (V, ρ) une représentation réelle irréductible de G dont le noyau est fini. On note $\lambda \in P_+$ le plus haut poids restreint de V. Alors, pour tout X dans $\mathfrak{a}^+ - \{0\}$, on a $\lambda(X) > 0$.*

Démonstration On se ramène au cas où $\mathfrak{g}$ est simple. Dans ce cas, l'angle (pour un produit scalaire W-invariant) entre deux vecteurs de $\mathfrak{a}^+$ est toujours strictement inférieur à $\pi/2$. $\square$

6.3 Les composantes irréductibles de V

Voici un critère qui permet de repérer si une sous-représentation irréductible d'une représentation positivement Γ-semiproximale est aussi positivement Γ-semiproximale.

Lemme 6.3 *Avec les notations et hypothèses de la proposition 3.4. On décompose (V, ρ) en une somme directe de représentations irréductibles: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_t$. On note ℓ_Γ le cône limite de Γ, ℓ_Γ^* son cône dual : $\ell_\Gamma^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \ / \ \lambda(\ell_\Gamma) \subset [0, \infty[\}$ et λ_i le plus haut poids restreint de ρ_i.*

On suppose que λ_1 n'est pas dans l'enveloppe convexe de l'union $\bigcup_{2 \leq j \leq t} \lambda_j - \ell_\Gamma^*$. $\qquad (*)$

Alors, ρ_1 est positivement Γ-semiproximale.

Démonstration Comme le cône ℓ_Γ est convexe (fait 2.2.b), l'hypothèse $(*)$ et le théorème de Hahn-Banach assurent que le cône ouvert

$$\omega := \{X \in \mathfrak{a} \,/\, \forall j = 2, \cdots, t,\ \lambda_1(X) > \lambda_j(X)\}$$

rencontre ℓ_Γ. Choisissons alors un sous-semigroupe ouvert G' de G qui rencontre Γ et dont le cône limite $\ell_{G'}$ est inclus dans ω (fait 2.2.c) et notons $\Gamma' := \Gamma \cap G'$.

Comme ρ est positivement Γ-semiproximale, pour tout élément loxodromique g de Γ', l'élément $\rho(g)$ est positivement semiproximal. Comme $\ell(g)$ est dans ω, le rayon spectral de $\rho(g)$ est égal à $\lambda_1(\ell(g))$ et le sous-espace propre associé à cette valeur propre est inclus dans V_1. Donc $\rho_1(g)$ est positivement semiproximal.

Ceci prouve que ρ_1 est positivement Γ'-semiproximale. Donc, d'après le lemme 5.4.b, le groupe des signes $S_{\Gamma'}$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(\varepsilon_{\rho_1})$. On en déduit, à l'aide du corollaire 8.5.b que l'on a $S_\Gamma = S_{\Gamma'} \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon_{\rho_1})$. Le même lemme 5.4.b permet alors de conclure que ρ_1 est positivement Γ-semiproximale. $\square$

6.4 La réduction au cas où G est semisimple

Pour démontrer la proposition 3.4, nous nous ramènerons au cas où G est semisimple. Dans ce cas, on a une estimation un peu plus précise de $\mathrm{vcd}(\Gamma)$:

Proposition 6.4 *Soient* **G** *un $\mathbb{R}$-groupe semisimple connexe et Γ un sous-groupe discret, de type fini et Zariski dense de G. Soient (V, ρ) une représentation réelle de G de noyau fini et t la longueur de V. On décompose (V, ρ) en une somme directe de représentations irréductibles: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_t$. On suppose que ρ est positivement Γ-semiproximale.*

Alors on a l'inégalité $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \dim V - t$.

Avec égalité si et seulement si Γ préserve un produit $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_t$ d'ouverts proprement convexes Ω_i de $\mathbb{P}(V_i)$ et le quotient $\Gamma \backslash (\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_t)$ est compact. Dans ce cas, les représentations ρ_i sont proximales.

On déduit aisément de cette proposition le corollaire :

Corollaire 6.5 *On reprend les notations et hypothèses de la proposition 6.4.*

On a l'inégalité $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \dim V - 1$.

Avec égalité si et seulement si la représentation ρ est irréductible et le groupe discret $\rho(\Gamma)$ divise un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}(V)$.

Nous démontrerons cette proposition 6.4 dans la section 6.5. Auparavant montrons comment celle-ci implique la proposition 3.4.

Montrons que la proposition 6.4 implique la proposition 3.4.

Supposons par l'absurde que cette proposition 3.4 soit fausse, choisissons un contre-exemple G, Γ, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_t$ avec $\dim V$ minimal et étudions cette représentation (V, ρ) de G qui a un noyau fini et qui est positivement Γ-semiproximale.

Étape 1 *Pour tout $i = 1, \ldots, t$, ρ_i est positivement Γ-semiproximale.*

Démonstration On peut supposer que $i = 1$. Notons G_0 le noyau de la représentation $\rho' := \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_t$ et $\mathfrak{a}_0^+ := \mathfrak{a}^+ \cap \mathfrak{g}_0$. On a $\ell_\Gamma \cap \mathfrak{a}_0^+ \neq \{0\}$. En effet, si cette intersection était nulle, d'après le lemme 6.1, le groupe $\Gamma \cap G_0$ serait fini et l'image $p(\Gamma)$ de Γ dans le groupe G/G_0 serait discrète. Mais alors G/G_0, $p(\Gamma)$ et ρ' fourniraient un contre-exemple avec $\dim(\rho') < \dim(\rho)$. Ce qui contredirait la minimalité de ρ.

Notons alors X un élément non nul de $\ell_\Gamma \cap \mathfrak{a}_0^+$, remarquons que, pour tout $j = 2, \ldots, t$ on a $\lambda_j(X) = 0$ et distinguons deux cas :

1^er^ cas : *X est dans le centre de $\mathfrak{g}_0$.*
Comme la représentation de G_0 dans V_1 est de noyau fini, on a $\lambda_1(X) \neq 0$. Alors que, pour $j \geq 2$, on a $\lambda_j(X) = 0$. Comme $-X$ est aussi dans ℓ_Γ, λ_1 n'est pas dans l'enveloppe convexe de l'union $\displaystyle\bigcup_{2 \leq j \leq t} \lambda_j - \ell_\Gamma^*$ et, d'après le lemme 6.3, ρ_1 est positivement Γ-semiproximale.

2^ème^ cas : *X n'est pas dans le centre de $\mathfrak{g}_0$.*
Notons w_0 l'élément le plus long du groupe de Weyl W. Comme Γ est un groupe, $-w_0(X)$ est aussi dans ℓ_Γ. Comme ℓ_Γ est convexe, l'élément $Y := X - w_0(X)$ est dans ℓ_Γ. Cet élément Y est non nul et est dans $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Comme la représentation de $[G_0, G_0]$ dans V_1 est de noyau fini, il résulte du lemme 6.2 que l'on a $\lambda_1(Y) > 0$. Alors que, pour $j \geq 2$, on a $\lambda_j(Y) = 0$. Donc λ_1 n'est pas dans l'enveloppe convexe de l'union $\displaystyle\bigcup_{2 \leq j \leq t} \lambda_j - \ell_\Gamma^*$ et, d'après le lemme 6.3, ρ_1 est positivement Γ-semiproximale. $\square$

Étape 2 $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \dim V$. *Cas d'égalité.*

Démonstration On peut supposer que $\mathbf{G} = \mathbf{Z} \times \mathbf{S}$ où $\mathbf{S} := [\mathbf{G}, \mathbf{G}]$. Notons Δ la projection de Γ sur S. D'après le fait 2.4, le groupe Δ est discret. D'après la première étape, la représentation de S dans chaque V_i est positivement Δ-semiproximale. La proposition 6.4 appliquée à Δ donne la majoration

$$\mathrm{vcd}(\Delta) \leq \dim V - t \; . \tag{1}$$

Comme la représentation de G dans V est de noyau fini, on a les inégalités

$$\mathrm{vcd}(\Gamma \cap Z) \leq \mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(Z) \leq t \; . \tag{2}$$

La proposition 6 de [24] appliquée à la suite exacte $1 \to \Gamma \cap Z \to \Gamma \to \Delta \to 1$ donne alors la majoration

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \mathrm{vcd}(\Gamma \cap Z) + \mathrm{vcd}(\Delta) \leq \dim V \; . \tag{3}$$

En cas d'égalité dans (3), on a aussi égalité dans (1) et (2), et les représentations ρ_i sont proximales (proposition 6.4). Elles sont donc positivement Γ-proximales. Le groupe Γ préserve donc un cône ouvert proprement convexe C_i dans chaque V_i. Comme on a $\mathrm{vcd}(\Gamma) = \dim V$, le groupe Γ divise le produit $C := C_1 + \cdots + C_t$. □

Ceci fournit une contradiction et termine la démonstration de cette implication. □

6.5 Proximalité des sous-représentations V_i

Démonstration de la proposition 6.4 De la même façon, supposons par l'absurde que cette proposition 6.4 soit fausse, choisissons un contre-exemple G, Γ, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_t$ avec $\delta(\rho) := \dim V - t$ minimal et étudions cette représentation (V, ρ) de G qui a un noyau fini et qui est positivement Γ-semiproximale. On peut supposer que le $\mathbb{R}$-groupe semisimple $\mathbf{G}$ est simplement connexe et que les sous-espaces V_i sont de dimension au moins 2. On a alors $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_s$ où les $\mathbf{G}_k$ sont les facteurs quasisimples de $\mathbf{G}$.

