

Actions symplectiques de groupes compacts

Yves Benoist

Résumé

Pour toute action symplectique d'un groupe compact connexe sur une variété symplectique compacte connexe, nous montrons que la trace sur la chambre de Weyl de l'image de l'application moment est un polyèdre convexe fermé. Ceci généralise les théorèmes de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg-Kirwan à des actions non hamiltoniennes. Comme conséquence, nous décrivons les actions symplectiques d'un tore sur une variété compacte, qui sont coisotropes (ou sans multiplicité), c'est-à-dire qui admettent une orbite coisotrope.

Symplectic actions of compact groups

Abstract

For any symplectic action of a compact connected group on a compact connected symplectic manifold, we show that the intersection of the Weyl chamber with the image of the moment map is a closed convex polyhedron. This extends Atiyah-Guillemin-Sternberg-Kirwan's convexity theorems to non hamiltonian actions. As a consequence, we describe those symplectic actions of a torus which are coisotropic (or multiplicity free) i.e. which have at least one coisotropic orbit : they are the product of an hamiltonian coisotropic action by an anhamiltonian one. The hamiltonian coisotropic actions have already been described by Delzant thanks to the convex polyhedron. The anhamiltonian coisotropic actions are actions of a central torus on a symplectic nilmanifold.

This text is written as an introduction to the theory of symplectic actions of compact groups since complete proofs of the preliminary classical results are given.

Introduction

Dans ce texte, nous étudions les actions symplectiques des groupes compacts du point de vue de la géométrie différentielle. Considérons donc une variété symplectique compacte connexe (M, ω) munie d'une action symplectique d'un groupe compact connexe K .

Même si on ne fait pas l'hypothèse que l'action est hamiltonienne, on dispose d'une application moment $\tilde{\mu}$. Cette application est définie sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M et prend ses valeurs dans le dual $\mathfrak{k}^*$ de l'algèbre de Lie de K . Notre premier objectif est de montrer que, lorsque K est un tore, l'image $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est un polyèdre convexe fermé de $\mathfrak{k}^*$. (théorème 3.1).

Si on ne suppose plus que K est un tore, l'image de cette application est une réunion d'orbites coadjointes. Cette image est donc entièrement déterminée par son intersection avec une chambre de Weyl $\mathfrak{t}_+^*$. Notre deuxième objectif est de montrer que cette intersection $\tilde{\mu}(\widetilde{M}) \cap \mathfrak{t}_+^*$ est un polyèdre convexe fermé de $\mathfrak{t}_+^*$ (théorème 4.1).

Lorsque l'action est hamiltonienne, ce sont là les théorèmes de convexité de Atiyah-Guillemin-Sternberg-Kirwan ([1], [15], [18]) dont nous redonnerons au passage une démonstration (théorèmes 3.16 et 4.8). Lorsque l'action est localement hamiltonienne, ces résultats fournissent une solution au problème ouvert du §II.3.1 de [6].

L'action d'un tore sur (M, ω) est dite coïsothrope (ou sans multiplicité, c.f. [16]) si il existe une orbite dans M qui est coïsothrope. Ces actions sont en quelque sorte les plus petites possibles. Notre dernier objectif est de décrire les actions coïsootropes des tores sur les variétés symplectiques compactes. Nous montrerons que ces actions sont le produit d'une action hamiltonienne coïsothrope et d'une action anhamiltonienne coïsothrope, et que les actions anhamiltoniennes coïsootropes sont des actions d'un tore central sur une nilvariété symplectique (théorème 6.6). Quant aux actions hamiltoniennes coïsootropes, elles sont entièrement déterminées par le polyèdre convexe image de l'application moment, c'est un théorème de Delzant ([7]) dont nous redonnerons au passage une démonstration (théorème 6.5).

Pour atteindre ces objectifs, nous rappellerons la description d'une action symplectique de K au voisinage d'une orbite (proposition 1.9) et nous calculerons le moment de cette action (proposition 2.17). Nous en avons détaillé la démonstration qui n'existe dans la littérature que sous l'hypothèse hamiltonienne ([14]). Nous avons aussi détaillé la démonstration de nombreux résultats bien connus... ce qui permet de voir aussi ce texte comme une introduction à la théorie des actions symplectiques des groupes compacts.

Table des matières

1 Variétés symplectiques	4
1.1 Modèle local au voisinage d'un point	4
1.2 Modèle local au voisinage d'une sous-variété	5
1.3 Modèle local pour un fibré vectoriel	7
1.4 Modèle local au voisinage d'une orbite	9
2 Actions symplectiques	13
2.1 Hamiltoniens	13
2.2 Application moment	14
2.3 Actions hamiltoniennes	15
2.4 Exemples	18
2.5 Actions anhamiltoniennes et noyau du cocycle	20
2.6 L'application moment pour les modèles locaux	21
3 Le moment pour l'action d'un tore	23
3.1 Convexité du moment	23
3.2 Action linéaire symplectique du tore	24
3.3 Etude locale	26
3.4 La projection sur l'espace des feuilles est ouverte	27
3.5 Structure euclidienne convexe sur l'espace des feuilles	28
3.6 L'espace des feuilles est séparé	29
3.7 Variétés à bord euclidiennes convexes	32
3.8 Action hamiltonienne d'un tore	34
3.9 Action symplectique d'un tore	35
4 Le moment pour l'action d'un groupe compact	37
4.1 Convexité du moment	37
4.2 Points réguliers	38
4.3 Réduction à l'action du tore	39
4.4 Connexité des fibres	41
4.5 Convexité du moment pour une action hamiltonienne	41
4.6 Convexité du moment pour une action symplectique	42
5 Actions coïsootropes	45
5.1 Orbites coïsootropes et commutativité du crochet de Poisson.	45
5.2 Actions coïsootropes et fibres du moment	47
5.3 Actions coïsootropes et modèle local	49
6 Actions coïsootropes d'un tore	50
6.1 Nilvariétés symplectiques	50
6.2 Description des actions coïsootropes d'un tore	51
6.3 Connexité des groupes d'isotropie	52
6.4 Actions coïsootropes adaptées	55
6.5 Le faisceau des automorphismes	57
6.6 Existence et unicité des actions coïsootropes adaptées	59
6.7 Les automorphismes du revêtement universel	62

1 Variétés symplectiques

Le but de cette partie est de décrire les expressions locales pour une forme symplectique ω au voisinage d'une sous-variété N de M (théorème 1.2). Le cas où N est un point est le classique lemme de Darboux (lemme 1.1). Cette description se généralisera sans difficulté à une situation équivariante.

Le cas où N est une orbite (proposition 1.9) jouera un rôle central dans les parties suivantes.

1.1 Modèle local au voisinage d'un point

Une variété symplectique (M, ω) est une variété M de dimension paire $2n$ et de classe C^∞ qui est munie d'une 2-forme ω fermée non dégénérée, c'est à dire telle que $d\omega = 0$ et telle que la $2n$ -forme $\omega^{\wedge n}$ est une forme volume.

Lemme 1.1 (Darboux) *Au voisinage de tout point d'une variété symplectique, il existe un système de coordonnées $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ tel que $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.*

Pour tous champs de vecteurs X, Y sur M , on note i_X le produit intérieur par X , L_X la dérivée de Lie dans la direction X et $[X, Y]$ le crochet de Lie de X et Y de sorte que

$$\begin{aligned} L_X &= i_X d + di_X , \\ L_{[X, Y]} &= L_X L_Y - L_Y L_X \text{ et} \\ i_{[X, Y]} &= L_X i_Y - i_Y L_X . \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 1.1 (Weinstein) Dans un système de coordonnées centré autour de ce point m , écrivons $\omega = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$. Posons $\omega_0 = \sum_{i < j} f_{ij}(m) dx_i \wedge dx_j$ et $\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$. Si le voisinage de m est suffisamment petit, ω_t est non dégénérée et on peut écrire $\omega_0 - \omega = d\eta$ où η est une 1-forme telle que $\eta_m = 0$. Soit X_t le champ de vecteurs tel que $i_{X_t} \omega_t = \eta$ et φ_t la famille à un paramètre de difféomorphismes au voisinages de m telle que $\varphi_0 = Id$ et $\frac{d}{dt} \varphi_t = X_t \varphi_t$. On a alors

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_t) = \varphi_t^*(L_{X_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t) = \varphi_t^*(d\eta + \omega - \omega_0) = 0 .$$

Donc en intégrant, on obtient $\varphi_1^* \omega = \omega_0$. Un changement linéaire de coordonnées permet alors d'écrire ω_0 sous la forme annoncée. $\square$

Remarque Cette démonstration semble basée sur un miracle. Il n'en est rien : l'idée consiste à inclure ω dans une famille à un paramètre de formes symplectiques ω_t et de rechercher une famille à un paramètre φ_t de difféomorphismes tels que $\varphi_t^* \omega_t$ est constante, le choix du champ de vecteurs X_t s'impose alors à nous.

1.2 Modèle local au voisinage d'une sous-variété

Soit M une variété C^∞ , $N \xrightarrow{j} M$ une sous-variété compacte. On note $\Omega^p = \Omega^p(M)$ l'ensemble des p -formes différentielles sur M , c'est l'ensemble $\Gamma(M, \Lambda^p T^*M)$ des sections C^∞ du fibré $\Lambda^p T^*M \rightarrow M$. On note $\Gamma(N, \Lambda^p T^*M)$ l'ensemble des sections C^∞ de ce fibré au dessus de N ,

$$\pi : \Gamma(N, \Lambda^p T^*M) \rightarrow \Gamma(N, \Lambda^p T^*N)$$

la projection naturelle. Si α est une p -forme sur M , on note

$$\alpha|_N \in \Gamma(N, \Lambda^p T^*M)$$

sa restriction à N ; la p -forme $j^*(\alpha)$ image inverse de α est alors donnée par l'égalité :

$$j^*(\alpha) = \pi(\alpha|_N) .$$

Remarquons que, si ω est une 2-forme symplectique sur M , sa restriction $\omega|_N$ est non dégénérée en tout point de N et $\pi(\omega|_N)$ est une 2-forme fermée sur N . Le théorème ci-dessous est une version équivariante d'un résultat de Weinstein (voir [14],[28])

Théorème 1.2 (Modèle local pour une sous-variété) *Soit M une variété C^∞ , $N \xrightarrow{j} M$ une sous-variété compacte et $\beta \in \Gamma(N, \Lambda^2 T^*M)$ tel que β est non dégénérée en tout point et tel que $\pi(\beta)$ est une 2-forme fermée sur N .*

a) (Existence) Il existe un voisinage ouvert U de N et une forme symplectique ω sur U telle que $\omega|_N = \beta$.

b) (Unicité) Soient ω_0, ω_1 deux formes symplectiques définies au voisinage de N telles que $\omega_0|_N = \omega_1|_N$. Alors il existe deux voisinages ouverts U_0, U_1 de N et un difféomorphisme ψ de U_0 sur U_1 tels que

- $\psi^*\omega_1 = \omega_0$
- $\forall x \in N, \psi(x) = x$ et $D\psi(x) = Id$.

c) (Equivariance) Soit K un groupe compact qui agit sur M . Si N et β sont K -invariants, on peut choisir U et ω K -invariants. Si en outre ω_0 et ω_1 sont K -invariants, on peut choisir U_0, U_1 K -invariants et ψ commutant à l'action de K .

Remarque Lorsque $N = \{\text{point}\}$ et $K = \{e\}$, l'unicité est le lemme de Darboux. Si on cherche à reprendre la démonstration de ce lemme pour démontrer l'unicité dans ce cadre plus général, on a besoin du lemme à la de Rham suivant avec $\kappa = \omega$.

Lemme 1.3 (à la deRham) *Soit M une variété C^∞ , $N \xrightarrow{j} M$ une sous-variété compacte et $\kappa \in \Omega^p(M)$ une p -forme fermée telle que $j^*(\kappa) = 0$. Alors il existe une $(p-1)$ -forme η dans un voisinage U de N telle que*

$$d\eta = \kappa \text{ et } \eta|_N = 0 .$$

Soit K un groupe compact qui agit sur M . Si N et κ sont K -invariants, on peut choisir U et η K -invariants.

L'idée de départ de la démonstration que l'on réutilisera souvent par la suite est l'existence d'un voisinage tubulaire U de N c'est à dire d'un voisinage U difféomorphe à l'espace total F d'un fibré vectoriel $p : F \rightarrow N$, le difféomorphisme identifiant N à la section nulle de ce fibré. La construction d'un tel difféomorphisme est classique : elle s'obtient à l'aide d'une métrique riemannienne sur M , du fibré normal à N dans M et de l'application exponentielle. En choisissant cette métrique K -invariante, cette construction fournit un fibré K -équivariant, c'est à dire tel que l'action induite de K sur F commute à la projection p et est linéaire dans les fibres.

Démonstration du lemme 1.3 On peut donc supposer que M est l'espace total d'un fibré vectoriel $p : M \rightarrow N$ et que $N \xrightarrow{j} M$ est la section nulle. On note f_t la multiplication par t dans la fibre. C'est une rétraction C^∞ de M sur N au sens suivant :

$$f_0(M) \subset N \quad , \quad f_t|_N = Id \quad \text{et} \quad f_1 = Id_M.$$

D'autre part, l'application $s \rightarrow g_s = f_{e^s}$ est le flot d'un champ de vecteurs E sur M appelé *champ d'Euler du fibré*. Introduisons l'opérateur $I : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p-1}$ donné par

$$I(\alpha) = \int_0^1 f_t^*(i_E(\alpha)) \frac{dt}{t}.$$

Remarquons que toute p -forme $\alpha \in \Omega^p$ vérifie $i_E(\alpha)|_N = 0$ et donc $f_0^*(i_E(\alpha)) = 0$. On en déduit que $I(\alpha)$ est bien défini et que $I(\alpha)|_N = 0$. On calcule alors

$$\begin{aligned} \alpha - f_0^*(\alpha) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(f_t^*(\alpha)) dt \\ &= \int_0^1 f_t^*(L_E(\alpha)) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 f_t^*(i_E d\alpha + di_E \alpha) \frac{dt}{t} \\ &= Id\alpha + dI\alpha. \end{aligned}$$

Comme on a les égalités $f_0^*(\kappa) = 0$ et $d\kappa = 0$, ce calcul avec $\alpha = \kappa$ donne $\kappa = dI(\kappa)$. Donc la $(p-1)$ -forme $\eta = I(\kappa)$ convient. En outre, si κ est K -invariante, η l'est aussi. $\square$

Remarque Une partie du mystère de cette démonstration disparaît si on se souvient que l'opérateur I est celui que l'on utilise pour montrer que l'espace total M du fibré a même cohomologie de de Rham que la base ou si on jette un coup d'oeil à la remarque 3) de la proposition 1.5.

Démonstration du théorème

- **Existence** C'est un cas particulier du lemme suivant.

Lemme 1.4 Soit M une variété C^∞ , $N \xrightarrow{j} M$ une sous-variété compacte et $\beta \in \Gamma(N, \Lambda^p T^*M)$ tel que $\pi(\beta)$ est une p -forme fermée sur N .

Alors il existe un voisinage ouvert U de N et une p -forme fermée α sur U telle que $\alpha|_N = \beta$.

Soit K un groupe compact qui agit sur M . Si N et β sont K -invariants, on peut choisir U et α K -invariants.

Démonstration Soit $\alpha' \in \Omega^p$ une p -forme sur M telle que $\alpha'|_N = \beta$. On prend alors $\alpha = \alpha' - \eta$ où $\eta \in \Omega^p$ vérifie $\eta|_N = 0$ et $d\eta = d\alpha'$. L'existence de η est assurée par le lemme 1.3 dans un voisinage U de N .

Si β est K -invariant, on peut choisir α' K -invariante, quitte à la remplacer par une moyenne de ses translatées. La $(p-1)$ -forme η est alors K -invariante et α aussi. $\square$

Fin de la démonstration du théorème

- **Unicité** C'est la même démonstration que le lemme de Darboux :

Posons $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Le lemme 1.3 permet de trouver un voisinage U de N et une 1-forme η telle que $d\eta = \omega_0 - \omega$ et $\eta|_N = 0$. Soit alors X_t le champ de vecteurs tel que $i_{X_t}\omega_t = \eta$ et φ_t la famille à un paramètre de difféomorphismes au voisinage de la variété compacte N telle que $\varphi_0 = Id$ et $\frac{d}{dt}\varphi_t = X_t\varphi_t$. Comme les champs de vecteurs X_t sont nuls sur N le 1-jet de φ_1 sur N est celui de l'identité. D'autre part on peut reproduire le même calcul :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = \varphi_t^*(L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t) = \varphi_t^*(d\eta + \omega - \omega_0) = 0.$$

Puis en intégrant, $\varphi_1^*\omega = \omega_0$.