Étape 1 *Pour tout $i = 1, \ldots, t$, ρ_i est positivement Γ-semiproximale.*

Démonstration C'est la même que pour l'étape 1 de la section 6.4. □

Introduisons maintenant la propriété suivante pour la représentation ρ_i :

Il existe $k \in \{1, \ldots, s\}$ tel que la restriction $\rho_i|_{G_k}$
est positivement G_k-semiproximale mais n'est pas triviale. $(**)$

Étape 2 *Soit $i \in \{1, \ldots, t\}$. Si ρ_i vérifie $(**)$, alors $\rho_i|_{G_k}$ est irréductible et, pour tout $j \neq i$, on a $G_k \subset \mathrm{Ker}\rho_j$.*

Démonstration On peut supposer que $i = k = 1$. Notons $G'_1 := G_2 \times \cdots \times G_s$ et écrivons $G = G_1 \times G'_1$. D'après le lemme 5.5.a, on peut écrire $V_1 = W_1 \otimes_{\mathbb{K}} W'_1$ et $\rho_1 = \sigma_1 \otimes_{\mathbb{K}} \sigma'_1$ où (W_1, σ_1) est une représentation de G_1 et (W'_1, σ'_1) est une représentation de G'_1 et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Supposons par l'absurde que $\dim W'_1 > 1$. Comme on a aussi $\dim W_1 > 1$, on en déduit l'inégalité $\dim W_1 + \dim W'_1 \leq \dim V_1$. Comme ρ_1 est positivement Γ-semiproximale (étape 1) et que σ_1 est positivement G-semiproximale (hypothèse $(**)$), on en déduit, à l'aide du lemme 5.5.c que σ'_1 est positivement Γ-semiproximale. La représentation $\rho' := \sigma_1 \oplus \sigma'_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_t$ est un contre-exemple avec $\delta(\rho') < \delta(\rho)$. Ce qui contredit la minimalité de ρ. Ceci prouve que $\dim W'_1 = 1$ et donc que $\rho_1|_{G_1}$ est irréductible.

Montrons maintenant que l'action de G_1 sur $V_2 \oplus \cdots \oplus V_t$ est triviale : si ce n'était pas le cas, la représentation $\rho' := \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_t$ aurait encore un noyau fini dans G et serait un contre-exemple avec $\delta(\rho') < \delta(\rho)$. Ce qui contredirait la minimalité de ρ. □

Étape 3 *Soit $i \in \{1, \ldots, t\}$. Si ρ_i ne vérifie pas $(**)$, alors ρ_i est positivement Γ-proximale.*

Démonstration Supposons par l'absurde que ρ_i n'est pas proximale. Il existe donc un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que les sous-représentations irréductibles de $\rho_i|_{G_k}$ ne soient pas proximales. On peut supposer que $i = k = 1$. Notons encore $G'_1 := G_2 \times \cdots \times G_s$ et écrivons, comme précédemment, $G = G_1 \times G'_1$, $V_1 = W_1 \otimes_{\mathbb{K}} W'_1$ et $\rho_1 = \sigma_1 \otimes_{\mathbb{K}} \sigma'_1$ où (W_1, σ_1) est une représentation de G_1 et (W'_1, σ'_1) est une représentation de G'_1 et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Comme σ_1 n'est pas proximale, le lemme 5.7 permet de trouver une représentation irréductible proximale $(\sigma_1^{\mathrm{bis}}, W_1^{\mathrm{bis}})$ de même signe que σ_1 et de dimension strictement plus petite. Comme ρ_1 ne vérifie pas $(**)$, la représentation σ_1 n'est pas positivement G_1-semiproximale et σ_1^{bis} non plus. En particulier, σ_1^{bis} a un noyau fini dans G_1. Par construction, la représentation $\rho_1^{\mathrm{bis}} := \sigma_1^{\mathrm{bis}} \otimes \sigma'_1$ a même signe que ρ_1, elle est donc positivement Γ-semiproximale (lemme 5.4). La représentation $\rho' := \rho_1^{\mathrm{bis}} \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_t$ a encore un noyau fini dans G et est un contre-exemple avec $\delta(\rho') < \delta(\rho)$. Ce qui contredit la minimalité de ρ. $\square$

Grâce à ces trois étapes, on peut choisir les numérotations $G_1, \ldots, G_s$ et $V_1, \ldots, V_t$ ainsi qu'un entier $t' \leq t$ de sorte que, en notant

$$G' = G_1 \times \cdots \times G_{t'} \ \ , \ \ V' = V_1 \times \cdots \times V_{t'} \ ,$$

$$G'' = G_{t'+1} \times \cdots \times G_s \ \text{ et } \ V'' = V_{t'+1} \times \cdots \times V_t \ ,$$

1. pour $i \leq t'$, ρ_i est une représentation irréductible de G_i qui est positivement G_i-semiproximale et
2. pour $i > t'$, ρ_i est une représentation irréductible de G'' qui ne vérifie pas $(**)$ et qui est positivement Γ-proximale.

Étape 4 *L'image Γ'' de Γ dans G'' est discrète.*

Démonstration Si ce n'était pas le cas, l'adhérence $\overline{\Gamma''}$, qui est un sous-groupe fermé et Zariski dense de G'', contiendrait un des facteurs quasisimples G_k avec $k > t'$. Choisissons alors un entier $i > t'$ tel que la représentation ρ_i ne soit pas triviale sur G_k. Comme ρ_i est positivement Γ-proximale, Γ'' préserve un ouvert proprement convexe Ω_i de $\mathbb{P}(V_i)$ (fait 2.9.b). Mais alors, $\overline{\Gamma''}$ puis G_k préservent aussi Ω_i et ρ_i est aussi positivement G_k-proximale. Autrement dit, ρ_i vérifie $(**)$. Contradiction. $\square$

Étape 5 $\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \dim V - t$. *Cas d'égalité.*

Démonstration Notons K' et K_i des sous-groupes compacts maximaux de G' et G_i. Le fait 2.6 appliqué au sous-groupe discret $\Gamma' := \Gamma \cap G'$ et le corollaire 5.10 appliqué aux représentations positivement G_i-semiproximales ρ_i donnent les majorations

$$\mathrm{vcd}(\Gamma') \leq \dim(G'/K') = \sum_{1 \leq i \leq t'} \dim(G_i/K_i) \leq \sum_{1 \leq i \leq t'} (\dim V_i - 1) \leq \dim V' - t' \ . \qquad (4)$$

D'autre part, comme chaque ρ_i, avec $i > t'$ est positivement Γ-proximale, le groupe Γ'' préserve un produit

$$\Omega'' = \Omega_{t'+1} \times \cdots \times \Omega_t \subset \mathbb{P}(V_{t'+1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_t)$$

d'ouverts proprement convexes Ω_i de $\mathbb{P}(V_i)$ (fait 2.9.b). Comme Γ'' préserve la métrique somme des métriques de Hilbert des Ω_i, l'action de Γ'' sur Ω'' est propre et on a la majoration

$$\mathrm{vcd}(\Gamma'') \leq \dim \Omega'' = \dim V'' - (t - t') \ . \tag{5}$$

La proposition 6 de [24] appliquée à la suite exacte $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ donne alors la majoration

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) \leq \mathrm{vcd}(\Gamma') + \mathrm{vcd}(\Gamma'') \leq \dim V - t \ . \tag{6}$$

En cas d'égalité dans (6), on a aussi égalité dans (4) et (5), toutes les représentations ρ_i, pour $i \leq t'$, sont positivement G_i-proximales (corollaire 5.10) et le groupe G' préserve un produit

$$\Omega' = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{t'} \subset \mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{t'})$$

d'ouverts proprement convexes Ω_i de $\mathbb{P}(V_i)$ (fait 2.9.b). Le groupe Γ préserve alors le produit $\Omega := \Omega' \times \Omega''$. Comme on a $\mathrm{vcd}(\Gamma) = \dim \Omega$, le quotient $\Gamma \backslash \Omega$ est compact. □

On déduit de cette étude que G, Γ, V, ρ n'est pas un contre-exemple à la proposition 6.4. Cette contradiction termine la démonstration de cette proposition 6.4. □

Ceci termine aussi la démonstration des propositions 1.3 et 3.4.

7 Limites de cônes convexes divisibles réductibles

Le but de cette partie est de décrire l'adhérence des espaces de déformations[11] $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$, pour tout groupe Γ_0 sans hypothèse sur le centre virtuel de Γ_0, c'est-à-dire sans hypothèse d'irréductibilité des cônes (théorème 7.9).

Nous construisons tout d'abord quelques exemples de convexes divisibles en 7.1 et quelques exemples d'éléments ρ_∞ de $\overline{\mathcal{E}_{\Gamma_0}}$ en 7.2.

Nous montrons en 7.3 la réciproque du théorème 1.1 : Pour tout groupe Δ_0, la condition "Δ_0 *à centre virtuel trivial*" est aussi une condition nécessaire pour la fermeture de l'espace $\mathcal{F}_{\Delta_0}$, lorsque celui-ci est non vide.

Nous vérifions en 7.4 que la liste des dimensions des facteurs irréductibles d'un cône ouvert proprement convexe C divisé par l'image d'un élément ρ de $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ ne dépend pas du choix de ρ dans $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$. En particulier, le nombre n_{Γ_0} de facteurs de dimension 1 de C ne dépend que de Γ_0.

La dernière section 7.5 est consacrée à la description des éléments ρ_∞ de $\overline{\mathcal{E}_{\Gamma_0}}$. Nous montrons que les seules dégénérescences possibles ont lieu sur le centre virtuel de Γ_0 et que le groupe $\rho_\infty(\Gamma_0)$ préserve encore un cône ouvert proprement convexe C'_∞ d'un sous-espace vectoriel V'_∞ de V de codimension n_{Γ_0} (théorème 7.9).

[11] L'espace de déformations $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ est défini en 1

7.1 Exemples de convexes divisibles

Rappelons comment sont construits les principaux exemples de convexes divisibles :

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^m$ de signature $(1, m-1)$, C_0 l'une des deux composantes connexes de $\{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \ / \ q(x) > 0\}$ et Ω_0 l'ellipsoïde image de C_0 dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$. Soit Δ_0 un réseau cocompact du groupe $\mathrm{SO}_e(q)$ des isométries directes de q qui préservent C_0.

Exemple 7.1 *Le groupe* $\Gamma_0 := 2^{\mathbb{Z}} \times \Delta_0$ *divise* C_0

Il existe d'autres cônes ouverts convexes divisibles. En effet, il résulte de [19], que l'on peut choisir notre réseau cocompact Δ_0 de sorte que l'injection ρ_0 de Δ_0 dans $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ puisse être déformée continument en une famille ρ_t de représentations de Δ_0 dans $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ de sorte que pour $t \neq 0$ le groupe $\rho_t(\Delta_0)$ soit Zariski dense dans $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$.

Exemple 7.2 *Les groupes* $\Gamma_t := 2^{\mathbb{Z}} \times \rho_t(\Delta_0)$ *sont discrets et divisent un cône ouvert proprement convexe* C_t *de* $\mathbb{R}^m$.

Démonstration Pour t suffisamment petit, cet exemple 7.2 résulte du théorème de Koszul dans [21] cité dans l'introduction. Le cas général résulte de notre théorème 1.1.□

7.2 Exemples de dégénérescence

Donnons quelques exemples qui illustrent bien les phénomènes de dégénérescence qui peuvent se produire dans $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ et dans $\mathcal{F}_{\Delta_0}$. Dans ces exemples, c'est la restriction de la représentation au centre virtuel que l'on fait dégénérer. Nous verrons que c'est la seule dégénérescence possible.

Dans le premier exemple la représentation limite n'est pas injective.

Exemple 7.3 *Soient* Δ_0 *un réseau cocompact du groupe* $\mathrm{SO}_e(m-1, 1)$ *et* $\Gamma_0 := \mathbb{Z} \times \Delta_0$. *Pour tout* $t \geq 1$, *prenons* $\rho_t : \Gamma_0 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ *la représentation égale à l'identité sur* Δ_0 *et telle que* $\rho_t(1) = t.Id$. *Pour* $t > 1$, ρ_t *est dans* $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$, *mais* ρ_1 *n'y est pas car* ρ_1 *n'est pas injective.*

Dans le deuxième exemple la représentation limite n'est pas discrète.

Exemple 7.4 *Soient* $m \geq 2$, $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^m$ *et* H *le groupe des matrices* $m \times m$ *diagonales à coefficients positifs. Tout réseau de* H *divise le cône* $]0, \infty[^m$. *Il est donc facile de construire une famille continue de morphismes injectifs de groupes* $\rho_t : \Gamma_0 \to H$, *avec* $t \geq 1$, *telle que, pour* $t > 1$, ρ_t *soit dans* $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$, *mais* ρ_1 *n'y soit pas car* $\rho_1(\Gamma_0)$ *n'est pas discret.*

Dans les exemples précédents, le cône ne bougeait pas. Dans l'exemple suivant c'est le cône qui dégénère.

Exemple 7.5 *Soient* $t \geq 1$, $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^2$ *et* $\rho_t : \Gamma_0 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ *le morphisme de groupes donné par*

$$\rho_t((1,0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \rho_t((0,1)) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} .$$

Les groupes $\Gamma_t := \rho_t(\Gamma_0)$ *sont discrets. Pour* $t > 1$, ρ_t *est dans* $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$, *mais* ρ_1 *n'y est pas car* $\rho_1(\Gamma_0)$ *ne préserve pas de cône ouvert proprement convexe de* $\mathbb{R}^2$.

Remarque Pour $t > 1$, ces groupes Γ_t divisent le cône C_t de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs $(1,0)$ et $(t, t^2 - 1)$. Lorsque $t \to 1$, ces cônes C_t convergent vers une demi-droite.

Terminons par un exemple de dégénérescence dans $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ pour un groupe Δ_0 à centre trivial.

Exemple 7.6 *Soit* $m \geq 2$, $t \geq 1$, $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^m \rtimes S_m$ *le produit semidirect de* $\mathbb{Z}^m$ *par le groupe des permutations et* $\Delta_0 := \{(n_1, \ldots, n_m, \sigma) \in \Gamma_0 \ / \ n_1 + \cdots + n_m = 0\}$ *et* $\rho_t : \Delta_0 \to \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$, *le morphisme de groupes donné par*

$$\rho_t((n_1, \ldots, n_m, \sigma)) = \mathrm{diag}(t^{n_1}, \ldots, t^{n_m}) \circ \sigma .$$

Pour $t > 1$, ρ_t *est dans* $\mathcal{F}_{\Delta_0}$, *mais* ρ_1 *n'y est pas car* ρ_1 *n'est pas injectif.*

7.3 Groupes à centre virtuel non trivial

Le but de cette partie est de montrer la réciproque suivante du théorème 1.1.

Proposition 7.7 *Soit* Δ_0 *un groupe. Si l'espace*[12] $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ *est un fermé non vide de* $\mathrm{Hom}(\Delta_0, \mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m))$, *alors* Δ_0 *a un centre virtuel trivial.*

Démonstration Relevons un élément de $\mathcal{F}_{\Delta_0}$ en une représentation $\rho : \Delta_0 \longrightarrow \mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^m)$ qui préserve un cône proprement convexe C de $V = \mathbb{R}^m$. Supposons que Δ_0 a un centre virtuel non trivial et cherchons une contradiction en déformant, comme dans l'exemple 7.6, cette représentation ρ en une représentation non injective. Pour plus de clarté, distinguons deux cas.

1^er^ cas : ρ *est irréductible.*
Notons $C = C_1 + \cdots + C_\ell$ la décomposition du cône C en produit de cônes irréductibles, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ la décomposition correspondante de V et $d_i = \dim V_i$. D'après le fait 2.12.b et le corollaire 2.13, l'hypothèse sur le centre virtuel de Δ_0 assure que l'on a $\ell \geq 2$. Chaque élément g de Δ_0 permute les facteurs C_i. Comme ρ est irréductible, on peut identifier chaque V_i à V_1 de sorte que, pour tout élément g de Δ_0, l'image $\rho(g)$ s'écrive

[12] Cet espace est défini dans l'introduction

comme un produit $\rho(g) = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_\ell) \circ \sigma$ d'une matrice diagonale par blocs et d'une matrice σ de permutation des indices. D'après le fait 2.12.d, le centre virtuel Z' de Δ_0 est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^{\ell-1}$. En outre, lorsque g est dans Z', les blocs g_i sont des homothéties positives et la permutation σ est l'identité.

Définissons alors une famille à un paramètre ρ_t de représentations de Δ_0 dans $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$ par, pour tout g dans Δ_0,

$$\rho_t(g) = \mathrm{diag}\left(\frac{g_1}{|\det g_1|^{t/d_1}}, \dots, \frac{g_\ell}{|\det g_\ell|^{t/d_\ell}}\right) \circ \sigma \ .$$

On a $\rho_0 = \rho$. Mais ρ_1 n'est pas injective car $\rho_1(Z') = \{1\}$. Contradiction.

2ème cas : *ρ n'est pas irréductible.*
On procède comme pour le premier cas. Notons cette fois $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ avec $\ell \geq 2$ la décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles et $d_i = \dim V_i$. D'après le fait 2.12.d, le centre Z de Δ_0 est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^{\ell-1}$ et les restrictions à chaque V_i des éléments de Z sont des homothéties positives.

Définissons alors une famille à un paramètre ρ_t de représentations de Δ_0 dans $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$ par, pour tout g dans Δ_0,

$$\rho_t(g) = \frac{\rho(g)}{|\det(\rho(g)|_{V_i})|^{t/d_i}} \quad \text{sur } V_i.$$

On a encore $\rho_0 = \rho$ et ρ_1 n'est pas injective car $\rho_1(Z) = \{1\}$. Contradiction. □

7.4 Dimension des facteurs irréductibles d'un convexe divisible

Nous avons déjà vu que lorsqu'un groupe Γ divise un cône proprement convexe C, la dimension de C et le nombre de facteurs irréductibles de C ne dépendent que du groupe abstrait (fait 2.12.d). La proposition suivante affirme qu'il en est de même pour les dimensions des facteurs irréductibles de C.