- **Équivariance** Si ω_0 et ω_1 sont K -invariants, on peut choisir U et η K -invariants et φ_1 est un difféomorphisme entre deux voisinages K -invariants de N qui commute à l'action de K . Ceci termine la démonstration du théorème. $\square$

1.3 Modèle local pour un fibré vectoriel

D'un point de vue strictement logique, cette section est inutile. Mais c'est elle qui nous guidera pour la construction des modèles locaux au voisinage d'une orbite.

Lorsque M est l'espace total d'un fibré vectoriel $M \xrightarrow{p} N$ et que $N \xrightarrow{j} M$ est la section nulle, on va préciser le théorème des modèles locaux en affirmant que la forme symplectique peut être choisie quadratique dans les fibres.

Introduisons tout d'abord quelques notations. Soient $\Omega^p = \Omega^p(M)$, E le champ d'Euler du fibré et

$$\Omega_{[k]}^p = \{\alpha \in \Omega^p / L_E\alpha = k\alpha\}$$

l'espace des p -formes homogènes de degré k le long des fibres. Les espaces $\Omega_{[k]}^p$ sont non nuls si et seulement si le réel k est un entier positif. L'espace $\Omega_{pol}^p = \sum_{k \geq 0} \Omega_{[k]}^p$ est l'espace des p -formes sur M polynomiales le long des fibres. On pose

$$\Omega_{[\leq k]}^p = \sum_{j \leq k} \Omega_{[j]}^p$$

et on note $S^2(M)^* \rightarrow N$ le fibré sur N des formes quadratiques du fibré $M \xrightarrow{p} N$. Remarquons que l'espace $\Omega_{[2]}^1$ contient naturellement l'espace $\Gamma(N, S^2(M)^* \otimes T^*N)$.

Proposition 1.5 (Modèle local pour un fibré) Soit $M \xrightarrow{p} N$ un fibré vectoriel, $N \xrightarrow{j} M$ la section nulle et $\beta \in \Gamma(N, \Lambda^2 T^* M)$ tel que $\pi(\beta)$ est une 2-forme fermée sur N .

a) (Existence) Il existe une 2-forme fermée $\omega \in \Omega_{[\leq 2]}^2$ sur M telle que $\omega|_N = \beta$.

b) (Unicité) Soient $\omega' \in \Omega_{[\leq 2]}^2$ une 2-forme fermée sur M telle que $\omega'|_N = 0$, alors il existe $\eta \in \Gamma(N, S^2(M)^* \otimes T^* N)$ tel que $\omega' = d\eta$.

c) (Equivariance) Soit K un groupe compact d'automorphismes du fibré $M \xrightarrow{p} N$. Si N et β (resp. ω') sont K -invariants, on peut choisir ω (resp. η) K -invariant.

Nous aurons besoin de notations supplémentaires. Soit

$$I = \{f \in C^\infty(M) / f|_N = 0\}$$

et $\Omega_k^p = I^k \Omega^p$ l'espace des p -formes sur M qui sont nulles à l'ordre $k-1$ le long de N . On a une filtration décroissante

$$\Omega^p = \Omega_0^p \supset \cdots \supset \Omega_k^p \supset \Omega_{k+1}^p \supset \cdots$$

Et on a les inclusions

$$\Omega_{[k]}^p \subset \Omega_{k-p}^p \quad \forall k \geq p$$

$$\Omega_{[k]}^p \cap \Omega_{k+1}^p = \{0\}.$$

La filtration $\Omega_l^\bullet$ n'est pas stable par différentiation extérieure, on a seulement $d\Omega_k^\bullet \subset \Omega_{k-1}^\bullet$. On introduit donc une autre filtration décroissante :

$$\Omega_{[\geq k]}^p = \left(\sum_{j \geq k} \Omega_{[j]}^p \right) + \Omega_k^p.$$

Comme d et i_E commutent avec L_E , ils préservent les espaces $\Omega_{[k]}^\bullet$, $\Omega_{[\leq k]}^\bullet$ et $\Omega_{[\geq k]}^\bullet$. En outre, on a la décomposition

$$\Omega^p = \Omega_{[\leq k]}^p \oplus \Omega_{[\geq k+1]}^p.$$

Démonstration de la proposition 1.5 a) Le théorème 1.2 assure qu'il existe une 2-forme fermée $\kappa \in \Omega^2$ telle que $\kappa|_N = \beta$. Ecrivons $\kappa = \omega + \omega''$ avec $\omega \in \Omega_{[\leq 2]}^2$ et $\omega'' \in \Omega_{[\geq 3]}^2$. On a encore $d\omega = d\omega'' = 0$. En outre, on a $\omega''|_N = 0$ donc $\omega|_N = \beta$.

b) On peut écrire $\omega' = \omega'_0 + \omega'_1 + \omega'_2$ avec $\omega'_k \in \Omega_{[k]}^2$. On a donc $d\omega'_k = 0$ et $\omega'_k|_N = 0$, pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$. Etudions les formes ω'_k séparément.

- $k = 0$. Comme $\omega'_0|_N = 0$, et que ω'_0 est constant le long des fibres, on a $\omega'_0 = 0$.

- $k = 1$. Soit $\eta_1 = i_E(\omega'_1)$. On a $\omega'_1 = d\eta_1$. La 1-forme η_1 vérifie $\eta_1|_N = 0$ et $d\eta_1|_N = 0$. Donc η_1 est dans $\Omega_{[1]}^1 \cap \Omega_2^1 = \{0\}$. Donc $\eta_1 = 0$.

- $k = 2$. Soit $\eta_2 = \frac{1}{2}i_E(\omega'_2)$. On a $\omega'_2 = d\eta_2$. La 1-forme η_2 vérifie $\eta_2|_N = 0$ et $d\eta_2|_N = 0$. Donc η_2 est dans $\Omega_{[2]}^1 \cap \Omega_2^1 \simeq \Gamma(N, S^2(M)^* \otimes T^* N)$. $\square$

Remarques 1) La 2-forme fermée ω donnée par la proposition 1.5 peut s'écrire

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$$

avec $\omega_k \in \Omega_{[k]}^2$. Notons $\beta_k := \omega_k|_N$. L'égalité

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$$

correspond à la décomposition :

$$\Gamma(N, \Lambda^2 T^* M) = \Gamma(N, \Lambda^2 T^* N) \oplus \Gamma(N, T^* N \otimes M^*) \oplus \Gamma(N, \Lambda^2 M^*) .$$

On a l'égalité $\omega_0 = p^*(\omega)$. Et, pour $k = 1, 2$, les 2-formes ω_k sont exactes : on peut écrire $\omega_k = d\eta_k$ avec $\eta_k \in \Omega_{[k]}^1$.

2) Lorsque β est non dégénérée, on peut choisir le prolongement ω dans $\Omega_{[\leq 2]}^2$ symplectique sur M entier.

3) Les calculs dans cette démonstration ne sont pas si différents de ceux du lemme 1.3. En effet, lorsque α est dans Ω_k^p , l'opérateur I est donné par $I(\alpha) = 0$ si $k = 0$ et $I(\alpha) = \frac{1}{k} i_E(\alpha)$ si $k \neq 0$.

1.4 Modèle local au voisinage d'une orbite

Décrivons de façon plus précise le modèle local lorsque N est une orbite.

Soient K un groupe compact qui agit sur une variété M . Soient x un point de M , $N = Kx$ l'orbite de ce point et $H = \{k \in K / kx = x\}$ son groupe d'isotropie. D'après le théorème 1.2, construire un modèle local, c'est construire dans un voisinage de N une 2-forme fermée K -invariante ω dont la restriction $\beta = \omega|_N$ est donnée, c'est-à-dire dont la valeur $b = \omega_x$ au point x est donnée.

Comme H est compact, on peut trouver un supplémentaire H -invariant V_1 de $V_0 := T_{x_0}N$ dans $V := T_{x_0}M$. Notons $K \times_H V_1 \xrightarrow{p} K/H$ le fibré K -équivariant sur $K/H \simeq N$ dont la représentation d'isotropie est V_1 . Ce fibré est aussi appelé fibré induit de V_1 . Par définition, $K \times_H V_1$ est le quotient $H \backslash (K \times V_1)$ où l'action de H sur $K \times V_1$ est donnée par $h.(k, v) = (kh^{-1}, kv)$. On a vu qu'il existe un difféomorphisme K -équivariant d'un voisinage de N dans un voisinage de la section nulle du fibré induit $K \times_H V_1 \xrightarrow{p} K/H$ qui envoie V_1 sur l'espace tangent aux fibres. On fera désormais le choix du supplémentaire H -invariant V_1 à l'aide du lemme suivant.

Lemme 1.6 (Décomposition de V) *Soient H un groupe compact, (V, b) un H -module symplectique et $V_0 \subset V$ un sous-espace H -invariant. Alors, il existe un supplémentaire H -invariant V_1 de V_0 dans V tel que, en notant pour $k = 0, 1$, $U_k = V_k \cap V_k^b$ et $W_k = V_k \cap V_{1-k}^b$, on a les égalités :*

$$V_0 = U_0 \oplus W_0 \text{ et } V_1 = U_1 \oplus W_1 .$$

Remarques 1) “ H -module symplectique” signifie “espace vectoriel V de dimension finie munie d'une forme bilinéaire symplectique b et d'une action linéaire de H qui préserve b ”. Pour tout sous-espace vectoriel W de V , on a noté $W^b := \{v \in V / b(v, W) = 0\}$ l'orthogonal de W pour la forme bilinéaire b .

2) On a alors la décomposition $b = b_0 + b_1 + b_2$ où $b_0 \in \Lambda^2 W_0^*$ est une forme symplectique sur W_0 , où $b_1 \in U_0^* \otimes U_1^*$ est une dualité non dégénérée entre U_0 et U_1 et où $b_2 \in \Lambda^2 W_1^*$ est une forme symplectique sur W_1 .

Démonstration du lemme 1.6

1^{er} cas : V_0 est lagrangien On fixe tout d'abord un supplémentaire lagrangien V_0' à V_0 dans V . Celui-ci s'identifie naturellement à l'aide de b au dual de V_0 . L'ensemble des sous espaces lagrangiens de V supplémentaires à V_0 s'identifie alors à l'espace vectoriel des applications bilinéaires symétriques de V_0' dans V_0 . Le groupe compact H opère alors sur cet espace par des transformations affines. Il y a donc un point fixe : c'est le lagrangien V_1 cherché.

Cas général Notons $U_0 := V_0 \cap V_0^b$. Le sous-espace U_0 admet un supplémentaire H -invariant W_0 dans V_0 et un supplémentaire H -invariant W_1 dans V_0^b . La restriction de b à $W_0 \oplus W_1$ est non dégénérée. Donc la restriction de b à $W_0^b \cap W_1^b$ est aussi non dégénérée. Or U_0 est lagrangien dans $W_0^b \cap W_1^b$, il admet donc un supplémentaire H -invariant lagrangien U_1 dans $W_0^b \cap W_1^b$. On prend $V_1 = U_1 \oplus W_1$. $\square$

Pour construire notre forme ω nous aurons besoin d'un rappel sur les formes basiques.

Soit G un groupe de Lie. Un G -fibré principal est un fibré $E \xrightarrow{q} B$ muni d'une action à droite de G qui est simplement transitive sur les fibres. Une forme différentielle α sur l'espace total E d'un tel fibré est dite *basique* si elle est G -invariante et si, pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, on a $i_{X_\xi} \alpha = 0$ où X_ξ est le champ de vecteurs sur E dont le flot est l'action sur E de $\exp(t\xi)$. La terminologie est motivée par le lemme suivant.

Lemme 1.7 (Formes basiques) *Soit $E \xrightarrow{q} B$ un G -fibré principal. Une forme différentielle $\alpha^\#$ sur E est basique si et seulement si il existe une forme différentielle α sur B telle que $\alpha^\# = q^* \alpha$.*

La forme α est alors unique.

Démonstration On peut supposer que $E = B \times G$. L'assertion est alors évidente. $\square$

Les formes basiques permettent donc de construire des formes différentielles sur la base B en travaillant dans E .

Le lemme suivant avec $\sigma = j^* \omega$ décrit le sous-espace U_0 .

Lemme 1.8 (Espaces homogènes symplectiques) *Soit K un groupe de Lie qui agit transitivement sur une variété C^∞ N en préservant une 2-forme fermée σ . Soit x un point de N , H son groupe d'isotropie. σ_x est donc une forme bilinéaire antisymétrique sur $T_x N \simeq \mathfrak{k}/\mathfrak{h}$.*

a) Le noyau de σ_x s'identifie à $\mathfrak{l}/\mathfrak{h}$ où $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{k}$ contenant $\mathfrak{h}$.

b) On suppose que le sous-groupe L engendré par H et $\exp(\mathfrak{l})$ est fermé. Alors σ est l'image inverse par la fibration $K/H \rightarrow K/L$ d'une forme symplectique K -invariante sur K/L .

Démonstration Quitte à relever σ en une 2-forme sur K , on peut supposer que $H = \{e\}$. Identifions $\mathfrak{k}$ à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur K .

a) Comme σ est fermée et K -invariante à gauche, on a

$$\sigma([\xi, \eta], \zeta) + \sigma([\eta, \zeta], \xi) + \sigma([\zeta, \xi], \eta) = 0 \quad \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{k}.$$

On en déduit que le noyau de σ_x est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{k}$.

b) Par définition, on a, pour tout ξ dans $\mathfrak{l}$, $i_\xi \sigma = 0$. Comme σ est fermée, on en déduit $L_\xi \sigma = 0$. Donc σ est basique relativement au L -fibré principal $K \rightarrow K/L$. Il suffit alors d'utiliser le lemme 1.7. $\square$

Il résulte de ce qui précède que le sous-espace V_1 est isomorphe à $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \oplus W_1$ où W_1 est un H -module symplectique. Nous disposons désormais de suffisamment d'éléments pour que la construction suivante du modèle local ne soit plus mystérieuse.

Construction du modèle local Soit K un groupe de Lie. On se donne

- Un espace N homogène sous l'action de K . On fixe un point x de N et on suppose que le groupe d'isotropie H en ce point est compact. On choisit un supplémentaire H -invariant à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{k}$ et on note τ la projection sur $\mathfrak{h}$ parallèlement à celui-ci.

- Une 2-forme fermée K -invariante σ sur N . On note $\mathfrak{l}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{k}$ telle que $\mathfrak{l}/\mathfrak{h}$ est le noyau de σ_x , on choisit un supplémentaire H -invariant à $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{k}$ et on note τ' la projection sur $\mathfrak{l}$ parallèlement à celui-ci.

- Un H -module symplectique W . On note b la forme bilinéaire symplectique H -invariante sur W .

On pose

$$X = K \times_H ((\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times W)$$

l'espace total du fibré induit $X \xrightarrow{p} N \simeq K/H$ et on identifie N à l'image de la section nulle de ce fibré vectoriel. On note comme précédemment $U_0 \simeq \mathfrak{l}/\mathfrak{h}$, W_0 un supplémentaire H -invariant à U_0 dans $V_0 := T_x N$, $U_1 := (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$ et $W_1 = W$. On va construire sur X une forme symplectique K -invariante ω telle que $\omega_x = b_0 + b_1 + b_2$ où b_0 est la forme bilinéaire symplectique sur W_0 égale à σ_x , où b_1 est la dualité entre U_0 et U_1 et où b_2 est la forme bilinéaire symplectique b sur W_1 . La forme symplectique ω est somme de trois formes fermées K -invariantes $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$. On prend $\omega_0 = p^* \sigma$. Pour construire ω_1 et ω_2 , on pose $Y = K \times (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times W$. La projection naturelle $Y \xrightarrow{q} X$ est un H -fibré principal. On considère les 1-formes $\eta_1^\sharp$ et $\eta_2^\sharp$ sur Y données par les formules, pour tout $y = (k, \nu, w)$ dans Y et tout (ξ', ν', w') dans $T_y Y \simeq \mathfrak{k} \times (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times W$,

$$(\eta_1^\sharp)_{(k, \nu, w)}(\xi', \nu', w') = \nu(\tau'(\xi')) \quad ,$$

$$(\eta_2^\sharp)_{(k, \nu, w)}(\xi', \nu', w') = \frac{1}{2}b(w, w' - \tau(\xi')w) \quad ,$$

Ces 1-formes sont basiques et K -invariantes. Il existe donc des 1-formes K -invariantes η_1 et η_2 sur X telles que $\eta_1^\sharp := q^* \eta_1$ et $\eta_2^\sharp := q^* \eta_2$. On prend alors $\omega_1 = d\eta_1$ et $\omega_2 = d\eta_2$.