Proposition 7.8 *Soient Γ_0 un groupe, ρ et ρ' deux représentations fidèles discrètes de Γ_0 dont les images divisent respectivement des cônes proprement convexes C et C'. Soit $k \geq 1$. Notons $n_k(C)$ le nombre de facteurs irréductibles de dimension k du cône C. Alors on a $n_k(C) = n_k(C')$.*

Démonstration Quitte à remplacer Γ_0 par un sous-groupe d'indice fini, on peut, grâce au fait 2.12.d, supposer que Γ_0 est un produit $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^\ell \times \Delta_0$ où Δ_0 est un groupe sans torsion et sans sous-groupe distingué nilpotent infini.

Notons $C = C_1 + \cdots + C_\ell$ la décomposition du cône C en produit de cônes irréductibles, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ la décomposition correspondante de V, $\Omega_i := \mathbb{P}(C_i)$ les images de C_i dans $\mathbb{P}(V_i)$ et $d_i = \dim V_i$ avec $d_1 \geq \cdots \geq d_\ell$. Notons s le plus grand entier tel que $d_s \geq 2$. Il suffit de montrer que la suite $(d_1, \dots, d_s)$ ne dépend que de Δ_0.

D'après le théorème 1.1 de [6], l'adhérence de Zariski de $\rho(\Delta_0)$ dans $\mathrm{PGL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{PGL}(V_s)$ est un produit $S_1 \times \cdots \times S_s$ de groupes quasisimples avec $S_i \subset \mathrm{PGL}(V_i)$. On en déduit que si Δ_0 est un produit $\Delta_0 = \Delta_0' \times \Delta_0''$ de deux sous-groupes non triviaux, alors, pour tout i, l'un des deux sous-groupes doit agir trivialement sur V_i. Et dans ce cas, notre affirmation se montre par récurrence. On peut donc supposer que:

$$\begin{array}{l}\textit{Aucun sous-groupe d'indice fini de } \Delta_0 \textit{ n'est} \\ \textit{le produit de deux sous-groupes non triviaux.}\end{array} \qquad (H)$$

Notons

$$I' := \{i \leq s \;/\; \Omega_i \text{ est homogène}\} \;,\;\; G' := \prod_{i \in I'} \mathrm{Aut}(\Omega_i) \quad \text{et} \quad G'' := \prod_{i \notin I'} \mathrm{Aut}(\Omega_i) \;.$$

D'après le théorème 1.1 et la proposition 4.2 de [6], le groupe G' est semisimple et a un nombre fini de composantes connexes tandis que le groupe G'' est discret. Le groupe Δ_0 est un réseau cocompact du produit $G' \times G''$. Le sous-groupe $\Delta_0' := \Delta_0 \cap G'$ est donc un réseau cocompact de G'. La projection de Δ_0 sur G' est discrète car elle normalise Δ_0. Donc le groupe $\Delta_0'' := \Delta_0 \cap G''$ est d'indice fini dans G'' et $\Delta_0' \times \Delta_0''$ est d'indice fini dans Δ_0. L'hypothèse *(H)* assure alors que l'on a $\Delta_0 = \Delta_0'$ ou Δ_0''.

- Si $\Delta_0 = \Delta_0'$, le groupe Δ_0 est un réseau cocompact irréductible du groupe semisimple $G' = S_1 \times \ldots \times S_s$. Le théorème de rigidité de Mostow assure que le groupe G' ne dépend, à revêtement fini près, que de Δ_0. La dimension d_i de V_i est donnée par l'égalité $d_i = \dim(S_i/K_i)$ où K_i est un sous-groupe compact maximal de S_i. Donc l'entier d_i ne dépend que du groupe Δ_0.

- Si $\Delta_0 = \Delta_0''$, l'hypothèse *(H)* prouve que $s = 1$. Dans ce cas, on a l'égalité $d_1 = 1 + \mathrm{cd}(\Delta_0)$ et l'entier d_1 ne dépend que du groupe Δ_0.

Remarquons pour finir que, par le théorème de superrigidité de Margulis, un groupe Δ_0 ne peut être isomorphe à la fois à un groupe de la forme Δ_0' et à un groupe de la forme Δ_0'' que si le groupe G' est de rang réel 1. Dans ce cas, on a encore les égalités $s = 1$, $d_1 = 1 + \mathrm{cd}(\Delta_0)$ et l'entier d_1 ne dépend que du groupe Δ_0. □

7.5 L'adhérence de $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant qui généralise le corollaire 3.5. Ce théorème affirme que la seule dégénérescence possible pour les éléments de $\overline{\mathcal{E}_{\Gamma_0}}$ est donnée par les exemples de 7.2: elle n'a lieu que sur le centre virtuel de Γ_0.

Théorème 7.9 *Soient Γ_0 un groupe et ρ_∞ un élément de l'adhérence $\overline{\mathcal{E}_{\Gamma_0}}$. Notons ρ_n une suite d'éléments de $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ qui converge vers ρ. Choisissons des cônes ouverts proprement convexes C_n de $V := \mathbb{R}^m$ divisés par $\rho_n(\Gamma_0)$. Ecrivons $C_n = C_n' + C_n''$ où C_n' est la somme des facteurs irréductible de C_n de dimension ≥ 2 et C_n'' la somme des facteurs irréductible de C_n de dimension 1. Notons $V = V_n' \oplus V_n''$ la décomposition correspondante de V. Alors*
a) Les limites $V_\infty' = \lim_{n\to\infty} V_n'$ et $V_\infty'' = \lim_{n\to\infty} V_n''$ existent et on a $V = V_\infty' \oplus V_\infty''$.

b) Il existe un cône ouvert proprement convexe C'_∞ de V'_∞ qui est $\rho_\infty(\Gamma_0)$-invariant.
c) Ce cône C'_∞ est divisible. Plus précisément, notons $C'_\infty = C_{\infty,1} \oplus \cdots \oplus C_{\infty,s}$ la décomposition du cône C'_∞ en facteurs irréductibles, $\Omega_\infty = \mathbb{P}(C_{\infty,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(C_{\infty,s})$ et $\overline{\rho_\infty}$ l'action de Γ_0 sur Ω_∞ via ρ_∞. Alors
(i) le noyau $\mathrm{Ker}\,\overline{\rho_\infty}$ est égal au centre virtuel de Γ_0,
(ii) le groupe $\overline{\rho_\infty}(\Gamma_0)$ est discret et
(iii) le quotient $\overline{\rho_\infty}(\Gamma_0)\backslash\Omega_\infty$ est compact.
d) Le cône C'_∞ est, à changement[13] de signes près, l'unique cône ouvert proprement convexe $\rho_\infty(\Gamma_0)$-invariant de V'_∞.
e) Il existe des changements de signes $(C'_n)^{\varepsilon'_n}$ de C'_n qui convergent vers C'_∞.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant qui généralise le corollaire 3.5.

Corollaire 7.10 *Soient Γ_0 un groupe et ρ_∞ un élément de l'adhérence $\overline{\mathcal{E}_{\Gamma_0}}$. Notons ρ_n une suite d'éléments de $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$ qui converge vers ρ. Choisissons des cônes ouverts proprement convexes C_n de $V := \mathbb{R}^m$ divisés par $\rho_n(\Gamma_0)$. On suppose que, pour tout[14] n, C_n a au plus un facteur de dimension 1. Alors,*
a) Il existe un cône ouvert proprement convexe C_∞ de V qui est $\rho_\infty(\Gamma_0)$-invariant. Ce cône est unique à changement de signes près. Il est divisible.
b) Il existe des changements de signes $C_n^{\varepsilon_n}$ de C_n qui convergent vers C_∞.

Le point clef de la démonstration du théorème 7.9 est encore la proposition 3.4. Pour l'utiliser, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 7.11 *Soient $\ell \geq 1$, Δ_0 un groupe sans sous-groupe distingué nilpotent infini et $\Gamma_0 := \mathbb{Z}^\ell \times \Delta_0$. Soient ρ un élément de $\mathcal{E}_{\Gamma_0}$, C un cône ouvert proprement convexe divisé par $\rho(\Gamma_0)$, $C = C_1 + \cdots + C_\ell$ la décomposition du cône C en facteurs irréductibles, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$ la décomposition correspondante de V, de sorte que les dimensions d_i de V_i vérifient $d_1 \geq \cdots \geq d_l$. On note s le plus grand entier tel que $d_s \geq 2$, $V' := \bigoplus_{i \leq s} V_i$ et $V'' := \bigoplus_{i>s} V_i$. Alors le commutant L de $\rho([\Gamma_0, \Gamma_0])$ dans $\mathrm{End}(V)$ est égal à*

$$L = \{\varphi \in \mathrm{End}V \;/\; \varphi(V'') \subset V'' \text{ et } \forall i = 1, \ldots, s,\ \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \;/\; \varphi|_{V_i} = \alpha_i Id_{V_i}\}.$$

En particulier, on a l'égalité $\dim L = s + (l-s)^2$.

Démonstration du lemme 7.11 D'après le théorème 1.1 de [6], l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma_0)$ est un produit $G = G_1 \times \cdots \times G_\ell$ où $G_i \subset \mathrm{GL}(V_i)$ est un produit $G_i = H_i S_i$ où H_i est le groupe des homothéties de V_i et S_i est un groupe quasisimple dont l'action sur V_i est absolument irréductible. L'adhérence de Zariski de $\rho([\Gamma_0, \Gamma_0])$ est donc le groupe $S := S_1 \times \cdots \times S_s$. Comme L est aussi égal au commutant de S, notre assertion s'en déduit. $\square$

[13] le changement de signes d'un cône est défini dans le fait 2.12.f.

[14] D'après la proposition 7.8, il suffit pour cela que, pour au moins un entier n_0, C_{n_0} a au plus un facteur de dimension 1

Démonstration du théorème 7.9 D'après les faits 2.3 et 2.12, on peut supposer que $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^\ell \times \Delta_0$ où Δ_0 est un groupe sans torsion qui ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini. Notons $C_n = C_{n,1} + \cdots + C_{n,\ell}$ la décomposition du cône C_n en facteurs irréductibles, $V = V_{n,1} \oplus \cdots \oplus V_{n,\ell}$ la décomposition correspondante de V et, pour $i = 1, \ldots, \ell$, $W_{n,i} := V_{n,1} \oplus \cdots \oplus V_{n,i}$. D'après la proposition 7.8, on peut choisir la numérotation de sorte que la dimension d_i de $V_{n,i}$ ne dépende pas de n et que l'on ait $d_1 \geq \cdots \geq d_\ell$. On note s le plus grand entier tel que $d_s \geq 2$. Par compacité, il existe des sous-suites S de $\mathbb{N}$ telles que la suite de drapeaux $(W_{n,1} \subset \cdots \subset W_{n,\ell})_{n \in S}$ converge. Fixons une telle sous-suite S. A l'aide de petites rotations, on peut supposer que cette suite de drapeaux est constante. On note alors $(e_j)_{1 \leq j \leq m}$ une base de V telle que, pour tous n, i, $W_{n,i}$ ait pour base $(e_j)_{1 \leq j \leq d_1 + .. + d_i}$. On notera V_i le sous-espace de V ayant pour base $(e_j)_{d_1 + .. + d_{i-1} \leq j \leq d_1 + .. + d_i}$. de sorte que, pour tous n, i, on ait $W_{n,i} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_i$. On pourrait aussi supposer que, pour tout i, la suite des sous-espaces $(V_{n,i})_{n \in S}$ converge vers un espace $V_{\infty,i}$. Malheureusement, les espaces $V_{\infty,i}$ pourraient ne pas être en somme directe.

C'est pourquoi nous allons introduire une deuxième représentation ρ'_∞ de Γ_0 dans V en ne gardant que les blocs diagonaux de ρ_∞. Plus précisément, dans la base $e_1, \ldots, e_m$, les éléments $\rho_n(g)$ et $\rho_\infty(g)$, avec g dans Γ_0, s'écrivent

$$\rho_n(g) = \begin{pmatrix} \rho_{n,1}(g) & \star & \cdots & \star \\ 0 & \rho_{n,2}(g) & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_{n,\ell}(g) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho_\infty(g) = \begin{pmatrix} \rho_{\infty,1}(g) & \star & \cdots & \star \\ 0 & \rho_{\infty,2}(g) & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_{\infty,\ell}(g) \end{pmatrix}.$$

Par construction, il existe des matrices triangulaires supérieures u_n telles que

$$\rho_n(g) = u_n \circ \rho'_n(g) \circ u_n^{-1} \ \text{ avec } \ \rho'_n(g) := \mathrm{diag}(\rho_{n,1}(g), \ldots, \rho_{n,\ell}(g)) \ .$$

On pose

$$\rho'_\infty(g) := \lim_{n \in S} \rho'_n(g) \ .$$

Autrement dit,

$$\rho'_\infty(g) = \mathrm{diag}(\rho_{\infty,1}(g), \ldots, \rho_{\infty,\ell}(g)) \ .$$

D'après le fait 2.5, la restriction de ρ'_∞ à Δ_0 est fidèle et discrète. Malheureusement, la restriction de ρ'_∞ à $\mathbb{Z}^\ell$ n'est pas en général fidèle.

C'est pourquoi nous allons introduire une troisième représentation ρ''_∞ de Γ_0 dans V. Cette représentation ρ''_∞ ne diffère de ρ'_∞ que par des scalaires sur chacun des sous-espaces V_i. Elle est donnée par, pour tout $g = (n_1, \ldots, n_\ell, h) \in \mathbb{Z}^\ell \times \Delta_0$,

$$\rho''_\infty(g) = \mathrm{diag}\left(\frac{2^{n_1} \rho_{\infty,1}(h)}{|\det(\rho_{\infty,1}(h))|^{1/d_1}}, \ldots, \frac{2^{n_\ell} \rho_{\infty,\ell}(h)}{|\det(\rho_{\infty,\ell}(h))|^{1/d_\ell}} \right) \ .$$

Le fait 2.4 prouve que la restriction de ρ''_∞ à Δ_0 est fidèle et discrète. Par construction, ρ''_∞ est alors fidèle et discrète. Comme les groupes $\rho_{n,i}(\Gamma_0)$ préservent des cônes ouverts proprement convexes de V_i, tous les éléments $\rho_{n,i}(g)$ sont positivement semiproximaux (lemme 3.2). Par passage à la limite, il en est de même des éléments $\rho_{\infty,i}(g)$ et donc aussi de $\rho''_\infty(g)$. Malheureusement, nous ne pouvons pas appliquer directement la proposition 3.4 au groupe $\rho''_\infty(\Gamma_0)$ car nous ne savons pas encore si cette représentation ρ''_∞ de Γ_0 est semisimple.

C'est pourquoi nous allons introduire une quatrième représentation ρ'''_∞ de Γ_0 dans V. Cette représentation est la semisimplifiée de ρ''_∞, c'est-à-dire la somme directe des sous-quotients irréductibles qui apparaissent dans une suite de Jordan-Hölder de ρ''_∞. Le même fait 2.4 prouve que la restriction de ρ'''_∞ à Δ_0 est fidèle et discrète. On en déduit encore que ρ'''_∞ est fidèle et discrète. L'adhérence de Zariski G du groupe $\Gamma := \rho'''_\infty(\Gamma_0)$ est donc réductif, on a l'égalité $\mathrm{cd}(\Gamma) = \dim V$ et les éléments de Γ sont tous positivement semiproximaux. La proposition 3.4 assure alors que Γ divise un cône ouvert convexe de C_∞. En outre, comme le centre de Γ est de rang ℓ, le nombre de facteurs irréductibles de la représentation ρ'''_∞ est égal à ℓ (fait 2.12.d). Autrement dit, chacune des représentations $\rho_{\infty,i}$ est irréductible et on a l'égalité $\rho''_\infty = \rho'''_\infty$.

La suite de la démonstration repose sur l'étude des commutants L_n, L_∞, L'_∞ et L''_∞ de $\rho_n([\Gamma_0,\Gamma_0])$, $\rho_\infty([\Gamma_0,\Gamma_0])$, $\rho'_\infty([\Gamma_0,\Gamma_0])$ et $\rho''_\infty([\Gamma_0,\Gamma_0])$ respectivement; avec pour objectif la détermination de la limite de la suite L_n (égalité (13)). Pour cela, notons

$$V' := \bigoplus_{i\leq s} V_i \ \text{ et } \ V'' := \bigoplus_{i>s} V_i \ .$$

D'après le lemme 7.11, on a l'égalité

$$L''_\infty = \{\varphi \in \mathrm{End}V \ / \ \varphi(V'') \subset V'' \text{ et } \forall i = 1,\ldots,s,\ \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \ / \ \varphi|_{V_i} = \alpha_i Id_{V_i}\}. \tag{7}$$

Comme ρ'_∞ et ρ''_∞ coïncident sur $[\Gamma_0,\Gamma_0]$, on a l'égalité

$$L'_\infty = L''_\infty \tag{8}$$

Notons G_∞ l'adhérence de Zariski de $\rho_\infty([\Gamma_0,\Gamma_0])$ et écrivons $G_\infty = R_\infty U_\infty$ sa décomposition de Levi où R_∞ est réductif et U_∞ est unipotent. Comme l'action de R_∞ sur V est semisimple, quitte à changer de base $e_1,\ldots,e_m$ à l'aide d'une matrice triangulaire supérieure, on peut supposer que R_∞ stabilise les sous-espaces V_i. Notons G'_∞ l'adhérence de Zariski de $\rho'_\infty([\Gamma_0,\Gamma_0]) = \rho''_\infty([\Gamma_0,\Gamma_0])$. Comme ρ''_∞ est une représentation semisimple de Γ_0, ρ''_∞ est aussi une représentation semisimple de $[\Gamma_0,\Gamma_0]$ et le groupe G'_∞ est réductif. On a donc $G'_\infty = R_\infty$ et donc $G'_\infty \subset G_\infty$. On en déduit l'inclusion

$$L_\infty \subset L'_\infty \ . \tag{9}$$

Or, pour toute suite $S' \subset S$ telle que la limite $L_{S'} := \lim_{n\in S'} L_n$ existe, on a l'inclusion

$$L_{S'} \subset L_\infty \ . \tag{10}$$

Or, par le lemme 7.11, on a l'égalité

$$\dim L_{S'} = \dim L_n = \dim L''_\infty = s + (\ell - s)^2 \ . \tag{11}$$

On déduit de (8), (9), (10) et (11) que

$$L_{S'} = L_\infty = L'_\infty = L''_\infty \ . \tag{12}$$

Comme la limite $L_{S'}$ ne dépend pas des suites S et S' choisies, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} L_n = L_\infty = L'_\infty = L''_\infty \ . \tag{13}$$