On notera $X(N, \sigma, W)$ la variété X munie de la forme symplectique ω et $Y(N, \sigma, W)$ la variété Y munie de la 2-forme fermée $\omega^\sharp := \omega_0^\sharp + \omega_1^\sharp + \omega_2^\sharp$ où $\omega_i^\sharp := q^*\omega$.

On peut résumer la discussion ci-dessus en la proposition suivante.

Proposition 1.9 (Modèle local pour une orbite) *Soit K un groupe compact qui agit sur une variété symplectique (M, ω) en préservant ω . Soient x un point de M , H son groupe d'isotropie, $N = K.x \xrightarrow{j} M$ l'orbite de ce point, σ la 2-forme fermée K -invariante sur cette orbite $\sigma = j^*\omega$ et W le H -module symplectique $W = T_x N^\omega / (T_x N \cap T_x N^\omega)$. Alors il existe*

- un voisinage K -invariant U de N dans M ,
- un voisinage K -invariant U' de N dans $X(N, \sigma, W)$ et
- un difféomorphisme symplectique K -équivariant de U sur U' égal à l'identité sur N .

Remarque Pour démontrer cette proposition, nous avons eu uniquement besoin de la partie unicité du théorème 1.2. La proposition 1.5 ne nous a été utile que comme guide pour deviner l'expression de la forme symplectique sur $X(N, \sigma, W)$.

2 Actions symplectiques

Soient M une variété C^∞ munie d'une 2-forme fermée ω et K un groupe de Lie agissant sur M (bien sûr de façon C^∞) en préservant la 2-forme ω . Lorsque ω est symplectique, on dira en bref que (M, ω) est une K -variété symplectique. C'est le cas le plus intéressant, mais nous n'aurons pas besoin de cette hypothèse.

Le but de cette partie est d'associer à une telle action une application moment, et de la calculer pour les modèles locaux.

2.1 Hamiltoniens

Soit M une variété C^∞ connexe. On note $\widetilde{M} \xrightarrow{p} M$ son revêtement universel et $\Gamma = \pi_1(M)$ son groupe fondamental que l'on regarde comme un groupe de difféomorphismes de $\widetilde{M}$. Soit ω une 2-forme fermée sur M et $\widetilde{\omega} = p^*(\omega)$.

Soit $X \in \chi(M)$ un champ de vecteurs sur M qui préserve ω c'est-à-dire tel que $L_X \omega = 0$. Comme $L_X = i_X d + di_X$, la 1-forme $i_X \omega$ est fermée et on peut, au moins localement, trouver une fonction dont la différentielle est $i_X \omega$. Plus précisément, notons $\widetilde{X} = p^*(X)$ le champ de vecteurs relevé sur $\widetilde{M}$ et $\widetilde{\varphi}^X : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$d\widetilde{\varphi}^X = i_{\widetilde{X}} \widetilde{\omega} .$$

On dit que $\widetilde{\varphi}^X$ est un *hamiltonien* pour $\widetilde{X}$. Il est bien défini à une constante additive près. Il existe donc un morphisme de groupes $h_X \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ tel que

$$\widetilde{\varphi}^X \circ \gamma = \widetilde{\varphi}^X + h_X(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma .$$

De même, on dit qu'une fonction $\varphi^X : M \rightarrow \mathbb{R}$ est un *hamiltonien* pour X si $d\varphi^X = i_X \omega$. Une telle fonction existe si et seulement si $h_X \equiv 0$.

Lemme 2.1 (Hamiltonien du crochet) *Soient X, Y deux champs de vecteurs sur M qui préservent la 2-forme fermée ω . Alors le crochet $[X, Y]$ préserve ω et la fonction $\omega(Y, X)$ est un hamiltonien pour $[X, Y]$.*

Démonstration a) On a $L_{[X, Y]} \omega = L_X L_Y \omega - L_Y L_X \omega = 0$.

b) D'autre part, comme $i_Y \omega$ est fermée, on a
 $i_{[X, Y]} \omega = (L_X i_Y - i_Y L_X)(\omega) = (i_X d + di_X) i_Y \omega = di_X i_Y \omega = d(\omega(Y, X))$. □

Les mêmes calculs permettent de démontrer :

Exercice 2.2 a) *Soient X, Y deux champs de vecteurs sur M qui préservent une 1-forme η . Montrer que $[X, Y]$ préserve η et qu'on a l'égalité $\eta([X, Y]) = d\eta(Y, X)$.*

b) *Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs sur M qui préservent la 2-forme fermée ω . Montrer l'égalité : $\omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y) = 0$.*

Remarque Lorsque ω est symplectique, la construction inverse est possible : à toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, on peut associer son *gradient symplectique*, c'est le champ de vecteurs X^φ sur M défini par $i_{X^\varphi}(\omega) = d\varphi$. Comme ω est non dégénérée, ce champ X^φ est défini de façon unique et, comme ω est fermée, le champ X^φ préserve ω . On peut alors introduire le *crochet de Poisson* $\{\varphi, \psi\}$ de deux fonctions $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ par l'égalité $\{\varphi, \psi\} = L_{X^\psi}(\varphi) = \omega(X^\varphi, X^\psi)$. Le lemme ci-dessus prouve que $X^{\{\varphi, \psi\}} = -[X^\varphi, X^\psi]$. On en déduit facilement que le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi et que l'application $\varphi \rightarrow -X^\varphi$ est un morphisme d'algèbre de Lie de $(C^\infty(M), \{.,.\})$ dans $(\chi(M), [.,.])$. En coordonnées de Darboux 1.1, on a $X^\varphi = \sum_i (\partial_{q_i} \varphi \partial_{p_i} - \partial_{p_i} \varphi \partial_{q_i})$ et $\{\varphi, \psi\} = \sum_i (\partial_{p_i} \varphi \partial_{q_i} \psi - \partial_{q_i} \varphi \partial_{p_i} \psi)$.

2.2 Application moment

Soit M une variété C^∞ connexe, ω une 2-forme fermée sur M et K un groupe de Lie connexe qui agit sur M en préservant ω .

Pour tout élément ξ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K , on note X_ξ le champ de vecteurs sur M donné par

$$(X_\xi \varphi)(m) = \frac{d}{dt} \varphi(\exp(t\xi)x)|_{t=0} \quad \forall \varphi \in C^\infty(M), \quad \forall x \in M.$$

On a les égalités, encore avec un signe moins :

$$[X_\xi, X_\eta] = -X_{[\xi, \eta]}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{k}.$$

Autrement dit, l'application $\xi \rightarrow -X_\xi$ est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{k}$ dans $\chi(M)$. On note $\widetilde{X}_\xi = p^*(X_\xi)$ et $\tilde{\mu}^\xi \in C^\infty(\widetilde{M})$ un hamiltonien pour $\widetilde{X}_\xi$.

On peut supposer le choix de ces hamiltoniens faits de sorte que l'application $\xi \rightarrow \tilde{\mu}^\xi$ soit linéaire. On note alors $\tilde{\mu} \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathfrak{k}^*)$ l'application donnée par

$$\tilde{\mu}(x)(\xi) = \tilde{\mu}^\xi(x) \quad \forall x \in \widetilde{M}.$$

On dit que $\tilde{\mu}$ est le *moment* de l'action de $\widetilde{K}$ sur $\widetilde{M}$. Il est bien défini à addition près d'une constante dans $\mathfrak{k}^*$.

Il existe donc un morphisme de groupes $h \in \text{Hom}(\Gamma, \mathfrak{k}^*)$, appelé *morphisme d'holonomie*, tel que

$$\tilde{\mu} \circ \gamma = \tilde{\mu} + h(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Le morphisme d'holonomie ne dépend pas du choix du moment $\tilde{\mu}$. Le groupe image $h(\Gamma) \subset \mathfrak{k}^*$ est appelé *groupe d'holonomie*.

Etudions maintenant le lien entre l'application moment et l'action de K . Soit $\widetilde{K}$ le revêtement universel de K . Il agit sur $\widetilde{M}$ en préservant la 2-forme fermée $\tilde{\omega}$. Il agit aussi sur $\mathfrak{k}^*$ par l'action coadjointe. Nous noterons encore ces actions à l'aide d'un simple point.

Pour tout élément k de $\widetilde{K}$ l'application $x \rightarrow k.\tilde{\mu}(k^{-1}.x)$ est aussi un moment. Il existe donc une constante C_k dans $\mathfrak{k}^*$ telle que, pour tout x dans $\widetilde{M}$, on a

$$\tilde{\mu}(k.x) = k.\tilde{\mu}(x) + C_k.$$

On a l'égalité $C_{kk'} = C_k + k.C_{k'}$ pour tout k, k' dans $\widetilde{K}$. Autrement dit, C est un 1-cocycle de $\widetilde{K}$ dans $\mathfrak{k}^*$.

En outre, si on modifie le choix du moment $\tilde{\mu}^\xi$ d'une constante additive $\lambda \in \mathfrak{k}^*$, le cocycle est modifié par le cobord C' donné par la formule $C'_k := \lambda - k.\lambda$.

Remarque La signification de ce cocycle est la suivante : il existe une action affine de $\widetilde{K}$ sur $\mathfrak{k}^*$ pour laquelle le moment $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ est $\widetilde{K}$ -équivariante. La partie linéaire de cette action est l'action coadjointe et la partie translation est le cocycle C . L'action affine est donc donnée par $k \bullet \lambda = k.\lambda + C_k$. Nous oublierons désormais cette action affine pour ne considérer que l'action coadjointe.

2.3 Actions hamiltoniennes

On garde les notations de la section précédente.

Définition 2.3 *L'action de K sur (M, ω) est dite localement hamiltonienne si on peut choisir un moment de l'action de $\widetilde{K}$ sur $\widetilde{M}$ qui soit $\widetilde{K}$ -équivariant.*

L'action est dite hamiltonienne, si en outre, les 1-formes fermées $i_{X_\xi} \omega$ sont exactes, pour tout ξ dans $\mathfrak{k}$.

Autrement dit, l'action est localement hamiltonienne si et seulement si C est un cobord. Dans ce cas, on choisit le moment $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ $\widetilde{K}$ -équivariant. On a donc

$$\tilde{\mu}^{k\xi} = k.\tilde{\mu}^\xi \quad \forall \xi \in \mathfrak{k} \quad \forall k \in \widetilde{K}.$$

Ce moment est alors bien défini à addition près d'une constante dans l'espace vectoriel $(\mathfrak{k}^*)^K \simeq (\mathfrak{k}/[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}])^*$ des formes linéaires K -invariantes sur $\mathfrak{k}$. On dira en bref que $(M, \omega, K, \tilde{\mu})$ est une action localement hamiltonienne. Le morphisme d'holonomie h prend alors ses valeurs dans $(\mathfrak{k}^*)^K$.

L'action est alors hamiltonienne si et seulement si on peut écrire $\tilde{\mu} = \mu \circ p$ où $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ est une application appelée *moment* de l'action de K sur M .

Lorsque ω est symplectique, on dira en bref que (M, ω) est une K -variété hamiltonienne.

Donnons maintenant quatre interprétations de la condition localement hamiltonienne.

★ **La première interprétation** est une version infinitésimale du cocycle.

Elle nécessite quelques notations. D'après le lemme 2.1, pour ξ, η dans $\mathfrak{k}$, la fonction $c_{\xi, \eta} = \tilde{\mu}^{[\xi, \eta]} - \tilde{\omega}(\widetilde{X}_\xi, \widetilde{X}_\eta)$ est constante. Elle définit donc un élément c de $\Lambda^2 \mathfrak{k}^*$. D'après l'exercice 2.2.b, cet élément c est un cocycle, i.e. il vérifie

$$c_{[\xi, \eta], \zeta} + c_{[\eta, \zeta], \xi} + c_{[\zeta, \xi], \eta} = 0 \quad \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{k}.$$

En outre, si on modifie le choix du moment $\tilde{\mu}^\xi$ d'une constante additive $\lambda \in \mathfrak{k}^*$, le cocycle est modifié par le cobord c' donné par la formule $c'_{\xi, \eta} := \lambda([\xi, \eta])$.

Lemme 2.4 (Cocycle infinitésimal) *Soit K un groupe de Lie connexe qui agit sur une variété M en préservant une 2-forme fermée ω . Cette action est localement hamiltonienne si et seulement si le cocycle c est un cobord.*

Démonstration Calculons la différentielle de l'application $\Phi : \widetilde{K} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ donnée par $\Phi(k) = \tilde{\mu}^{k\xi}(kx)$. Il suffit de la calculer en $k = e$. Or, pour tout η dans $\mathfrak{k}$

$$d\Phi(e)(\eta) = (\tilde{\mu}^{[\eta, \xi]} + d\tilde{\mu}^\xi(\widetilde{X}_\eta))(x) = (\tilde{\mu}^{[\eta, \xi]} - \tilde{\omega}(\widetilde{X}_\eta, \widetilde{X}_\xi))(x) .$$

On a donc les équivalences

$$c = 0 \Leftrightarrow d\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi = \text{constante} \Leftrightarrow \tilde{\mu} \text{ est } \widetilde{K}\text{-équivariante} \Leftrightarrow C = 0 .$$

Par suite c est un cobord si et seulement si C est un cobord. C'est ce que l'on voulait. $\square$

Remarque Soit $\Gamma_0 := \text{Ker} h$. Le revêtement $\check{M} = \Gamma_0 \backslash \widetilde{M} \xrightarrow{\check{p}} M$ est appelé *revêtement d'holonomie* et l'application $\check{\mu} : \check{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ obtenue par passage au quotient de $\tilde{\mu}$, est aussi appelée *application moment*.

Lorsque l'action de K sur M est localement hamiltonienne, cette action se relève en une action de K sur $\check{M}$ et le moment $\check{\mu} : \check{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ est K -équivariant.

En effet, notons $\widetilde{Z}$ le noyau de la projection $\widetilde{K} \rightarrow K$. Comme le moment $\tilde{\mu}$ est $\widetilde{K}$ -équivariant, si k est dans $\widetilde{Z}$ et x dans $\widetilde{M}$, on a les égalités $\tilde{\mu}(kx) = \tilde{\mu}(x)$ et $p(kx) = p(x)$. Ce qui assure par définition de Γ_0 que x et kx ont même image dans $\check{M}$. On en déduit que l'action de $\widetilde{K}$ sur $\check{M}$ se factorise en une action de K .

La K -équivariance de l'application moment $\check{\mu}$ résulte de l'équivariance de $\tilde{\mu}$.

★ **La deuxième interprétation** n'est valable que pour les groupes commutatifs.

Une sous-variété N de M est dite

- *isotrope* si, pour tout x dans N , on a $T_x N^\omega \supset T_x N$. On a alors $2 \dim N \leq \dim M$.
- *coïsotrope* si, pour tout x dans N , on a $T_x N^\omega \subset T_x N$. On a alors $2 \dim N \geq \dim M$.
- *lagrangienne* si, pour tout x dans N , on a $T_x N^\omega = T_x N$. On a alors $2 \dim N = \dim M$.

Lemme 2.5 (Orbites isotropes) *Soit K un groupe de Lie commutatif connexe qui agit sur une variété M en préservant une 2-forme fermée ω . Cette action est localement hamiltonienne si et seulement si les orbites de K sont isotropes.*

Démonstration En effet, la condition $c = 0$ s'écrit : $\omega(X_\xi, X_\eta) = 0 \forall \xi, \eta \in \mathfrak{k}$. $\square$

★ **La troisième interprétation** n'est valable que pour ω symplectique.

Lemme 2.6 (Crochet de Poisson) *Soit K un groupe de Lie connexe qui agit sur une variété symplectique (M, ω) en préservant ω . L'action est localement hamiltonienne si et seulement si on peut choisir le moment $\tilde{\mu}$ de sorte que l'application $\xi \rightarrow \tilde{\mu}^\xi$ soit un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{k}$ dans $(C^\infty(\widetilde{M}), \{.,.\})$.*

Démonstration En effet, la condition $c = 0$, s'écrit : $\tilde{\omega}(\tilde{X}_\xi, \tilde{X}_\eta) = \{\tilde{\mu}^\xi, \tilde{\mu}^\eta\} \forall \xi, \eta \in \mathfrak{k} . \square$

Le corollaire suivant est la forme moderne du théorème de Noether.