D'après le lemme 7.11, on a aussi l'égalité

$$L_n = \{\varphi \in \mathrm{End}V \ / \ \varphi(V''_n) \subset V''_n \text{ et } \forall i = 1, \ldots, s, \ \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \ / \ \varphi|_{V_{n,i}} = \alpha_i Id_{V_{n,i}}\}. \tag{14}$$

On déduit alors de (7), (13) et (14) les égalités

$$\lim_{n\to\infty} V''_n = V'' \quad \text{et} \quad \forall i = 1, \ldots, s, \ \lim_{n\to\infty} V_{n,i} = V_i \ .$$

Ce qui prouve le point a) avec $V'_\infty = V'$ et $V''_\infty = V''$.

b) Comme les espaces V''_n et $V_{n,i}$ sont stabilisés par $\rho_n(\Gamma_0)$, on en déduit, par passage à la limite que les espaces V'' et V_i, pour $i = 1, \ldots, s$, sont stabilisés par $\rho_\infty(\Gamma_0)$. Donc les représentations ρ_∞ et ρ'_∞ coïncident sur V'. D'après le fait 2.12.b, on peut écrire $C_\infty = C'_\infty + C''_\infty$ où C'_∞ et C''_∞ sont respectivement des cônes ouverts convexes de V' et V''. Par construction, ce cône C'_∞ est $\rho_\infty(\Gamma_0)$-invariant.

c) L'action $\overline{\rho_\infty}$ de Γ_0 sur Ω_∞ via ρ_∞ coïncide avec l'action via ρ''_∞. Comme le cône C_∞ est divisé par $\rho''_\infty(\Gamma_0)$, nos assertions résultent des faits 2.12.a et 2.12.d.

d) Cela résulte du point c) et du fait 2.12.f.

e) On procède comme pour le corollaire 3.5. Soit $i \leq s$ et K_i une valeur d'adhérence de la suite $n \to \mathbb{P}(\overline{C_{n,i}})$ de compacts de $\mathbb{P}(V_i)$. Ce compact K_i est convexe non vide et $\rho_{\infty,i}(\Gamma_0)$-invariant. Comme la représentation $\rho_{\infty,i}$ est irréductible, K_i est l'adhérence d'un ouvert proprement convexe Ω_i de $\mathbb{P}(V_i)$. Par le point d), on a forcément $\Omega_i = \mathbb{P}(C_i)$. Donc, après un éventuel changement de signes, les suites $C_{n,i}$ convergent vers $C_{\infty,i}$ et C'_n vers C'_∞. □

8 Appendice: Le groupe limite d'un groupe Zariski-dense

Cette partie est indépendante du reste de cet article, si ce n'est pour les notations de la section 2.1. Elle aura sans aucun doute des applications à d'autres sujets que les convexes divisibles.

Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe. Nous savons qu'à tout sous-semigroupe Zariski dense Γ de G, est associé un cône fermé ℓ_Γ de la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$, que ℓ_Γ est convexe, que ℓ_Γ est d'intérieur non vide si $\mathbf{G}$ est semisimple et que ℓ_Γ est lié aux composantes hyperboliques des éléments de Γ. C'est le cône limite de Γ introduit dans [2] (voir aussi le fait 2.2).

Dans cet appendice, nous allons associer à Γ un fermé T_Γ du groupe compact T_G. Rappelons que T_G est le sous-groupe compact maximal des points réels d'un tore maximal et maximalement déployé $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$. L'ensemble T_Γ est tout simplement l'adhérence de l'ensemble des "composantes elliptiques" des éléments loxodromiques de Γ. Le résultat clef de cet appendice est le corollaire 8.5 qui affirme que T_Γ est un sous-groupe de T_G qui contient la composante neutre T de T_G.

Pour cela, nous introduirons, à l'aide de la décomposition de Bruhat de G, un fermé M_Γ du groupe compact M_G. Rappelons que M_G est le sous-groupe compact maximal du centralisateur dans G du tore déployé maximal $\mathbf{A} \subset \mathbf{H}$. Nous montrerons que M_Γ est un sous-groupe de M_G qui contient la composante neutre M de M_G (théorème 8.2) et nous montrerons que $T_\Gamma = M_\Gamma \cap T_G$ (proposition 8.4).

Signalons que des résultats très proches ont été obtenus indépendamment par Prasad et Rapinchuk dans [22].

8.1 L'action de L dans $V^{\mathfrak{n}}$

Pour démontrer le théorème 8.2, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 8.1 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe. Reprenons les notations de la section 2.1. Alors, il existe une représentation réelle* (V, ρ) *de* G *tel que le morphisme induit* $L \to \mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}})$ *soit injectif.*

Remarque En général, on ne peut pas choisir ρ irréductible: penser au groupe $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, avec $n \geq 3$ pour lequel L est un groupe abélien de dimension $n-1$ alors que $V^{\mathfrak{n}}$ est toujours de dimension 1. Mais, comme $\mathbf{G}$ est réductif, on pourra toujours décomposer cette représentation ρ en somme directe de représentations irréductibles (voir section 2.2).

Démonstration Comme $\mathbf{L}$ est un $\mathbb{R}$-groupe réductif, il existe une représentation fidèle (W, σ) de L. On peut supposer que tous les poids de $\mathbf{A}$ dans $W_\mathbb{C}$ sont dans P'_+ et réguliers. Il suffit pour cela de tensoriser σ par un caractère déployé de $\mathbf{L}$ donné par un élément de P'_+ suffisamment loin des murs, On prolonge alors σ en une représentation encore notée σ du groupe parabolique minimal LN triviale sur N. On prend alors pour ρ la représentation de G induite au sens des groupes algébriques de cette représentation de LN. Autrement dit, V est l'espace vectoriel de dimension finie

$$V := \{f : G \to W \text{ régulières } / \ \forall g \in G, \forall p \in LN, f(gp) = \sigma(p)f(g)\}$$

et ρ est donnée par $(\rho(g)f)(g') = f(g^{-1}g')$. Le sous-espace $V^{\mathfrak{n}}$ s'identifie alors à W. $\square$

8.2 Le groupe limite M_Γ

Construisons maintenant le groupe limite d'un sous-semigroupe Zariski dense

Soient $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. On choisit, à l'aide du fait 2.2.a, un élément loxodromique g_0 de Γ. On choisit alors un élément x_0 de G tel que $x_0 g_0 x_0^{-1}$ soit dans $M_G \exp(\mathring{\mathfrak{a}}^+)$.

D'après la décomposition de Bruhat, la multiplication $N^- \times M_G \times A_e \times N \longrightarrow G$ est une injection dont l'image $O := N^- M_G A_e N$ est un ouvert de Zariski dense de G. Tout élément g de O admet donc une décomposition unique

$$g = n^-(g)m(g)a(g)n(g)$$

avec $n^-(g) \in N^-$, $m(g) \in M_G$, $a(g) \in A_e$ et $n(g) \in N$.

On note M_Γ le plus petit fermé de M_G contenant les composantes $m(x_0 g x_0^{-1})$, lorsque g est dans Γ. Autrement dit, on pose

$$M_\Gamma := \overline{m(x_0 \Gamma x_0^{-1} \cap O)}\ .$$

Théorème 8.2 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe et* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense de* G*. Alors, avec les notations ci dessus*
a) Le fermé M_Γ *est un sous-groupe distingué de* M_G *qui contient* M*.*
b) Le groupe M_Γ *ne dépend ni du choix de* x_0 *ni de celui de* g_0*.*
c) Soit $G' \subset G$ *un sous-semigroupe ouvert qui rencontre* Γ*. Alors on a*[15] $M_{\Gamma\cap G'} = M_\Gamma$ *.*

La démonstration repose sur une interprétation de M_Γ en termes de représentations de G (c'est l'égalité (18) ci-dessous).

D'après le lemme 8.1, il existe une représentation (V, ρ) de G telle que le morphisme induit $L \to \mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}})$ soit injectif. Décomposons ρ en somme directe de représentations irréductibles (V_i, ρ_i), pour $i = 1, \dots, \ell$. On note λ_i le plus haut poids restreint de ρ_i.

Nous identifierons abusivement G à son image $\rho(G)$. Introduisons les sous-groupes de $\mathrm{GL}(V)$

$$H^+ := \{g \in \mathrm{GL}(V) \ /\ \forall i \in 1, \dots \ell,\ \exists t_i > 0 \ /\ g|_{V_i} = t_i Id|_{V_i}\} \ \simeq\ ]0, \infty[^\ell\ ,$$

$G^+ := GH^+$ et le sous-semigroupe $\Gamma^+ := \Gamma H^+$. Par construction, les groupes G et H^+ commutent. Notons $\overline{H^+}$ (resp. $\overline{G^+}$, $\overline{\Gamma^+}$) l'adhérence de H^+ (resp. G^+, Γ^+) dans $\mathrm{End}(V)$. Ce sont des semigroupes.