Corollaire 2.7 *Soit K un groupe de Lie commutatif qui agit sur une variété M en préservant une 2-forme fermée ω . On suppose l'action hamiltonienne. Alors, le moment μ est constant sur les orbites de K dans M .*

Démonstration Les orbites coadjointes de K sont des points. $\square$

★ **La quatrième interprétation** n'est valable que pour les groupes compacts.

Lemme 2.8 (Groupes compacts) *Soit K un groupe compact connexe qui agit sur une variété M en préservant une 2-forme fermée ω . Soient $S = [K, K]$ le groupe dérivé, $\tilde{S}$ son revêtement universel, Z la composante connexe du centre de K et $\mathfrak{z}$ son algèbre de Lie. Alors*

- a) *On peut choisir le moment $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ de sorte qu'il soit $\tilde{S}$ -équivariant.*
- b) *L'image $\tilde{\mu}(\tilde{M})$ est alors une réunion d'orbites coadjointes.*
- c) *Le groupe d'holonomie $h(\Gamma)$ est inclus dans $(\mathfrak{k}^*)^K \simeq \mathfrak{z}^*$.*
- d) *L'action de K est localement hamiltonienne si et seulement si l'action de Z l'est.*
- e) *L'action de K est hamiltonienne si et seulement si l'action de Z l'est.*

Corollaire 2.9 *Toute action symplectique d'un groupe de Lie compact connexe à centre fini est hamiltonienne.*

Démonstration du lemme On admettra le résultat classique suivant sur la structure des groupes compacts. On a $K = S.Z$, le groupe $S \cap Z$ est fini et le groupe $\tilde{S}$ est compact. (voir [3])

a) Comme le groupe $\tilde{S}$ est compact, il existe sur $\tilde{S}$ une mesure de Haar ds de masse 1. On peut alors remplacer le moment $\tilde{\mu}$ par le moment moyenné $x \rightarrow \int_{\tilde{S}} s. \tilde{\mu}(s^{-1}x) ds$. On obtient ainsi un nouveau moment qui est $\tilde{S}$ -équivariant.

b) En effet, les orbites de $\tilde{S}$ dans $\mathfrak{k}^*$ ne sont autres que les orbites coadjointes de K .

c) Un moment $\tilde{S}$ -équivariant est uniquement défini à addition près d'un élément S -invariant de $\mathfrak{k}^*$. Donc $h(\Gamma) \subset (\mathfrak{k}^*)^S = (\mathfrak{k}^*)^K \simeq \mathfrak{z}^*$.

d) De la même façon, le cocycle C associé à un moment $\tilde{S}$ -équivariant $\tilde{\mu}$ est nul sur $\tilde{S}$ et prend ses valeurs dans $\mathfrak{z}^*$. Notons $\rho : \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathfrak{z}^*$ l'application de restriction. La composée $\rho \circ \tilde{\mu}$ est un moment pour l'action de $\tilde{Z}$ sur $\tilde{M}$. Son cocycle C' n'est autre que la restriction à $\tilde{Z}$ de C . Donc C est nul si et seulement si C' est nul.

e) L'holonomie $h : \Gamma \rightarrow (\mathfrak{k}^*)^K \simeq \mathfrak{z}^*$ de l'action de K sur M est aussi l'holonomie de l'action de Z sur M . $\square$

★ Voici, pour finir, trois remarques qui permettent parfois de déterminer si une action symplectique est hamiltonienne :

- Si $H^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R}) = 0$, toute action de K qui préserve une 2-forme fermée ω est localement hamiltonienne.

- Si $(\mathfrak{k}^*)^K = 0$ ou si $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, toute action localement hamiltonienne de K est hamiltonienne.
- Si M et K sont compacts et si $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, toute action symplectique est hamiltonienne.

2.4 Exemples

Voici quelques exemples d'actions *symplectiques* d'un groupe K sur une variété symplectique (M, ω) c'est-à-dire d'actions qui préservent ω .

a) Translations sur le tore Le groupe K est le tore $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ et M est la variété $\mathbb{T}^{2n}$ munie de la forme symplectique $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Le groupe K agit sur M par translation. On a l'égalité $\tilde{\mu}(p, q) = (q, -p) \in \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathfrak{k}^*$. Cette action n'est pas localement hamiltonienne.

Soit K' le sous-groupe de K : $K' = \mathbb{T}^n \times \{0\}$. L'action de K' sur M est localement hamiltonienne mais n'est pas hamiltonienne. On a l'égalité $\tilde{\mu}(p, q) = q \in \mathbb{R}^n \simeq \mathfrak{k}'^*$.

b) Actions linéaires sur un espace vectoriel symplectique Soit ω une forme bilinéaire symplectique sur l'espace vectoriel $W = \mathbb{R}^{2n}$ et K un groupe compact de transformations linéaires de W qui préservent ω . Alors l'action de K sur W est hamiltonienne et admet pour moment

$$\mu^\xi(x) = \frac{1}{2}\omega(\xi x, x) \quad \forall x \in W, \quad \forall \xi \in \mathfrak{k}.$$

c) Variétés algébriques affines Il s'agit d'une simple variante de l'exemple précédent. On introduit sur $W = \mathbb{C}^n$ la forme symplectique $\omega = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$ partie imaginaire de la forme hermitienne standard. Soit $M \xrightarrow{j} \mathbb{C}^n$ une sous-variété lisse complexe que l'on munit de la forme symplectique $j^*\omega$. Soit K un sous-groupe de $\mathrm{SU}(n)$ qui préserve M . Alors l'action de K sur M est hamiltonienne et le moment est donné par la même formule $\mu^\xi(x) = \frac{1}{2}\omega(\xi x, x) \quad \forall x \in M, \quad \forall \xi \in \mathfrak{k}$.

d) Variétés algébriques quasiprojectives Notons toujours ω la forme symplectique sur $\mathbb{C}^n$ égale à la partie imaginaire de la forme hermitienne standard. On note $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ l'espace projectif de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n - \{0\} \xrightarrow{p} \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ la projection naturelle et σ une forme de Kähler sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$. C'est une 2-forme symplectique invariante par $\mathrm{SU}(n)$. Soit $M \xrightarrow{j} \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ une sous-variété lisse complexe que l'on munit de la forme symplectique $j^*\sigma$. Soit K un sous-groupe de $\mathrm{SU}(n)$ qui préserve M . Alors l'action de K sur M est hamiltonienne et admet pour moment, si σ est convenablement normalisé,

$$\mu^\xi(x) = \frac{1}{2}\omega(\xi x^\sharp, x^\sharp) \quad \forall x \in M, \quad \forall \xi \in \mathfrak{k}.$$

où $x^\sharp$ est un vecteur de norme 1 sur la droite x .

e) Espaces cotangents Soit X une variété C^∞ , l'espace cotangent $M = T^*X$ admet une 2-forme symplectique canonique $\omega = d\eta$ où η est la 1-forme canonique qui se calcule de la façon suivante : soit Y dans $T(T^*X)$. Le point base de Y est un élément $\alpha \in T^*X$ qui lui même a pour point base un point x de X ; on note y l'élément de $T_x X$ image de Y par la différentielle de la projection $T^*X \rightarrow X$. On a, par définition $\eta(Y) = \alpha(y)$.

Soit K un groupe compact qui agit sur X . L'action induite de K sur M préserve η et ω ; cette action est hamiltonienne, avec pour moment $\mu^\xi = -\eta(X_\xi)$

f) Orbites coadjointes Soit K un groupe de Lie et $O = K\lambda$ une orbite coadjointe pour une forme linéaire λ dans $\mathfrak{k}^*$. Cette orbite coadjointe O admet une unique 2-forme symplectique K -invariante ω_O dont la valeur au point λ vérifie

$$\omega_{O,\lambda}(X_\xi, X_\eta) = \lambda([\xi, \eta]) \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{k}.$$

L'action de K sur O est hamiltonienne avec pour moment $\mu(x) = x \quad \forall x \in M$.

Remarques 1) L'exemple d) est un cas particulier de l'exemple f) car $\mathbb{P}(C^n)$ est une orbite coadjointe du groupe $SU(n)$. Cet exemple est aussi un cas particulier du corollaire 2.9 car $SU(n)$ a un centre fini.

2) Le point de vue géométrie différentielle que nous avons suivi a fait apparaître le modèle local comme un hybride des exemples a), b), e) et f). L'intérêt de l'article de Sjamaar [27] est de regarder, dans le cas hamiltonien, le modèle local comme un cas particulier de l'exemple d) et donc de relier ce sujet à la théorie des actions algébriques des groupes réductifs complexes.

Les plus simples des actions hamiltoniennes sont celles qui sont homogènes. Nous verrons dans le lemme ci-dessous dû à Kostant qu'elles sont essentiellement données par l'exemple f).

Lemme 2.10 (Espaces homogènes hamiltoniens) *Soit K un groupe de Lie qui agit transitivement sur une variété M en préservant une 2-forme fermée ω . On suppose l'action hamiltonienne.*

a) Alors le moment μ est une fibration de M sur une orbite coadjointe $O = K\lambda$ et la forme ω est image inverse de la forme symplectique ω_O sur O .

b) Lorsque ω est symplectique, le moment μ est un revêtement de M sur cette orbite coadjointe O .

Remarque Dans la situation du b), lorsque K est compact, μ est un difféomorphisme car toutes les orbites coadjointes de K sont simplement connexes.

Démonstration a) Soit x un point de M et $\lambda = \mu(x)$. Comme μ est K -équivariant, on a l'égalité $\mu(M) = K\lambda$ et l'application μ est une fibration de M sur $K\lambda$. La condition $c = 0$ s'écrit $\omega(X_\xi, X_\eta) = \lambda([\xi, \eta]) \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{k}$. Ce qui signifie que $\omega = \mu^*(\omega_O)$.

b) Il reste à montrer que le noyau $\text{Ker} d\mu(x)$ est nul. C'est clair, car ce noyau est l'orthogonal relativement à ω de l'espace tangent à l'orbite Kx . $\square$

2.5 Actions anhamiltoniennes et noyau du cocycle

Les deux lemmes suivants joueront un rôle important dans la partie 6.

Lemme 2.11 *Soit K un groupe compact connexe ou un groupe de Lie commutatif connexe qui agit sur une variété C^∞ compacte connexe M en préservant une 2-forme fermée ω . On note $\mathfrak{k}_h := \{\xi \in \mathfrak{k} / i_{X_\xi}\omega \text{ est exacte}\}$*

Si on a l'égalité $\mathfrak{k}_h = \mathfrak{k}$, alors l'action de K sur M est hamiltonienne.

Nous verrons plus loin que, lorsque K et M sont compacts, le sous-groupe de Lie connexe K_h d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_h$ est fermé dans K (corollaire 4.2).

Démonstration Grâce au lemme 2.8.e, on peut supposer que K est commutatif. D'après le lemme 2.4, il s'agit de montrer que, pour tout ξ, η dans $\mathfrak{k}$, on a $c_{\xi,\eta} = 0$. Comme $i_{X_\xi}\omega$ est exacte, il existe une fonction μ^ξ sur M telle que $d\mu^\xi = i_{X_\xi}\omega$. Comme M est compact, cette fonction μ^ξ atteint son maximum en un point x_0 . En un tel point, la 1-forme $i_{X_\xi}\omega$ s'annule et on a $c_{\xi,\eta} = -\omega_{x_0}(X_\xi, X_\eta) = 0$. $\square$

Définition 2.12 *L'action de K sur (M, ω) est dite anhamiltonienne si on a $\mathfrak{k}_h = 0$.*

Dans ce cas, le groupe K est commutatif. En effet, $\mathfrak{k}_h$ contient $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ (lemme 2.1).

L'exemple 2.4.a est une action anhamiltonienne d'un tore sur une variété symplectique compacte. Nous en construirons beaucoup d'autres en 6.1.

Lemme 2.13 (Noyau du cocycle) *Soit K un groupe de Lie commutatif connexe qui agit sur une variété C^∞ connexe M en préservant une 2-forme fermée ω , $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ le moment de l'action de $\tilde{K}$ sur $\tilde{M}$ et $\mathfrak{l} := \{\xi \in \mathfrak{k} / \forall \eta \in \mathfrak{k} \ c_{\xi,\eta} = 0\}$ le noyau du cocycle infinitésimal. Alors,*

a) le cocycle $C : \tilde{K} \rightarrow \mathfrak{k}^$ est un morphisme de groupes d'image $\mathfrak{l}^\perp$. Son noyau est le sous-groupe connexe $\tilde{L}$ de $\tilde{K}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$.*

b) Pour tout x dans $\tilde{M}$, on a l'égalité $\tilde{L} = \{k \in \tilde{K} / \tilde{\mu}(kx) = \tilde{\mu}(x)\}$.

c) Si M est compact, on a l'inclusion $\mathfrak{k}_h \subset \mathfrak{l}$.

Démonstration a) Comme K est commutatif, la relation de cocycle s'écrit $C_{kk'} = C_k + C_{k'}$. Elle exprime que C est un morphisme de groupes. Sa différentielle $dC : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ est donnée par la formule, pour tout ξ, η dans $\mathfrak{k}$, $dC(\xi)(\eta) = c_{\xi,\eta}$. Nos assertions s'en déduisent.

b) Cela résulte de l'égalité $C_k = \tilde{\mu}(kx) - \tilde{\mu}(x)$.

c) Même démonstration que le lemme 2.11. $\square$

Remarque Même si M et K sont compacts, l'image de $\tilde{L}$ dans K n'est pas toujours fermée. Voici un exemple. Fixons un nombre réel irrationnel α et posons $M = \mathbb{T}^4 = \{(x, y, z, t) / x, y, z, t \in \mathbb{T}^1\}$, $\omega = (dx - \alpha dy) \wedge dz + dy \wedge dt$ et $K = \mathbb{T}^3$. Le groupe K agit sur M par translation sur les trois premières coordonnées. Cette action préserve ω . Le noyau du cocycle infinitésimal est $\mathfrak{l} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = \alpha y, z = 0\}$. Donc le groupe correspondant n'est pas fermé dans K .

2.6 L'application moment pour les modèles locaux

Dans cette section on calcule le moment pour l'action du groupe compact K sur les variétés symplectiques $X(N, \sigma, W)$ de la proposition 1.9. On détermine parmi ces actions celles qui sont hamiltoniennes.

Commençons par deux lemmes qui sont plutôt des exercices.

Lemme 2.14 (Le moment pour une forme exacte) *Soit K un groupe compact connexe qui agit sur une variété C^∞ M en préservant une 2-forme exacte $\omega = d\eta$. Alors l'action de K sur (M, ω) est hamiltonienne. En outre, on peut choisir la 1-forme η K -invariante, l'action admet alors pour moment $\mu^\xi = -\eta(X_\xi)$, pour tout ξ dans $\mathfrak{k}$.*

Démonstration Ce lemme n'est qu'une généralisation de l'exemple 2.4.e). Quitte à remplacer η par une moyenne de ses translatées, on peut supposer η K -invariante. Il suffit alors de montrer que, la fonction $\mu^\xi := -\eta(X_\xi)$ est un hamiltonien pour X_ξ . Or

$$i_{X_\xi}\omega - d\mu^\xi = (i_{X_\xi}d + di_{X_\xi})\eta = L_{X_\xi}\eta = 0.$$

C'est ce que l'on voulait. □

Lemme 2.15 (Le moment pour une somme) *Soit K un groupe de Lie connexe qui agit sur une variété M en préservant des 2-formes fermées ω_k , pour $k = 0, 1, 2$. On note $\tilde{\mu}_k \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathfrak{k}^*)$ les moments de cette action pour ω_k . Alors la somme $\tilde{\mu} := \sum \tilde{\mu}_k$ est un moment de cette action pour la 2-forme $\omega = \sum \omega_k$.*

Démonstration C'est évident. □

Le lemme suivant permet de décider si les K -espaces $X(N, \sigma, W)$ sont hamiltoniens.

Lemme 2.16 (Moment et restriction) *Soit K un groupe de Lie connexe qui agit sur une variété M connexe, ω une 2-forme fermée K -invariante sur M et $N \xrightarrow{j} M$ une sous variété K -invariante.*

a) L'action de K sur (M, ω) est localement hamiltonienne si et seulement si l'action de K sur (N, j^ω) est localement hamiltonienne.*

b) On suppose que le morphisme naturel $H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(N, \mathbb{R})$ est injectif. Alors l'action de K sur (M, ω) est hamiltonienne si et seulement si l'action de K sur (N, j^ω) est hamiltonienne.*

Remarque L'hypothèse du b) est vérifiée lorsque M est un fibré vectoriel au-dessus de N .

Démonstration a) En effet les fonctions C_k sont constantes sur $\widetilde{M}$. Elles sont nulles sur $\widetilde{M}$ si et seulement si elles sont nulles sur $\widetilde{N}$.

b) En effet, le morphisme d'holonomie h_M pour l'action de K sur (M, ω) est un élément de $H^1(M, \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{k}^*$. Le morphisme d'holonomie h_N pour l'action de K sur $(N, j^*\omega)$ est l'image $j^*(h_M)$ dans $H^1(N, \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{k}^*$. Donc, h_M est nul si et seulement si h_N est nul. $\square$

On reprend maintenant les notations $X = X(N, \sigma, W) \dots$ de la proposition 1.9.

On note $\tilde{x}$ le point base du revêtement universel $\widetilde{N}$, $\tilde{\mu}_N$ un moment pour l'action de $\widetilde{K}$ sur $\widetilde{N}$ et $\lambda_0 := \tilde{\mu}_N(\tilde{x})$. On note μ_W le moment de l'action de K sur (W, b) dont la formule est donnée dans l'exemple b). On note $[k, \nu, w]$ l'élément du revêtement universel $\widetilde{X}$ image de $(k, \nu, w) \in \widetilde{K} \times (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times W$.

Proposition 2.17 (Le moment du modèle local) *a) Le moment $\tilde{\mu}$ de l'action de $\widetilde{K}$ sur $\widetilde{X}(N, \sigma, W)$ est donné par*

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}([k, \nu, w]) &= \tilde{\mu}_N(k.\tilde{x}) + k.(\nu + \mu_W(w)) \\ &= C_k + k.(\lambda_0 + \nu + \mu_W(w)) . \end{aligned}$$

b) L'action de K sur $X(N, \sigma, W)$ est localement hamiltonienne (resp. hamiltonienne) si et seulement si l'action de K sur N est localement hamiltonienne (resp. hamiltonienne). Dans ce cas la formule du moment se simplifie un peu :

$$\tilde{\mu}([k, \nu, w]) = k.(\lambda_0 + \nu + \mu_W(w)) .$$

Lorsque l'action est hamiltonienne, les propositions 1.9 et 2.17 sont dans [14] et [23] (voir aussi [27]).

Démonstration Cela résulte des trois lemmes ci-dessus et de la construction de $X(N, \sigma, W)$. $\square$

3 Le moment pour l'action d'un tore

Le but de cette partie est de montrer les propriétés de convexité de l'application moment $\tilde{\mu}$ pour une action symplectique d'un tore T sur une variété symplectique (théorème 3.1). Lorsque l'action est hamiltonienne, il s'agit d'un fameux théorème dû à Atiyah, Guillemin, Sternberg (théorème 3.16).

Notre démonstration suit la stratégie de la jolie preuve du cas hamiltonien donnée par Condevaux, Dazord et Molino dans [6] (voir aussi [17] et [20] pour une rédaction plus détaillée).

On montrera tout d'abord une version locale de ce théorème (lemme 3.4). On munira ensuite l'espace des feuilles $\widetilde{M}_\mu$ de $\tilde{\mu}$ d'une structure euclidienne convexe (lemme 3.9). Le point clef consiste à démontrer que cet espace de feuilles est séparé. Un argument général sur les structures euclidiennes convexes nous permettra alors de conclure (proposition 3.13).

Lorsque l'action est hamiltonienne, on peut aussi introduire l'espace des feuilles M_μ du moment μ de T sur M . La propriété de μ et un argument général de topologie assure que cet espace est séparé (lemme 3.10).

Lorsque l'action n'est pas hamiltonienne, la séparation de $\widetilde{M}_\mu$ résulte d'un argument plus technique de topologie basé à la fois sur les propriétés locales et globales de $\tilde{\mu}$ (proposition 3.11).

3.1 Convexité du moment

Une application continue $f : M \rightarrow E$ entre deux espaces topologiques est dite *propre* si l'image inverse de tout compact est un compact. Cette condition est automatiquement vérifiée lorsque M est compact. L'application f est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert est un ouvert. On appelle *fibres* de f l'image inverse $f^{-1}(\lambda)$ d'un point λ de E et *feuille* de f une composante connexe d'une fibre.

Soit Γ un groupe d'homéomorphismes de M . On dit que f est *propre modulo* Γ si, pour tout compact B de E , il existe un compact M_0 de M tel que $f^{-1}(B) \subset \Gamma M_0$.

Théorème 3.1 (Convexité pour l'action d'un tore) *Soient $T = \mathbb{T}^d$ un tore, (M, ω) une T -variété symplectique connexe, $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(M)$, $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ le moment de l'action de $\widetilde{T}$ sur $\widetilde{M}$ et $h : \Gamma \rightarrow \mathfrak{t}^*$ le morphisme d'holonomie. On suppose que $\tilde{\mu}$ est propre modulo Γ . Alors*

a) l'image $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est un polyèdre convexe fermé et l'application $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est ouverte et à fibres connexes.

b) Pour tout λ dans $\mathfrak{t}^$, on a l'égalité $\overline{\Gamma \cdot \tilde{\mu}^{-1}(\lambda)} = \tilde{\mu}^{-1}(\lambda + \overline{h(\Gamma)})$.*

La condition “ $\tilde{\mu}$ propre modulo Γ ” est automatiquement vérifiée lorsque M est compact. Ce théorème généralise le théorème d'Atiyah, Guillemin et Sternberg de convexité du moment pour une action hamiltonienne (théorème 3.16).

Interprétation du théorème 3.1.b On appelle *feuille moment* l'image dans M d'une feuille de $\tilde{\mu}$. Les feuilles moments forment une partition de M appelé *feuilletage moment* bien qu'il s'agisse d'un feuilletage singulier. L'application moment $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ induit par passage au quotient une application $\bar{\mu} : M \rightarrow \mathfrak{t}^*/\overline{h(\Gamma)}$ appelée *moment réduit*. Le théorème 3.1.b affirme que, lorsque M est compact, l'adhérence d'une feuille moment est une fibre du moment réduit (en particulier les adhérences de deux feuilles moments sont égales ou disjointes). Cette assertion est conjecturée dans [6] §II.3.1, sous l'hypothèse que l'action de T est localement hamiltonienne.

On démontrera simultanément l'énoncé suivant qui précise ce théorème.

On rappelle que $\mathfrak{t}_h = \{\xi \in \mathfrak{t} / i_{X_\xi} \omega \text{ est exacte}\}$. Pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{t}$, on note $\mathfrak{s}^\perp = \{f \in \mathfrak{t}^* / f(\mathfrak{s}) = 0\}$ et $\widetilde{M}^\mathfrak{s}$ l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{s}$ dans $\widetilde{M}$.

Corollaire 3.2 *Avec les notations du théorème 3.1.*

- 1) *On a l'égalité $\tilde{\mu}(\widetilde{M}) + \mathfrak{t}_h^\perp = \tilde{\mu}(\widetilde{M})$.*
- 2) *Si M est compacte, alors*
 - a) *le quotient $\tilde{\mu}(\widetilde{M})/\mathfrak{t}_h^\perp$ est compact.*
 - b) *Le sous-groupe T_h de T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_h$ est fermé.*
 - c) *$\tilde{\mu}(\widetilde{M}^{\mathfrak{t}_h})$ est inclus dans une réunion finie de sous-espaces affines parallèles à $\mathfrak{t}_h^\perp$ et $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est l'enveloppe convexe de $\tilde{\mu}(\widetilde{M}^{\mathfrak{t}_h})$.*

Remarques 1) Le point b) de ce corollaire est démontré dans [10] sous l'hypothèse que la classe de cohomologie de ω est dans $H^2(M, \mathbb{Q})$.

2) Lorsque M n'est pas compacte, le sous-groupe T_h n'est pas toujours fermé. En voici un exemple qui ressemble beaucoup à celui de la remarque du lemme 2.13.

Fixons un nombre réel irrationnel α et posons $M = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z, t) / x, y, z \in \mathbb{T}^1, t \in \mathbb{R}\}$, $\omega = (dx - \alpha dy) \wedge dz + dy \wedge dt$ et $T = \mathbb{T}^2$. Le groupe T agit sur M par translation sur les deux premières coordonnées. Cette action préserve ω et est localement hamiltonienne. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_h$ est la droite de pente α dans $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^2$. Donc le groupe correspondant T_h n'est pas fermé.

3) Le sous-tore T_h est donc le plus grand sous-tore de T dont l'action sur M est hamiltonienne.

4) Lorsque l'action est hamiltonienne, on a donc $M^T \neq \emptyset$. La réciproque n'est pas exacte : il existe une action symplectique du tore $\mathbb{T}^1$ sur une variété symplectique compacte de dimension 6 qui a des points fixes mais qui n'est pas hamiltonienne (voir [25]).

Cette partie est entièrement consacrée à la démonstration du théorème 3.1 et de son corollaire.

3.2 Action linéaire symplectique du tore

Reprenons en détail l'exemple 2.4.b en commençant par quelques définitions classiques. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. On appelle *intérieur relatif* de C le plus petit convexe dense dans C et *direction* de C le plus petit sous-espace vectoriel qui contient un translaté de

C . Le convexe C est dit *polyédral* si, tout point de C admet un voisinage dans C qui est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Une partie convexe C_0 de C est dite *extrémale* si le complémentaire de C_0 dans C est aussi convexe. On appelle *facette* de C l'intérieur relatif d'une partie convexe extrémale de C intersection de C avec un sous-espace affine.

Lemme 3.3 *Soit (W, ω) un espace vectoriel symplectique et T un groupe compact commutatif de transformations linéaires symplectiques de W et $\mu : W \rightarrow \mathfrak{t}^*$ l'application moment. Alors*

1) *L'image $C_W := \mu(W)$ est un cône convexe polyédral fermé et l'application $\mu : W \rightarrow C_W$ est une application ouverte à fibres connexes.*

2) *Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{t}$ et $W^{\mathfrak{s}}$ l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{s}$ dans W .*

a) *Alors $\mu(W^{\mathfrak{s}}) \subset C_W \cap \mathfrak{s}^\perp$*

b) *Réciproquement, si $C_W \cap \mathfrak{s}^\perp$ est extrémal dans C_W on a l'égalité $\mu^{-1}(C_W \cap \mathfrak{s}^\perp) = W^{\mathfrak{s}}$.*

Démonstration Notons $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ les coordonnées de W avec $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$ et notons T_m le tore compact maximal du groupe symplectique dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_m$ a pour base $E_1, \dots, E_n$ où E_k est la matrice de rotation infinitésimale $E_k = x_k \partial_{y_k} - y_k \partial_{x_k}$. Notons $E_1^*, \dots, E_n^*$ la base de $\mathfrak{t}_m^*$ duale, $\mu_m : W \rightarrow \mathfrak{t}_m^*$ l'application moment de l'action de T_m sur W , et C^+ le cône convexe $C^+ := \{\sum t_k E_k^* / t_k \geq 0\}$. On a l'égalité

$$\mu_m(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{2} \sum (x_k^2 + y_k^2) E_k^*.$$

Donc $\mu_m(W) = C^+$ et $\mu_m : W \rightarrow C^+$ est une application ouverte à fibres connexes.

1) On peut supposer que T est inclus dans T_m . Notons $\varphi : \mathfrak{t}_m^* \rightarrow \mathfrak{t}^*$ la restriction, c'est une application linéaire surjective. On a $\mu = \varphi \circ \mu_m$ et nos assertions sont évidentes avec le convexe $C_W := \varphi(C^+)$.

2) Notons $\psi : \mathfrak{t}_m^* \rightarrow \mathfrak{s}^*$ la restriction et $w = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ un point de W .

a) Si w est $\mathfrak{s}$ -invariant, on a $(x_k^2 + y_k^2)\psi(E_k^*) = 0$, pour tout $k = 1, \dots, n$, et donc $\psi \circ \mu_m(w) = 0$ i.e. $\mu(w)$ est dans $\mathfrak{s}^\perp$.

b) Réciproquement, si $\mu(w)$ est dans $\mathfrak{s}^\perp$, on a $\sum (x_k^2 + y_k^2)\psi(E_k^*) = 0$. Comme $C_W \cap \mathfrak{s}^\perp$ est extrémal dans C_W , le cône $\psi(C^+)$ est saillant et donc $(x_k^2 + y_k^2)\psi(E_k^*) = 0$, pour tout $k = 1, \dots, n$, i.e. w est $\mathfrak{s}$ -invariant. $\square$

Remarques 1) Pour $R > 0$, notons $B_R(0)$ la boule ouverte dans W de centre 0 et de rayon R . Le même calcul prouve aussi que l'application $\mu : B_R(0) \rightarrow C_W$ est ouverte et à fibres connexes.

2) Le convexe polyédral C_W est "rationnel" au sens suivant : la direction de chacune de ses facettes admet une base formée d'éléments du réseau de $\mathfrak{t}^*$ dual du réseau $\{\xi \in \mathfrak{t} / \exp \xi = 1\}$.

3) Avec les notations du lemme 3.3, on a les équivalences :

$$\mu \text{ est propre} \Leftrightarrow \mu^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow \text{le cône } C_W \text{ est saillant.}$$

3.3 Etude locale

Montrons une version locale du théorème de convexité.

Lemme 3.4 (Convexité locale) *Soient T un tore, (M, ω) une T -variété symplectique connexe et $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ un moment.*

1) *Pour tout x dans $\widetilde{M}$, il existe une base de voisinages ouverts U de x et un cône convexe polyédral C_x tels que l'image $\tilde{\mu}(U)$ est incluse dans $\tilde{\mu}(x) + C_x$ et tels que l'application $\tilde{\mu} : U \rightarrow \tilde{\mu}(x) + C_x$ est ouverte à fibres connexes.*

2) *Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{t}$ et $\widetilde{M}^{\mathfrak{s}}$ l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{s}$ dans $\widetilde{M}$.*

a) *Si x est dans $\widetilde{M}^{\mathfrak{s}}$ alors $\tilde{\mu}(\widetilde{M}^{\mathfrak{s}} \cap U) \subset \tilde{\mu}(x) + (C_x \cap \mathfrak{s}^\perp)$*

b) *Réciproquement, si $C_x \cap \mathfrak{s}^\perp$ est extrémal dans C_x , alors x est dans $\widetilde{M}^{\mathfrak{s}}$ et on a l'égalité $\tilde{\mu}^{-1}(\tilde{\mu}(x) + \mathfrak{s}^\perp) \cap U = \widetilde{M}^{\mathfrak{s}} \cap U$.*

Remarques 1) En particulier, tout point x de $\widetilde{M}$ tel que $\tilde{\mu}(x)$ est un point extrémal du cône C_x est $\widetilde{T}$ -invariant.

2) Si l'action est hamiltonienne, on peut remplacer dans cet énoncé $\tilde{\mu}$ par un moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$.

Démonstration On peut supposer que M est la variété symplectique $M = X(N, \sigma, W)$ des propositions 1.9 et 2.17 dont on reprend les notations et que x est le point $x = [1, 0, 0]$ de $\widetilde{X}(N, \sigma, W)$.

Notons $\mathfrak{n}$ le noyau de la projection $\tau : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{h}$ et V un voisinage de 0 dans $\mathfrak{n}$ de sorte que l'application $(X, \nu, w) \xrightarrow{\varphi} [\exp X, \nu, w]$ soit un difféomorphisme de $V \times (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times W$ dans un voisinage U de $[1, 0, 0]$. Conformément au lemme 1.6, on a une décomposition $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_0 \oplus \mathfrak{w}_0$ où $\mathfrak{u}_0 \simeq \mathfrak{l}/\mathfrak{h}$ est le noyau de $b_0 = \sigma_x$. On en déduit la décomposition $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{w}_0^* \oplus \mathfrak{u}_0^* \oplus \mathfrak{h}^*$. Pour tout X dans $\mathfrak{n}$, on note $b_0(X)$ l'élément de $\mathfrak{w}_0^*$ égal à $b_0(X, \cdot)$. Comme T est commutatif, la formule du moment de la proposition 2.17 devient

$$\tilde{\mu}(\varphi(X, \nu, w)) = \tilde{\mu}(x) + b_0(X) + \nu + \mu_W(w) .$$

On remarque que l'application $X \rightarrow b_0(X)$ est linéaire surjective de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{w}_0^*$ et que l'application $\nu \rightarrow \nu$ est linéaire bijective de $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$ dans $\mathfrak{u}_0^*$. Posons alors

$$C_x = \mathfrak{h}^\perp + \mu_W(W)$$

1) Nos assertions résultent de ces deux formules, du lemme 3.3 et de sa remarque 1.