Notons $V^<$ le supplémentaire L-invariant à $V^{\mathfrak{n}}$ et π la projection sur $V^{\mathfrak{n}}$ parallèlement à $V^<$. Le projecteur $\pi_{g_0} := x_0^{-1} \pi x_0$ est dans $\overline{\Gamma^+}$. En effet, par définition de H^+, il existe un unique élément h_0 de H^+ tel que, pour tout i, le rayon spectral de $h_0 g_0|_{V_i}$ soit égal à 1 ; les valeurs propres de $h_0 g_0$ dans $x_0^{-1}(V^{\mathfrak{n}})$ sont toutes de modules 1 tandis que celles

[15] D'après le fait 2.2.d, le sous-semigroupe $\Gamma' := \Gamma \cap G'$ est encore Zariski dense dans G.

dans $x_0^{-1}(V^<)$ sont toutes inférieures à 1 ; on peut donc trouver une suite d'entiers S telle que $\lim_{n\in S}(h_0g_0)^n = x_0^{-1}\pi x_0$.

Intéressons-nous tout d'abord au sous-semigroupe $\pi\overline{G^+}\pi$ de $\mathrm{End}(V^{\mathfrak{n}})$. C'est un semigroupe car π est dans $\overline{G}^+$. Montrons l'égalité

$$\pi\overline{G^+}\pi \cap \mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}}) \;=\; \pi M_G H^+\pi\ . \tag{15}$$

Pour cela, on écrit les égalités

$$\begin{array}{rcll}
\pi\overline{G^+}\pi & = & \overline{\pi G^+\pi} & \text{car } \mathbb{P}(\mathrm{End}V) \text{ est compact} \\
& = & \overline{\pi N^- M_G A_e H^+ N\pi} & \text{car } O \text{ est dense dans } G \text{ et } H^+ \text{ commute à } N \\
& = & \overline{\pi N^- M_G A_e H^+\pi} & \text{car l'action de } N \text{ sur } V^{\mathfrak{n}} \text{ est triviale} \\
& = & \overline{\pi M_G A_e H^+\pi} & \text{car l'action de } N^- \text{ sur } V/V^< \text{ est triviale} \\
& = & \overline{\pi M_G H^+\pi} & \text{car l'action de } A_e \text{ sur chaque espace } V_i^{\mathfrak{n}} \text{ est scalaire} \\
& = & \pi M_G \overline{H^+}\pi & \text{car } M_G \text{ est compact.}
\end{array}$$

L'égalité (15) s'en déduit.

Comme l'action de M_G sur $V^{\mathfrak{n}}$ est fidèle,

$$\text{le groupe } \pi M_G H^+\pi \text{ s'identifie à } M_G \times H^+. \tag{16}$$

Montrons maintenant que, pour tout g dans G, on a l'équivalence

$$\pi g\pi \text{ est dans } \mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}}) \text{ si et seulement si } g \text{ est dans } O \tag{17}$$

Pour cela, on écrit, grâce à la décomposition de Bruhat, $g = n^- wman$ avec $n^- \in N^-$, $w \in W$, $m \in M_G$, $a \in A_e$ et $n \in N$. L'assertion $\pi g\pi \in \mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}})$ equivaut alors successivement aux trois assertions suivantes : $\pi w\pi \in \mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}})$ (car $\pi n^- = n\pi = \pi$ et $ma\pi = \pi ma$), $w = 1$ (car $\rho(w)(V_i^{\mathfrak{n}})$ est un espace de poids $w(\lambda_i)$) et $g \in O$ (par définition de O).

Intéressons-nous maintenant au sous-semigroupe $\pi x_0\overline{\Gamma^+}x_0^{-1}\pi$ de $\mathrm{End}(V^{\mathfrak{n}})$ et montrons l'égalité:

$$\pi x_0\overline{\Gamma^+}x_0^{-1}\pi \;\cap\; \mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}}) \;=\; \pi M_\Gamma H^+\pi\ . \tag{18}$$

Pour cela, on remarque que, d'après l'égalité (15) et l'équivalence (17), le membre de gauche est égal à

$$\overline{\pi(x_0\Gamma x_0^{-1}\cap O)H^+\pi} \;\cap\; \pi M_G H^+\pi\ .$$

On termine alors comme pour l'égalité (15).

C'est cette égalité (18) qui nous permettra de comprendre l'ensemble limite M_Γ.

Démonstration du théorème 8.2 a) Comme l'intersection de deux semigroupes est un semigroupe, on déduit de (18) que M_Γ est un sous-semigroupe fermé de M_G. Comme M_G est compact, M_Γ est donc un groupe. Comme $x_0\Gamma x_0^{-1}\cap O$ est Zariski dense dans O, le groupe $\pi M_\Gamma H^+\pi$ est Zariski dense dans $\pi M_G H^+\pi$. Comme le groupe M_Γ est compact, M_Γ est Zariski fermé dans M_G et donc M_Γ contient la composante neutre M de M_G. Comme M_G/M est abélien, M_Γ est distingué dans M_G.

b) Soient g_1 un élément loxodromique de Γ et x_1 un élément de G tel que $x_1 g_1 x_1^{-1}$ soit dans $M_G \exp(\mathring{\mathfrak{a}}^+)$. Pour i, j dans $\{0, 1\}$, notons M_{ij} le fermé de M_G défini par

$$\pi M_{ij} H^+ \pi = \pi x_i \overline{\Gamma^+} x_j^{-1} \pi \ \cap \ \pi M_G H^+ \pi \ .$$

Les parties M_{00} et M_{11} sont les sous-groupes d'indice fini de M_G dont on veut montrer l'égalité.

Remarquons tout d'abord que les quatre parties M_{ij} sont non vides. En effet, par Zariski densité de Γ, il existe un élement g de Γ tel que $\pi x_i g x_j^{-1} \pi$ soit dans $\mathrm{GL}(V^{\mathfrak{n}})$.

Remarquons d'autre part que l'on a les inclusions

$$M_{ij} M_{jk} \subset M_{ik} \qquad\qquad \text{pour tout } i, j, k \text{ dans } \{0, 1\} \ .$$

Cela résulte de l'égalité (15) et du fait que $x_0^{-1} \pi x_0$ et $x_1^{-1} \pi x_1$ sont dans $\overline{\Gamma^+}$. Choisissons alors des éléments m dans M_{01} et m' dans M_{10}. On a l'inclusion

$$m M_{10} \subset M_{00} \ .$$

A l'inverse, comme M_{00} est un groupe, on a

$$M_{00} = (mm') M_{00} \subset m M_{10} \ .$$

Ce qui donne l'égalité

$$M_{00} = m M_{10} \ .$$

De même, on a l'égalité

$$M_{11} = M_{10} m \ .$$

Comme M_{11} est un sous-groupe distingué de M_G, on en déduit l'égalité cherchée

$$M_{00} = m M_{11} m^{-1} = M_{11} \ .$$

c) D'après le fait 2.2.d, l'intersection $\Gamma' := \Gamma \cap G'$ est un semigroupe Zariski dense de G. On peut donc choisir notre élément loxodromique g_0 dans Γ'. Quitte à conjuguer nos semigroupes et à remplacer g_0 par une puissance, on peut supposer que g_0 est dans $M \exp(\mathring{\mathfrak{a}}^+)$.

Il est clair que $M_{\Gamma'}$ est inclus dans M_Γ. Réciproquement, on veut montrer que pour tout g dans $\Gamma \cap O$, $m(g)$ est dans $M_{\Gamma'}$. D'après le lemme 8.3 ci-dessous, pour n grand, l'élément $g_0^n g g_0^n$ est dans Γ'. Mais $g_0^n g g_0^n$ est dans O, on a donc

$$m(g) = m(g_0)^{-n} m(g_0^n g g_0^n) m(g_0)^{-n} \in M\, m(\Gamma' \cap O)\, M \subset M_{\Gamma'} \ .$$

C'est ce que l'on voulait. $\square$

Nous avons utilisé le lemme suivant:

Lemme 8.3 *Soit* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe,* g_0 *dans* $M_G \exp(\mathring{\mathfrak{a}}^+)$ *et* G' *un sous-semigroupe ouvert de* G *qui contient* g_0*.*

Alors, pour tout g *dans l'ouvert* $O = N^- M_G A_e N$*, il existe* $n_0 \geq 0$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0$*,* $g_0^n g g_0^n$ *soit loxodromique et soit dans* G'*.*

Démonstration Ce lemme est démontré à la fin du §6.3 de [2]. □

8.3 La composante elliptique des éléments de Γ

Réinterprétons maintenant le groupe limite M_Γ à l'aide des composantes elliptiques des éléments loxodromiques de Γ.

Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe réductif connexe. Rappelons qu'un élément g de G est *loxodromique* si et seulement s'il est conjugué à un élément $g' = t\exp(\ell(g))$ avec t dans T_G et $\ell(g)$ dans l'intérieur $\mathring{\mathfrak{a}}^+$ de la chambre de Weyl. L'élément $\ell(g)$ est défini de manière unique. L'élément t est unique à conjugaison près par un élément du normalisateur $N_{M_G}(T_G)$ de T_G dans M_G (ou, ce qui revient au même à conjugaison près par un élément du groupe de Weyl $W_0 \simeq N_{M_G}(T_G)/T_G \simeq N_M(T)/T$). La classe de conjugaison $\tau(g) := \{wtw^{-1}/w \in W_0\}$ est une partie finie de T_G qui ne dépend que de g.

Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. On note τ_Γ l'union des parties finies $\tau(g)$ pour g loxodromique dans Γ et $T_\Gamma := \overline{\tau_\Gamma}$ l'adhérence de cette union. La proposition suivante décrit la partie T_Γ.

Proposition 8.4 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe et* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense de* G*. Alors, avec les notations ci-dessus, on a les égalités*

$$T_\Gamma = M_\Gamma \cap T_G.$$

Remarque D'après le lemme 4.2.a, on a l'égalité $M_G = MT_G$. Cette proposition affirme qu'on a aussi l'égalité $M_\Gamma = MT_\Gamma$. Il est donc équivalent de connaître M_Γ ou de connaître T_Γ.

Démonstration Montrons tout d'abord l'inclusion $T_\Gamma \subset M_\Gamma \cap T_G$. Soient g_0 un élément loxodromique de Γ et x_0 un élément de G tel que $x_0 g_0 x_0^{-1} = t\exp(\ell(g))$ avec t dans T_G. D'après le théorème 8.2, l'élément $t = m(x_0 g_0 x_0^{-1})$ est dans M_Γ. Comme M_Γ est distingué dans M_G, on a donc $\tau(g_0) \subset M_\Gamma$. Ce qui prouve l'inclusion $T_\Gamma \subset M_\Gamma \cap T_G$.

Réciproquement, montrons l'inclusion $M_\Gamma \cap T_G \subset T_\Gamma$. Fixons un élément loxodromique g_0 de Γ et choisissons un élément x_0 de G tel que $x_0 g_0 x_0^{-1}$ soit dans $M_G \exp(\mathring{\mathfrak{a}}^+)$. Notons encore h_0 l'élément de H^+ tel que, pour tout i, le rayon spectral de $h_0 g_0|_{V_i}$ soit égal à 1, et S une suite d'entiers telle que la limite $\lim_{n\in S}(h_0 g_0)^n$ existe et soit égale au projecteur $\pi_{g_0} := x_0^{-1}\pi x_0$.

Soit g un élément de $\Gamma \cap x_0^{-1} O x_0$. Notons $g_n := g_0^n g g_0^n$. Pour n grand, l'élément g_n est loxodromique et la suite de projecteurs π_{g_n} converge vers π_{g_0}. Il existe donc une suite x_n dans G telle que $x_n g_n x_n^{-1}$ soit dans $M_G \exp(\mathring{\mathfrak{a}}^+)$ et telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Utilisons l'égalité

$$M_G = \cup_{g\in M} g T_G g^{-1} \; .$$

Il suffit pour la montrer de remarquer, d'une part, que le groupe fini $Z_G := A \cap T_G$ est dans le centre de M_G et vérifie les égalités $M_G = Z_G M$ et $T_G = Z_G T$ (lemme 4.2) et, d'autre part, que dans le groupe compact connexe M, tout élément est conjugué à un élément du tore maximal T.

Comme M centralise A, il existe alors une suite m_n dans M telle que, en posant $y_n = m_n x_n$, on ait

$$y_n g_n y_n^{-1} \in T_G \exp(\overset{\circ}{\mathfrak{a}}{}^+) \; .$$

Comme M est compact, on peut choisir la suite S de sorte que la limite $m_0 := \lim_{n\in S} m_n$ existe dans M.

Remarquons tout d'abord que, comme $y_n g_n y_n^{-1} \in \tau(g_n)A$, on a

$$\pi y_n g_n y_n^{-1} h_0^{2n} \pi \;\; \in \;\; \pi \tau(g_n) H^+ \pi \subset \pi T_\Gamma H^+ \pi \; .$$

Calculons la limite pour n dans S de cette expression, en se souvenant que H^+ et G commutent et en se souvenant que le projecteur π est L-équivariant et vérifie donc l'égalité $\pi m_0 = m_0 \pi$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\in S} \pi y_n g_n y_n^{-1} h_0^{2n} \pi &= \pi m_0 x_0 (x_0^{-1} \pi x_0) g (x_0^{-1} \pi x_0)(m_0 x_0)^{-1} \pi \\ &= \pi m_0 x_0 g x_0^{-1} m_0^{-1} \pi \; . \end{aligned}$$

On a donc

$$\pi m_0 x_0 g x_0^{-1} m_0^{-1} \pi \;\; \in \;\; \overline{\pi T_\Gamma H^+ \pi}$$

ce que l'on réécrit,

$$\pi m_0 m(x_0 g x_0^{-1}) m_0^{-1} \pi \;\; \in \;\; \overline{\pi T_\Gamma H^+ \pi} \; .$$

D'après (15) et (16), on a les égalités

$$\overline{\pi T_\Gamma H^+ \pi} \cap \pi M_G \pi = \pi T_\Gamma H^+ \pi \cap \pi M_G \pi = \pi T_\Gamma \pi.$$

On a donc

$$m(x_0 g x_0^{-1}) \;\; \in \;\; m_0^{-1} T_\Gamma m_0 \; .$$

Ceci prouve que tout élément de $m(x_0 \Gamma x_0^{-1})$ est conjugué dans M_G à un élément de T_Γ. On en déduit que $M_\Gamma \cap T_G \subset T_\Gamma$. □

Corollaire 8.5 *Soient* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe réductif connexe et* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense de* G*. Alors, avec les notations ci dessus,*
a) Le fermé T_Γ *est un sous-groupe d'indice fini de* T_G*.*
b) Soit $G' \subset G$ *un sous-semigroupe ouvert qui rencontre* Γ*. Alors on a* $T_{\Gamma\cap G'} = T_\Gamma$ *.*

Démonstration Cela résulte immédiatement du théorème 8.2 et de la proposition 8.4.□

Définition 8.6 *Pour tout élément loxodromique g de G, on appelle signe de g l'élément $s_g \in S_G \simeq T_G/T$ image de $\tau(g)$.*

On appelle groupe des signes de Γ le sous-groupe $S_\Gamma := T_\Gamma/T \simeq M_\Gamma/M$ du groupe $S_G \simeq T_G/T$.

Remarques - Soit G_e un groupe de Lie semisimple linéaire connexe non compact. Il est facile de construire un sous-groupe discret Zariski dense Γ de G tel que $S_\Gamma = S_G$.
- Mais, il existe un sous-groupe Zariski dense Γ de G_e tel que $S_\Gamma = \{1\}$ si et seulement si G_e n'a pas de représentations réelles irréductibles symplectiques proximales. En effet, cette affirmation est une reformulation du théorème 5.3 de [3].
- Un groupe Γ tel que $S_\Gamma = \{1\}$ est appelé positivement loxodromique dans [3].

Références

[1] H.Abels, G.Margulis, G.Soifer - Semigroups containing proximal linear maps, Isr.Jour. Math. 91 (1995) p.1-30.
[2] Y.Benoist - Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, Geom. Func.Ana. 7 (1997) p.1-47.
[3] Y.Benoist - Automorphismes des cônes convexes, Inv. Math. 141 (2000) p.149-193.
[4] Y.Benoist - Convexes divisibles, Comp. Rend. Ac. Sc. 332 (2001) p.387-390.
[5] Y.Benoist - Convexes divisibles I, in Algebraic Groups and Arithmetics, S. Dani and G. Prasad editors (2004).
[6] Y.Benoist - Convexes divisibles II, Duke Math. J. 120 (2003) p.97-120.
[7] J.P.Benzecri - Sur les variétés localement affines et localement projectives, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960) p.229-332.
[8] A.Borel - Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology 2 (1963) p.111-122.
[9] A.Borel - Linear algebraic groups, GTM 126 Springer (1991).
[10] A.Borel, J.Tits - Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965) p.55-150.
[11] A.Borel, J.Tits - Compléments à l'article: Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 41 (1972) p.253-276.
[12] N.Bourbaki - Groupes et algèbres de Lie ch. 4,5 et 6, Masson (1981).
[13] N.Bourbaki - Groupes et algèbres de Lie ch. 7 et 8, CCLS (1975).
[14] N.Bourbaki - Groupes et algèbres de Lie ch. 9, Masson (1982).
[15] S.Choi, W.Goldman - Convex real projective structures on closed surfaces are closed, Proc. Am. Math. Soc. 118 (1993) p.657-661.
[16] W.Goldman - Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) p.791-845.
[17] W.Goldman, J. Millson - Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space, Inv. Math. 88 (1987) p.495-520.
[18] S.Helgason - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press (1978).
[19] D.Johnson, J.Millson - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." PM 67 Birkhaüser(1984) p.48-106.
[20] I.Kim - Rigidity and deformation spaces of strictly convex real projective structures on compact manifolds, Journ. Diff. Geom. 58 (2001) p.189-218.
[21] J.L.Koszul - Déformation des connexions localement plates, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) p.103-114.
[22] G.Prasad, A.Rapinchuk - Existence of irreducible $\mathbb{R}$-regular elements in Zariski dense subgroups, Math. Res. Letters 10 (2003) p.21-32.
[23] M.Raghunathan - Discrete subgroups of Lie groups, Springer (1972).

[24] J.P.Serre - Cohomologie des groupes discrets, Annals of Math. Studies 70 (1971) p.77-169.
[25] I.Satake - On representations and compactifications of symmetric Riemann spaces, Ann. Math. 71 (1960) p.77-111.
[26] J.Vey - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 24 (1970) p.641-665.

Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris
benoist@dma.ens.fr www.dma.ens.fr/~benoist