2) La formule pour C_x prouve que si $C_x \cap \mathfrak{s}^\perp$ est extrémal dans C_x , alors $\mathfrak{h}^\perp$ est inclus dans $\mathfrak{s}^\perp$ et donc $\mathfrak{s}$ est inclus dans $\mathfrak{h}$.

On suppose $\mathfrak{s}$ inclus dans $\mathfrak{h}$. Un point $\varphi(X, \nu; w)$ de U est $\mathfrak{s}$ -invariant si et seulement si w est $\mathfrak{s}$ -invariant. Nos assertions résultent donc du lemme 3.3 et de la formule ci dessus pour $\tilde{\mu}(\varphi(X, \nu, w))$. $\square$

Remarques 1) Si x et y sont des points de $\widetilde{M}$ sur la même feuille de $\tilde{\mu}$, on a $C_x = C_y$.

2) Les feuilles de $\tilde{\mu}$ forment une partition de $\widetilde{M}$ en parties fermées qui dans un système de coordonnées convenable sont définies par des équations analytiques. Elles ne forment

pas un feuilletage car elles ne sont pas toujours lisses et car elles ne sont pas toutes de même dimension. Ces feuilles ne sont pas toujours $\tilde{T}$ -invariantes, mais l'image d'une feuille par un élément de $\tilde{T}$ est encore une feuille.

3.4 La projection sur l'espace des feuilles est ouverte

Soit $f : M \rightarrow E$ une application continue entre deux espaces topologiques. Pour x dans M , on note F_x la composante connexe de $f^{-1}(f(x))$ qui contient x . On dit que F_x est la *feuille passant par x* . On note M_f l'ensemble des feuilles de M et $\pi : M \rightarrow M_f$ l'application donnée par $\pi(x) = F_x$. On munit M_f de la topologie quotient. Le but de cette section est de donner un critère qui assure que la projection π est ouverte.

Plus généralement, soit $\mathbf{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique M . On note $M_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des classes d'équivalences et $\pi : M \rightarrow M_{\mathbf{R}}$ l'application qui associe à chaque point la classe qui le contient. On munit $M_{\mathbf{R}}$ de la topologie quotient : une partie V de M_f est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(V)$ est ouverte.

La relation $\mathbf{R}$ est dite *ouverte* si la projection π est ouverte, c'est à dire si le saturé $\pi^{-1}(\pi(U))$ de tout ouvert U de M est encore ouvert. La relation $\mathbf{R}$ est dite *localement ouverte* si, tout point de M admet une base de voisinages ouverts U tels que la restriction à U de la relation d'équivalence $\mathbf{R}$ est ouverte. Une relation d'équivalence ouverte est toujours localement ouverte. Le lemme suivant est une sorte de réciproque.

Lemme 3.5 (Relation ouverte) *Soit $\mathbf{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique M . Si $\mathbf{R}$ est localement ouverte et si les classes d'équivalence de $\mathbf{R}$ sont connexes, alors $\mathbf{R}$ est ouverte.*

Remarques 1) Ce lemme s'applique à la relation d'équivalence définie par un feuilletage sans singularité (voir [11]).

2) Soit $M = [-2, -1] \cup [1, 2]$ et $\mathbf{R}$ la relation d'équivalence définie par : $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow x = y$ ou $|x| = |y| = 1$. La relation $\mathbf{R}$ est localement ouverte mais n'est pas ouverte.

3) Une relation $\mathbf{R}$ sur un espace topologique M est ouverte si et seulement si, pour tout x, y dans M tels que $x \mathbf{R} y$ et tout voisinage U de x , le saturé $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un voisinage de y .

Démonstration Considérons la relation d'équivalence $\mathbf{R}'$ sur M définie par $x \mathbf{R}' y$ si et seulement si on a les trois assertions : $x \mathbf{R} y$, pour tout voisinage U de x , $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un voisinage de y et, pour tout voisinage V de y , $\pi^{-1}(\pi(V))$ est un voisinage de x .

Comme la relation $\mathbf{R}$ est localement ouverte, les classes d'équivalences de $\mathbf{R}'$ sont ouvertes dans les classes d'équivalences pour $\mathbf{R}$. Comme ces dernières sont connexes, on a $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$. Ce qui prouve que $\mathbf{R}$ est ouverte. $\square$

Nous pouvons maintenant appliquer ce lemme à la relation d'équivalence $\mathbf{R}$ dont les classes sont les feuilles de f .

Définition 3.6 Soit $f : M \rightarrow E$ une application continue entre deux espaces topologiques.

On appelle application quotient $\hat{f} : M_f \rightarrow E$ l'application donnée par l'égalité $\hat{f}(\pi(x)) = f(x)$.

f est dite localement à fibres connexes si, tout point de M admet une base de voisinages U tels que, pour tout y dans U , l'intersection $U \cap f^{-1}(f(y))$ est connexe.

f est dite localement ouverte sur son image si tout point de M admet une base de voisinages U tels que l'application $f : U \rightarrow f(U)$ est ouverte.

f est dite localement ouverte sur un convexe (resp. sur un polyèdre convexe) si tout point de M admet une base de voisinages U tels que $f(U)$ est convexe (resp. est un polyèdre convexe) et l'application $f : U \rightarrow f(U)$ est ouverte.

Exemple Fondamental Considérons une action symplectique d'un tore T sur une variété symplectique M . D'après le lemme 3.4, l'application moment $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ est localement à fibres connexes et localement ouverte sur un polyèdre convexe.

Lemme 3.7 (Application ouverte) Soit $f : M \rightarrow E$ une application continue entre deux espaces topologiques. On suppose que f est localement à fibres connexes et est localement ouverte sur son image. Alors la projection sur l'espace des feuilles $\pi : M \rightarrow M_f$ est une application ouverte.

Démonstration Nos hypothèses assurent que la relation $\mathbf{R}$ est localement ouverte. Elle est donc ouverte par le lemme 3.5. $\square$

Remarques 1) Soit $M = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / s^2 + t^2 \leq 1\}$ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(s, t) = st$. Dans cet exemple, la projection π n'est pas ouverte car f n'est pas localement à fibres connexes.

2) Soit $M = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq s^2 + t^2 \leq 2\}$ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $f(s, t) = ((s^2 + t^2 - 1)s, (s^2 + t^2 - 1)t)$. Dans cet exemple, la projection π n'est pas ouverte car f n'est pas localement ouverte sur son image.

3.5 Structure euclidienne convexe sur l'espace des feuilles

Le but de cette section est de montrer que l'espace des feuilles pour l'application moment $\tilde{\mu}$ du lemme 3.4 est naturellement muni d'une structure euclidienne convexe.

Notons $\text{Is}(d)$ le groupe des isométries affines de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$, c'est le produit semidirect $\text{Is}(d) = \text{O}(d) \times \mathbb{R}^d$.

Définition 3.8 Soient P un espace topologique connexe. Une application $D : P \rightarrow \mathbb{R}^d$ est appelée développante euclidienne convexe (resp. développante euclidienne polyédrale convexe) si, pour tout point p de P , D induit un homéomorphisme d'un voisinage V de p sur un convexe (resp. un polyèdre convexe) W de $\mathbb{R}^d$.

Deux développantes D et D' sont dites équivalentes si il existe un élément $g \in \text{Is}(d)$ tel que $D' = g \circ D$.

Par exemple, l'injection d'un convexe dans $\mathbb{R}^d$ est une développante euclidienne convexe.

Lemme 3.9 *Soient M un espace topologique connexe et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue, localement à fibres connexes et localement ouverte sur un convexe (resp. sur un polyèdre convexe) et M_f l'espace des feuilles de f . Alors l'application quotient $\hat{f} : M_f \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une développante euclidienne convexe. (resp. polyédrale convexe)*

Démonstration Soient x un point de M , $p := \pi(x)$ son image dans M_f et U un voisinage ouvert de x tel que l'image $f(U)$ est convexe et tel que l'application $f : U \rightarrow f(U)$ est ouverte et à fibres connexes. On prend $V = \pi(U)$. C'est un voisinage de p car π est une application ouverte (lemme 3.7). Nos hypothèses prouvent aussi que l'application continue $\hat{f} : V \rightarrow \hat{f}(V) = f(U)$ est injective et ouverte. C'est ce que l'on voulait. $\square$

3.6 L'espace des feuilles est séparé

Le but de cette section est de donner deux critères qui assurent que l'espace des feuilles M_f est séparé. Le premier critère est élégant mais il ne s'applique qu'au moment μ des actions hamiltoniennes

Lemme 3.10 (Séparation) *Soit $f : M \rightarrow E$ une application continue et propre entre deux espaces topologiques séparés. Alors l'espace des feuilles M_f est séparé.*

Démonstration (pour M métrisable) Comme tout point de M admet une base dénombrable de voisinages, il suffit de montrer que, pour toutes suites $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ dans M telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_\infty \quad \text{et} \quad F_{x_n} = F_{y_n},$$

on a $F_{x_\infty} = F_{y_\infty}$. Quitte à remplacer M par le compact $f^{-1}(\{f(x_n) / n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\})$, on peut supposer M compact.

Notons $\lambda := f(x_\infty)$. Supposons par l'absurde que x_∞ et y_∞ sont dans des composantes connexes distinctes du compact $f^{-1}(\lambda)$. On peut alors trouver une décomposition de $f^{-1}(\lambda)$ en réunion de deux fermés disjoints G contenant x_∞ et G' contenant y_∞ .

Soit $\varepsilon = \frac{1}{3} \inf\{d(x, y) / x \in G, y \in G'\}$. On peut supposer que, pour tout n , on a $d(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon$ et $d(y_n, y_\infty) \leq \varepsilon$. Pour toute partie A de M , on note $A_\varepsilon := \{z \in M / d(z, A) \leq \varepsilon\}$ le ε -voisinage de A . Comme la feuille F_{x_n} est connexe, elle n'est pas recouverte par les fermés non vides disjoints $F_{x_n} \cap G_\varepsilon$ et $F_{x_n} \cap G'_\varepsilon$. On peut donc trouver un point z_n sur cette feuille F_{x_n} tel que $d(z_n, f^{-1}(\lambda)) > \varepsilon$. Une valeur d'adhérence z de cette suite doit vérifier simultanément $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lambda$ et $d(z, f^{-1}(\lambda)) \geq \varepsilon$. Contradiction. $\square$

Le second critère est plus technique, mais il s'applique au moment $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ du théorème 3.1. Il nous permettra aussi de démontrer le théorème 4.1.

Proposition 3.11 (Séparation) *Soient (M, d) un espace métrique localement compact, Γ un groupe d'isométries de M et C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : M \rightarrow C$ une application continue, localement à fibres connexes, localement ouverte sur son image et telle que, pour tout γ dans Γ , l'application $f \circ \gamma - f$ est constante.*

Si l'application $f : M \rightarrow C$ est propre modulo Γ , alors l'espace des feuilles M_f est séparé.

Remarques 1) L'hypothèse que l'espace topologique M est métrisable n'est pas indispensable mais est vérifiée dans nos applications.

2) Les hypothèses locales sur f assurent que la projection $\pi : M \rightarrow M_f$ est ouverte (lemme 3.7). Si la projection π n'est pas ouverte, il se peut que l'espace M_f ne soit pas séparé. En voici un exemple : $M = \mathbb{R}^2$, $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ agit par translation sur M de sorte que le quotient $\Gamma \backslash M$ soit compact et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction Γ invariante de classe C^∞ donnée par $f(s, t) = \exp(\frac{-1}{\cos^2 s}) \cdot \sin(t - \tan s)$.

3) La formule précédente définit aussi une fonction f sur le tore $M = \mathbb{T}^2$. D'après le lemme 3.10, l'espace des feuilles de f est séparé. Remarquons cependant que l'espace des "composantes connexes par arcs des fibres de f " n'est pas un espace séparé.

Si x est un point de M et X, Y des parties de M , on note

$$\delta(x, Y) := \inf_{y \in Y} d(x, y)$$

la distance de x à Y et

$$d(X, Y) := \sup_{x \in X} (\sup_{y \in Y} \delta(x, Y), \sup_{y \in Y} \delta(y, X))$$

la distance de Hausdorff de X et Y . La proposition résultera du lemme suivant. Ce lemme affirme que l'application $x \rightarrow F_x$ est uniformément continue.

Lemme 3.12 (Uniforme continuité) *Sous les hypothèses de la proposition 3.11. Pour γ dans Γ , on note $h(\gamma) = f \circ \gamma - f$. Soient B un compact de C et $M' := \Gamma f^{-1}(B)$. Alors*

a) $\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall x, y \in M'$,

$$(d(x, y) \leq \varepsilon_0 \text{ et } f(x) = f(y)) \implies F_x = F_y .$$

b) $\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \exists \eta > 0 / \forall x, y \in M'$,

$$(d(x, y) \leq \varepsilon_0 \text{ et } d(f(x), f(y)) \leq \eta) \implies \delta(x, F_y) \leq \varepsilon .$$

c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / \forall x, y \in M'$,

$$d(x, y) \leq \alpha \implies d(F_x, F_y) \leq \varepsilon .$$

Remarque Le point b) de ce lemme est un peu technique mais crucial. Il permet de “piéger” les feuilles passant suffisamment près d’une feuille F_g dans un ε_0 -voisinage de F_g .

Démonstration du lemme Quitte à remplacer B par un compact plus gros, on peut supposer que $B + h(\Gamma)$ est fermé de sorte que l’ensemble M' est aussi fermé dans M .

a) Si ce n’est pas le cas, on peut trouver des suites $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ dans M' telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \text{ et, } \forall n, f(x_n) = f(y_n) \text{ et } \pi(x_n) \neq \pi(y_n).$$

Comme f est propre modulo Γ , on peut, quitte à remplacer x_n par $\gamma_n x_n$ et y_n par $\gamma_n y_n$ avec γ_n dans Γ , supposer que x_n reste dans un compact de M' . Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que les suites x_n et y_n convergent vers une même limite x_∞ . Nos assertions contredisent alors l’hypothèse que la restriction de f à un voisinage de x_∞ est à fibres connexes.

b) Choisissons $\varepsilon_0 > 0$ comme en a) et tel que toutes les boules fermées de rayon $2\varepsilon_0$ dans M' soient compactes. C’est possible car M' est localement compact, f est propre modulo Γ et Γ est un groupe d’isométries de M . Montrons qu’un tel ε_0 convient.

Si ce n’est pas le cas, on peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ et des suites x_n, y_n dans M telles que

$$d(x_n, y_n) \leq \varepsilon_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(y_n)) = 0 \text{ et } \delta(x_n, F_{y_n}) \geq \varepsilon.$$

Quitte à remplacer les suites x_n par $\gamma_n x_n$ et y_n par $\gamma_n y_n$ avec γ_n dans Γ , on peut supposer que x_n et y_n restent dans un compact de M' . Quitte à extraire des sous-suites, les suites x_n et y_n convergent respectivement vers des points x_∞ et y_∞ . On en déduit que $d(x_\infty, y_\infty) \leq \varepsilon_0$ et $f(x_\infty) = f(y_\infty)$. Le point a) affirme alors que les feuilles F_{x_∞} et F_{y_∞} sont égales.

Comme la projection π est ouverte au voisinage de x_∞ , on peut donc trouver des éléments y'_n dans F_{y_n} tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = x_\infty$. Donc on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x_n, F_{y_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x_\infty, F_{y_n}) = 0.$$

Contradiction.

c) Soit ε_0 le réel donné par le point b). Choisissons un réel $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0/2[$ et notons η le réel donné aussi par le point b). Comme les applications $f \circ \gamma - f$ sont constantes et que f est propre modulo Γ , l’application f est uniformément continue sur M' . Autrement dit, on peut trouver un réel $\alpha > 0$, tel que, pour tout x, y dans M' , on a

$$d(x, y) \leq \alpha \implies d(f(x), f(y)) \leq \eta.$$

Posons alors $G_x := \{z \in F_x / \delta(z, F_y) \leq \varepsilon\}$. C’est un fermé de F_x .

Montrons que G_x est aussi un ouvert de F_x . Pour cela, vérifions que si z est un point de G_x et z' un point de F_x tel que $d(z', z) \leq \varepsilon$, ce point z' est encore dans G_x . Par hypothèse, il existe y' dans F_y tel que $d(z, y') \leq \varepsilon$. On a alors $d(z', y') \leq 2\varepsilon \leq \varepsilon_0$. D’autre part, $d(f(z'), f(y')) = d(f(x), f(y)) \leq \eta$. Le point b) prouve alors que $\delta(z', F_y) = \delta(z', F_{y'}) \leq \varepsilon$. Donc z' est dans G_x .

Comme F_x est connexe, on a l'égalité $F_x = G_x$. En échangeant les rôles de x et y , on obtient alors l'inégalité cherchée : $d(F_x, F_y) \leq \varepsilon$. $\square$

Démonstration de la proposition Comme dans le lemme 3.10, il suffit de montrer que, pour toutes suites $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ dans M telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_\infty \quad \text{et} \quad F_{x_n} = F_{y_n},$$

on a $F_{x_\infty} = F_{y_\infty}$. On garde les notations du lemme 3.12. Comme C est un ouvert convexe et que $f(M) + h(\Gamma) = f(M)$, on a aussi $C + \overline{h(\Gamma)} = C$. On peut donc construire un compact B de C qui contient les points $f(x_n)$. Le point c) assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(F_{x_n}, F_{x_\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(F_{y_n}, F_{y_\infty}) = 0.$$

Donc $F_{x_\infty} = F_{y_\infty}$. C'est ce que l'on voulait. $\square$

3.7 Variétés à bord euclidiennes convexes

Dans cette section, nous étudions les variétés euclidiennes convexes. Comme nous l'avons vu, cette étude s'applique à l'espace des feuilles de l'application moment.

Soient $E = \mathbb{R}^d$ et P un espace topologique connexe et $D : P \rightarrow \mathbb{R}^d$ une développante euclidienne convexe (définition 3.8). On suppose que P est séparé.

Remarques 1) Les restrictions $D : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ de la développante à de petits ouverts V munissent P d'une structure de variété topologique à bord.

2) Le sous-espace affine E_p de E engendré par le convexe W est une fonction localement constante de p . Elle est donc constante. On peut supposer qu'elle est égale à E . Notons $\partial \tilde{P}$ le bord de la variété à bord $\tilde{P}$. La développante D induit alors un homéomorphisme local de $\tilde{P} - \partial \tilde{P}$ dans E .

3) On peut définir les *structures euclidiennes convexes* sur P à l'aide de cartes locales qui identifient chacun des ouverts d'un recouvrement de P à une partie convexe de E , les changements de cartes étant localement des éléments de $\text{Is}(d)$. Il revient au même de se donner une développante euclidienne convexe D sur le revêtement universel $\tilde{P}$ telle que, pour tout γ dans le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(P)$ les développantes D et $D \circ \gamma$ sont équivalentes. Cette développante D n'est rien d'autre qu'une "carte globale" pour $\tilde{P}$.

On dit en bref que P est une variété à bord euclidienne convexe.

On appelle *isométrie* (pour D) un homéomorphisme g de P tel que les développantes D et $D \circ g$ sont équivalentes. Il existe donc une isométrie $h(g)$ de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $D \circ g = h(g) \circ D$. Lorsque $h(g)$ est une translation de $\mathbb{R}^d$, on dit que g est une *translation*. Le morphisme h est appelé *morphisme d'holonomie*. Un chemin continu c tracé dans P sera dit *affine*

(resp. *affine par morceaux*) si $D \circ c$ l'est. On appelle longueur $\ell(c)$ de c la longueur de $D \circ c$. On munit P de la distance

$$d(p, q) = \inf\{\ell(c) \mid c \text{ est un chemin affine par morceaux de } p \text{ à } q\}$$

Cette distance est bien définie car deux points de P sont toujours reliés par un arc affine par morceaux. La développante D induit alors une isométrie d'un voisinage de tout point p de P (muni de cette distance) sur un convexe de $\mathbb{R}^d$. Les isométries de P ne sont donc rien d'autre que les isométries de la distance d .

Voici un critère qui assure qu'une développante euclidienne convexe est une injection sur un convexe de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3.13 (Complétude) *Soit P un espace topologique connexe séparé, $D : P \rightarrow \mathbb{R}^d$ une développante euclidienne convexe, I un groupe de translations pour D et C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$ contenant l'image $D(P)$. On suppose que $D : P \rightarrow C$ est propre modulo I . Alors*

a) L'image $D(P)$ est un convexe fermé de C et la développante D est un homéomorphisme de P sur son image. En outre, si la développante est polyédrale, $D(P)$ est polyédral au voisinage de chacun de ses points.

b) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par le groupe d'holonomie $h(I)$. On a l'égalité $D(P) + F = D(P)$

c) En outre, si l'action de I sur P est cocompacte, le quotient $D(P)/F$ est compact.

Pour démontrer le théorème de convexité dans le cas hamiltonien (théorème 3.16), nous appliquerons cette proposition avec $I = \{e\}$ et $C = \mathbb{R}^d$, c'est à dire sous l'hypothèse que D est propre. L'énoncé général de cette proposition nous sera utile pour démontrer les théorèmes 3.1, 4.8 et 4.1.

Commençons la démonstration par deux lemmes.

Lemme 3.14 (Compacité des boules) *Avec les notations et hypothèses de la proposition et avec $C = \mathbb{R}^d$. Pour tout p dans P et $R > 0$, la boule fermée $B(p, R)$ de centre p et de rayon R est compacte.*

Démonstration Soit L_0 la boule fermée $B(D(p), R)$ de $\mathbb{R}^d$ et L un compact de P tel que $D^{-1}(L_0) \subset I.L$. Quitte à remplacer P par la composante connexe de $D^{-1}(L_0 + F)$ contenant p , on peut supposer que l'action de I sur P est cocompacte. Comme P est localement compact, on peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout p dans P , la boule $B(p, 3\varepsilon)$ est compacte. On en déduit par récurrence que, pour tout $n > 0$, la boule $B(p, n\varepsilon)$ est compacte. En effet, on recouvre la boule compacte $B(p, n\varepsilon)$ par une famille finie de boules $B(p_i, \varepsilon)$. La boule $B(p, (n+1)\varepsilon)$ est alors incluse dans la réunion des boules $B(p_i, 3\varepsilon)$ et est donc compacte. $\square$

Soient p, q deux points de P . On appelle segment de P d'extrémités p, q une partie $[p, q]$ de P contenant p et q et telle que la développante D induise un homéomorphisme de $[p, q]$ sur le segment $[D(p), D(q)]$ de $\mathbb{R}^d$.

Lemme 3.15 (Existence des segments) *Avec les notations et hypothèses de la proposition. Pour tous p, q dans P , il existe un unique segment $[p, q]$ d'extrémités p et q .*

Démonstration - Unicité. Le segment $[p, q]$ est l'image d'un chemin issu de p qui relève un chemin tracé sur $[D(p), D(q)]$. Il est donc unique.

- Existence. Supposons tout d'abord que $C = \mathbb{R}^d$. Soient $d_0 = d(p, q)$ et c_k une suite de courbes affines par morceaux, parcourues à vitesse 1 qui relient p à q et telles que $\ell(c_k) \leq d_0 + \frac{1}{k}$. La compacité de la boule $B(p, d_0 + 1)$ permet de supposer que ces courbes c_k convergent uniformément vers une courbe c . On a alors $\ell(c) = d$. Donc c minimise la distance entre ses extrémités. Mais c minimise aussi la distance entre deux quelconques de ses points. On en déduit que c est une courbe affine. Son image est le segment cherché.

Dans le cas général, soit c_0 un chemin continu reliant p à q . Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par $h(I)$, K le compact de C enveloppante convexe de l'image du chemin $D \circ c_0$ et $C' = K + F$. C' est un convexe fermé de $\mathbb{R}^d$ inclus dans C . Par construction, les éléments de I échangent les composantes connexes de $D^{-1}(C')$. Notons P' la composante connexe de $D^{-1}(C')$ contenant p et q et $I' := \{\tau \in I : \tau(P') = P'\}$. Alors la développante euclidienne convexe $D : P' \rightarrow \mathbb{R}^d$ est propre modulo I' . Il existe donc un segment $[p, q]$ de P' d'extrémités p et q . $\square$

Démonstration de la proposition 3.13

a) et b) Le lemme 3.15 prouve que D est injectif et que $D(P)$ est étoilé par rapport à chacun de ses points. Donc $D(P)$ est convexe. En outre, l'égalité $d(p, q) = \ell([D(p), D(q)])$ prouve que D est un homéomorphisme sur son image.

Pour tout λ dans $D(P)$, l'orbite $\lambda + h(I)$ est incluse dans $D(P)$, son enveloppe convexe $\lambda + F$ aussi. On a donc l'égalité $D(P) + F = D(P)$.

Montrons enfin que $D(P)$ est fermé dans C . Pour cela, considérons une suite p_n de points de P telle que la suite $D(p_n)$ converge vers un point λ de C . Comme D est propre modulo I , quitte à extraire une sous-suite, il existe des éléments τ_n dans I tels que la suite $\tau_n p_n$ converge vers un point q_∞ de P . On a alors

$$\lambda = D(q_\infty) - \lim_{n \rightarrow \infty} h(\tau_n) \in D(P) + F = D(P) .$$

Donc $D(P)$ est fermé.

c) Soit P_0 un compact de P tel que $P = I.P_0$, on a $D(P) = D(P_0) + F$ et l'image $D(P)/F$ de $D(P)$ dans E/F est donc compacte. $\square$

3.8 Action hamiltonienne d'un tore

Donnons maintenant la démonstration du théorème 3.1, lorsque l'action est hamiltonienne.

Théorème 3.16 (Atiyah-Guillemin-Sternberg) *Soient (M, ω) une variété symplectique connexe, $T = \mathbb{T}^d$ un tore qui agit de façon hamiltonienne sur M , M^T l'ensemble des points fixes de T dans M et $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ le moment de cette action.*

- 1) Si μ est propre, alors l'image $\mu(M)$ est un polyèdre convexe et l'application $\mu : M \rightarrow \mu(M)$ est ouverte et à fibres connexes.
- 2) Si M est compacte, alors $\mu(M^T)$ est un ensemble fini dont l'enveloppe convexe est $\mu(M)$.

Démonstration 1) Comme l'action sur M est hamiltonienne et que le moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ est propre, il résulte du lemme 3.10 que l'espace M_μ des feuilles de μ est séparé, que l'application quotient $\hat{\mu} : M_\mu \rightarrow \mathfrak{t}^*$ est propre et il résulte du lemme 3.9 que $\hat{\mu}$ est une développante euclidienne convexe. On peut donc lui appliquer directement la proposition 3.13 avec $I = \{e\}$ et $C = \mathbb{R}^d$. En outre, $\mu(M)$ est un polyèdre car $\hat{\mu}$ est polyédrale.

2) Il résulte du lemme 3.4 que tout point x de M^T admet un voisinage U tel que

$$\mu(U \cap M^T) = \{\mu(x)\} .$$

La finitude de $\mu(M^T)$ résulte alors de la compacité de M^T .

Il suffit pour conclure de montrer que tout point x de M tel que $\mu(x)$ est un point extrémal de $\mu(M)$ est T -invariant. C'est une conséquence immédiate du lemme 3.4. $\square$

Remarque Dans cette situation hamiltonienne, le théorème 3.1 apporte au théorème 3.16 la précision suivante.

Pour tout x dans M , le morphisme naturel $\pi_1(\mu^{-1}(\mu(x))) \rightarrow \pi_1(M)$ est surjectif.

3.9 Action symplectique d'un tore

Démonstration du théorème 3.1 Comme dans le cas hamiltonien, on oublie le groupe T et la forme symplectique ω pour ne retenir que les propriétés locales de l'application moment $\tilde{\mu}$ décrite dans la définition 3.6 et la Γ -équivariance de $\tilde{\mu}$. Le théorème 3.1 est alors une conséquence de la proposition suivante. $\square$

Proposition 3.17 (Convexité pour une application) *Soient M une variété C^∞ connexe, $p : \tilde{M} \rightarrow M$ son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(M)$, et $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue, localement à fibres connexes et localement ouverte sur un convexe (resp. sur un polyèdre convexe) et telle que, pour tout γ dans Γ , il existe un élément $h(\gamma)$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $f \circ \gamma = f + h(\gamma)$.*

On suppose que f est propre modulo Γ . Alors

a) *l'image $f(\tilde{M})$ est un convexe (resp. un polyèdre convexe) fermé et l'application $f : \tilde{M} \rightarrow f(\tilde{M})$ est ouverte et à fibres connexes.*

b) *Pour tout λ dans $\mathbb{R}^d$, on a l'égalité $\overline{\Gamma.f^{-1}(\lambda)} = f^{-1}(\lambda + \overline{h(\Gamma)})$.*

Remarque Ces hypothèses sont vérifiées lorsque f est une submersion. Dans ce cas, on a $f(\tilde{M}) = \mathbb{R}^d$ et la proposition est due à Fedida ([8]). On peut donc voir cette proposition comme une généralisation du théorème de Fedida à des feuilletages singuliers.

Signalons que l'application moment $\tilde{\mu}$ pour une action symplectique d'un tore sur une variété compacte est rarement une submersion. C'est cependant le cas pour les actions coïsotropes anhamiltoniennes (corollaire 6.10).

Démonstration de la proposition a) D'après la proposition 3.11 l'espace des feuilles $P = \widetilde{M}_f$ est un espace séparé. Pour tout γ dans Γ , on note $\hat{\gamma}$ l'homéomorphisme de $\widetilde{M}_f$ défini par l'égalité $\hat{\gamma} \circ \pi = \pi \circ \gamma$. On pose $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma} / \gamma \in \Gamma\}$.

Le lemme 3.9 affirme que l'application quotient $\hat{f} : P \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une développante euclidienne polyédrale convexe et que le groupe $\hat{\Gamma}$ est un groupe de translations de P . En outre, comme f est propre modulo Γ , la développante $\hat{f}$ est propre modulo $\hat{\Gamma}$. La proposition 3.13 prouve alors que $f(\widetilde{M}) = \hat{f}(P)$ est un polyèdre convexe fermé et que $\hat{f} : P \rightarrow \hat{f}(P)$ est un homéomorphisme, c'est à dire que $f : \widetilde{M} \rightarrow f(\widetilde{M})$ est une application ouverte à fibres connexes.

b) Comme $f : \widetilde{M} \rightarrow f(\widetilde{M})$ est ouverte, pour tout λ dans $f(\widetilde{M})$, on a l'égalité

$$f^{-1}(\overline{\lambda + h(\Gamma)}) = \overline{f^{-1}(\lambda + h(\Gamma))} = \overline{\Gamma \cdot f^{-1}(\lambda)}.$$

En outre, si λ n'est pas dans $f(\widetilde{M})$, les deux membres de cette égalité sont vides. $\square$

Démonstration du corollaire 3.2 Gardons les notations de la proposition 3.17 avec $f = \tilde{\mu}$.

1) On a l'égalité $\mathfrak{t}_h = \{\xi \in \mathfrak{t} / \forall \gamma \in \Gamma h(\gamma)(\xi) = 0\}$. Autrement dit, $\mathfrak{t}_h^\perp$ n'est autre que le sous-espace vectoriel F de $\mathfrak{t}^*$ engendré par le groupe d'holonomie $h(\Gamma)$. Nos assertions résultent donc de la proposition 3.13.b.

2) a) Comme M est compacte, l'action de $\hat{\Gamma}$ sur P est cocompacte. Notre assertion résulte donc de la proposition 3.13.c.

b) Notons T_1 l'adhérence de T_h et $\mathfrak{t}_1$ l'algèbre de Lie de T_1 . On veut montrer l'égalité $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_h$. Comme le convexe $\tilde{\mu}(\widetilde{M})/\mathfrak{t}_h^\perp$ est compact, il admet un point extrémal. Il existe donc un point x de $\widetilde{M}$ tel que le sous-espace affine $A := \tilde{\mu}(x) + \mathfrak{t}_h^\perp$ est extrémal dans $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$. L'image inverse $N := \tilde{\mu}^{-1}(A)$ est Γ -invariante et, d'après le lemme 3.4, on a l'inclusion $N \subset \widetilde{M}^{\mathfrak{t}_h}$. On en déduit les inclusions

$$p(N) \subset M^{T_h} \subset M^{T_1}$$

et enfin $N \subset \widetilde{M}^{\mathfrak{t}_1}$. Le même lemme 3.4 appliqué avec $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}_h$ et avec $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}_1$ prouve d'une part que l'application $\tilde{\mu} : N \rightarrow A$ est ouverte et d'autre part qu'il existe un voisinage U de x tel que $\tilde{\mu}(N \cap U)$ est inclus dans $\tilde{\mu}(x) + \mathfrak{t}_1^\perp$. On a donc $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_h$.

c) D'après le lemme 2.11, l'action de T_h sur M est hamiltonienne, notre énoncé résulte alors du théorème 3.16. $\square$

Remarque Il est probable que $\tilde{\mu}(\widetilde{M}^{\mathfrak{t}_h})$ n'est pas en général égal à une réunion finie de sous-espaces affines parallèles à $\mathfrak{t}_h^\perp$, mais je n'ai pas trouvé d'exemples.

4 Le moment pour l'action d'un groupe compact

Cette partie est consacrée aux propriétés de convexité de l'application moment pour une action symplectique d'un groupe compact K (théorème 4.1). On ne fait plus l'hypothèse que ce groupe est un tore. Lorsque l'action est hamiltonienne, il s'agit d'un théorème dû à Kirwan (théorème 4.8).

On adaptera la méthode décrite dans [6] et [15] pour se ramener à un théorème de convexité pour une action symplectique d'un tore.

Cette méthode consiste à construire une sous-variété symplectique Σ qui rencontre un ouvert connexe et dense de K -orbites, qui est invariante sous l'action d'un tore maximal T de K et sur laquelle les moments de l'action de K et de T coïncident (lemme 4.6).

Dans toute cette partie, on notera K un groupe compact connexe, T un tore maximal de K , $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{t}$ leurs algèbres de Lie. L'égalité $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus [\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ permet d'identifier le dual $\mathfrak{k}^*$ avec le sous-espace vectoriel $(\mathfrak{k}^*)^T$ des points fixes de T dans $\mathfrak{k}^*$. On notera $\mathfrak{t}_+^*$ une chambre de Weyl positive, c'est à dire un cône convexe fermé de $\mathfrak{k}^*$ qui rencontre chaque orbite coadjointe $O = K \cdot \lambda$ dans $\mathfrak{k}^*$ en exactement un point noté $\pi_+(\lambda)$. Un tel cône existe. Cette application $\pi_+ : \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathfrak{t}_+^*$ est continue et propre. Elle induit donc un homéomorphisme entre $K \backslash \mathfrak{k}^*$ et $\mathfrak{t}_+^*$.

4.1 Convexité du moment

Théorème 4.1 (Convexité) *Soient K un groupe compact connexe, (M, ω) une K -variété symplectique connexe, $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M , $\Gamma = \pi_1(M)$, $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ le moment de l'action de $\widetilde{K}$ sur $\widetilde{M}$, $\tilde{\mu}_+ := \pi_+ \circ \tilde{\mu}$ et $h : \Gamma \rightarrow (\mathfrak{k}^*)^K$ le morphisme d'holonomie. On suppose que $\tilde{\mu}_+$ est propre modulo Γ . Alors*

a) l'image $\tilde{\mu}_+(\widetilde{M})$ est un polyèdre convexe fermé et l'application $\tilde{\mu}_+ : \widetilde{M} \rightarrow \tilde{\mu}_+(\widetilde{M})$ est ouverte.

b) Pour tout λ dans $\mathfrak{k}^$, on a l'égalité $\overline{\Gamma \cdot \tilde{\mu}_+^{-1}(\lambda)} = \tilde{\mu}_+^{-1}(\lambda + \overline{h(\Gamma)})$.*

Ce théorème généralise le théorème de Kirwan de convexité du moment pour une action hamiltonienne (théorème 4.8).

Remarques 1) L'hypothèse “ $\tilde{\mu}_+$ propre modulo Γ ” équivaut à “ $\tilde{\mu}$ propre modulo Γ ”. Elle est bien sûr vérifiée lorsque M est compacte.

2) Comme $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est une réunion d'orbites coadjointes (voir lemme 2.8), l'image $\tilde{\mu}(\widetilde{M})$ est une réunion d'orbites coadjointes et est donc entièrement déterminée par son intersection $\tilde{\mu}_+(\widetilde{M})$ avec la chambre de Weyl.

3) L'application $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \tilde{\mu}(\widetilde{M})$ n'est pas toujours ouverte, comme le prouve l'exemple suivant. Le groupe $K = \mathrm{SO}(3)$ agit sur la variété symplectique simplement connexe $M = T^*S^2 = \{(v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 / \|v\| = 1 \text{ et } v \cdot w = 0\}$. Si on identifie $\mathfrak{k}^*$ avec $\mathbb{R}^3$, le moment μ est donné par le produit extérieur : $\mu(v, w) = v \wedge w$. Il est propre mais n'est pas ouvert au voisinage des points de la fibre $\mu^{-1}(0)$.

On démontrera simultanément l'énoncé suivant qui précise ce théorème.

On rappelle que $\mathfrak{k}_h = \{\xi \in \mathfrak{k} / i_{X_\xi} \omega \text{ est exacte}\}$ et $\mathfrak{k}_h^\perp = \{\lambda \in \mathfrak{k}^* / \lambda(\mathfrak{k}_h) = 0\}$,

Corollaire 4.2 *Avec les notations du théorème 4.1.*

1) On a l'égalité $\tilde{\mu}(\widetilde{M}) + \mathfrak{k}_h^\perp = \tilde{\mu}(\widetilde{M})$

2) Si M est compacte, alors

a) le quotient $\tilde{\mu}(\widetilde{M})/\mathfrak{k}_h^\perp$ est compact.

b) Le sous-groupe de Lie K_h de K d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_h$ est fermé et contient le groupe dérivé $[K, K]$.

Cette partie est entièrement consacrée à la démonstration du théorème 4.1 et de son corollaire.

4.2 Points réguliers

Commençons par quelques lemmes relatifs aux actions des groupes compacts.

Lemme 4.3 (Points réguliers) *Soient K un groupe de Lie compact qui agit sur une variété C^∞ M connexe, $d_0 = \sup_{x \in M} (\dim Kx)$ et $M_r = \{x \in M / \dim Kx = d_0\}$ l'ouvert des éléments réguliers de M . Alors M_r est dense et connexe.*

Démonstration

Densité On suppose tout d'abord que M est un espace vectoriel et que l'action de K sur M est linéaire. Pour ξ dans $\mathfrak{k}$, les champs de vecteurs X_ξ sur M sont analytiques. L'ouvert M_r est l'ensemble des points où cette famille est de rang maximal. Il est donc dense.

Dans le cas général, chaque orbite Kx dans M admet un voisinage tubulaire U que l'on identifie au fibré induit $K \times_H V$ où H est le groupe d'isotropie de x et $V := T_x M / T_x(K.x)$ est la représentation normale de H . Notons $y = [k, v]$ un point de $K \times_H V$. On a $\dim K.y = \dim(K/H) + \dim(H.v)$. Le premier cas prouve donc que l'ouvert U_r des éléments réguliers de U est dense dans U .

Il reste à montrer que $U_r = M_r \cap U$. Pour cela, on note, pour tout y dans M , $d_y = \inf_{O \ni y} \sup_{z \in O} (\dim Kz)$ où O décrit l'ensemble des ouverts contenant y . Il résulte de notre raisonnement que la fonction $y \rightarrow d_y$ est constante sur chacun des voisinages tubulaires U . Comme M est connexe, cette fonction est constante égale à d . Donc $U_r = M_r \cap U$.

Connexité Procédons par récurrence sur $\dim M$. En utilisant comme en a) un voisinage tubulaire d'une orbite, on peut se ramener au cas où M est un espace vectoriel et l'action de K sur M est linéaire.

Si $\dim M \leq 1$, on a $d = 0$ et donc $M_r = M$. On suppose désormais que $\dim M \geq 2$. Le groupe compact K préserve un produit scalaire euclidien sur M et l'ouvert M_r est invariant par homothéties. On en déduit que K laisse invariant chacune des sphères non nulles S de M et que l'on a l'égalité $S_r = M_r \cap S$. Par hypothèse de récurrence, S_r est connexe et M_r aussi. $\square$

Corollaire 4.4 (Points réguliers d'image régulière) *Avec les mêmes notations.*

- a) *L'ouvert $p^{-1}(M_r)$ des éléments réguliers de $\widetilde{M}$ est connexe et dense.*
- b) *Soit E une variété C^∞ sur laquelle K agit, $\Phi : \widetilde{M} \rightarrow E$ une application C^∞ $\widetilde{K}$ -équivariante, $e_0 = \sup_{x \in \widetilde{M}} \dim \widetilde{K} \cdot \Phi(x)$ et $\widetilde{M}_R := \{x \in \widetilde{M} / \dim \widetilde{K} \cdot \Phi(x) = e_0\}$.
Si Φ est de rang constant, $\widetilde{M}_R$ est un ouvert connexe et dense dans $\widetilde{M}$.*

Démonstration On reprend pas à pas la démonstration du lemme.

a) On a montré que tout point de M admet un voisinage U tel que $U \cap M_r$ est connexe et dense dans U . On en déduit que $p^{-1}(M_r)$ est connexe et dense dans $\widetilde{M}$.

b) Comme Φ est de rang constant, tout point x de $\widetilde{M}$ admet un voisinage U tel que l'image $N := \Phi(U)$ est une sous-variété localement fermée de E et l'application $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ est une fibration à fibres connexes.

On remarque que, pour n dans N , on a $\mathfrak{k}.n \subset T_n N$. Soit H' le groupe d'isotropie de $\Phi(x)$ et V la représentation normale de H' . On peut donc, quitte à réduire U supposer que N est inclus dans un voisinage tubulaire de l'orbite $K \cdot \Phi(x)$ que l'on identifie à $K \times_{H'} V$ de sorte que N s'identifie à l'ensemble des points $[k, w]$ où k décrit un voisinage de e dans K et w décrit un sous-espace vectoriel W de V invariant par la composante connexe de H' .

On en déduit, comme dans le lemme 4.3 que la fonction

$$y \rightarrow e_y := \inf_{O \ni y} \sup_{z \in O} (\dim K \cdot \Phi(z))$$

où O décrit l'ensemble des ouverts contenant y , est constante égale à e_0 sur $\widetilde{M}$ et que l'ouvert $U_R := U \cap \widetilde{M}_R$ est connexe et dense dans U . Par suite $\widetilde{M}_R$ est connexe et dense dans $\widetilde{M}$. $\square$

Lemme 4.5 (Finitude) *Soit M une variété C^∞ sur laquelle agit un tore T . Alors, pour tout compact L de M , l'ensemble des groupes d'isotropie T_x des points x de L est un ensemble fini.*

Démonstration A l'aide d'un voisinage tubulaire $U \simeq T \times_H V$ de chaque T -orbite, on se ramène au cas où M est un espace vectoriel et où l'action de T sur M est linéaire. Quitte à agrandir M et T , on peut supposer que $M = \mathbb{C}^n$ et $\mathfrak{t} = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) / \forall i |a_i| = 1\}$. Dans ce cas, il y a 2^n groupes d'isotropie possibles. $\square$

4.3 Réduction à l'action du tore

Enonçons encore quelques propriétés classiques des chambres de Weyl. Il existe des éléments $\xi_1, \dots, \xi_s$ de $\mathfrak{t}$, appelés les coracines simples, tels que $\mathfrak{t}_+^* = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* / \forall i = 1, \dots, s \lambda(\xi_i) \geq 0\}$. Ces éléments forment une base de $\mathfrak{t}$ modulo le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{k}$. On appelle facette de $\mathfrak{t}_+^*$ une partie de la forme

$$F_I = \{\lambda \in \mathfrak{t}_+^* / \lambda(\xi_i) > 0 \Leftrightarrow i \in I\}$$

où I est une partie de $\{1, \dots, s\}$. Il y a 2^s facettes.

Le groupe d'isotropie K_λ d'un point λ d'une facette F ne dépend pas du choix de ce point dans F . En particulier toutes les orbites coadjointes qui rencontrent F sont de même dimension.

Voici maintenant le lemme qui permet de ramener l'étude du moment à celui d'un groupe commutatif.

Lemme 4.6 (Tranche) *Soient K un groupe compact connexe, (M, ω) une K -variété symplectique connexe, $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ une application moment, T un tore maximal de K et $\mathfrak{t}_+^*$ une chambre de Weyl dans $\mathfrak{k}^*$. Notons $\tilde{\mu}_+ := \pi_+ \circ \tilde{\mu}$. Alors*

a) Il existe une unique facette F de $\mathfrak{t}_+^$ telle que $\tilde{\mu}_+(\tilde{M}) \subset \overline{F}$ et $\tilde{\mu}_+(\tilde{M}) \cap F \neq \emptyset$. L'ouvert $\Omega := \tilde{\mu}_+^{-1}(F)$ est alors connexe et dense dans $\tilde{M}$.*

b) L'ensemble $\Sigma := \tilde{\mu}^{-1}(F)$ est alors une sous-variété symplectique connexe Γ -invariante et $\tilde{T}$ -invariante de $\tilde{M}$. En outre la restriction $\tilde{\mu}|_\Sigma$ est un moment pour l'action de $\tilde{T}$ sur Σ .

Remarques 1) D'après le lemme 2.8, on a aussi l'égalité $\Omega := \{x \in \tilde{M} / \tilde{\mu}(\tilde{K}x) \cap F \neq \emptyset\}$.

2) Si l'action est hamiltonienne, on peut remplacer dans cet énoncé $\tilde{\mu}$ par un moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$.

Démonstration a) Comme, pour tout x dans $\tilde{M}$, le noyau $\text{Ker} d\tilde{\mu}(x)$ est l'orthogonal de $T_x(\tilde{K}x)$ pour la forme symplectique, le moment $\tilde{\mu}$ est de rang constant sur l'ouvert $p^{-1}(M_r)$. D'après le corollaire 4.4, cet ouvert est connexe et dense dans $\tilde{M}$. On peut donc, quitte à remplacer M par M_r , supposer que $\tilde{\mu}$ est de rang constant.

Soit $\tilde{M}_R$ l'ouvert des points x de $\tilde{M}$ tels que $\dim \tilde{K}\tilde{\mu}(x)$ est maximal. Comme $\tilde{\mu}$ est $[\tilde{K}, \tilde{K}]$ -équivariante (lemme 2.8), l'ouvert $\tilde{M}_R$ est connexe et dense dans $\tilde{M}$ (corollaire 4.4). Soit F une facette de $\mathfrak{t}_+^*$ qui rencontre $\tilde{\mu}_+(\tilde{M}_R)$. L'image inverse $\tilde{\mu}_+^{-1}(F)$ est à la fois ouverte et fermée dans $\tilde{M}_R$. Donc $\tilde{\mu}_+^{-1}(F) = \tilde{M}_R$. C'est ce que l'on voulait.

b) Comme la facette F est transverse aux orbites coadjointes, la réunion Y_F des orbites coadjointes qui rencontrent F est une sous-variété localement fermée de $\mathfrak{k}^*$ et on a l'égalité, pour tout λ dans F ,

$$T_\lambda(K\lambda) \oplus T_\lambda F = T_\lambda(Y_F) .$$

On a l'égalité $\Omega = \tilde{\mu}^{-1}(Y_F)$. Pour montrer que $\Sigma := \tilde{\mu}^{-1}(F)$ est une sous-variété de Ω , il suffit de montrer que $\tilde{\mu}$ et F sont transverses, c'est à dire que, pour tout x dans Σ , on a

$$\text{Im} d\tilde{\mu}(x) + T_{\tilde{\mu}(x)} F = T_{\tilde{\mu}(x)} Y_F .$$

Cela résulte de ce que $\tilde{\mu}$ est $[\tilde{K}, \tilde{K}]$ -équivariant (lemme 2.8).

Vérifions maintenant que Σ est symplectique, c'est-à-dire que, pour tout x dans Σ , tout élément X de $T_x \Sigma \cap T_x \Sigma^\omega$ est nul. Comme $T_x \Sigma$ contient $\text{Ker} d\tilde{\mu}(x)$, l'élément X est dans $T_x \Sigma \cap T_x(\tilde{K}x)$. La transversalité de F et $\tilde{K}\tilde{\mu}(x)$ prouve alors que X est dans $\text{Ker} d\tilde{\mu}(x)$. On en déduit que X est orthogonal à la fois à $T_x(\tilde{K}x)$ et à $T_x \Sigma$ et donc que X est nul.

La connexité de Σ résulte de celle de Ω . Les autres assertions sont évidentes. $\square$

4.4 Connexité des fibres

Dans le cas hamiltonien, la connexité des fibres de l'application moment résultera du lemme de topologie suivant qui reprend les idées du lemme 3.10.

Lemme 4.7 (Connexité des fibres) *Soient M un espace métrique, Ω un ouvert dense de M et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue et propre. On suppose que l'image $f(\Omega)$ est un convexe de $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout x dans Ω , la fibre $f^{-1}(f(x))$ est connexe.*

Alors toutes les fibres de f sont connexes.

Remarques 1) L'hypothèse $f(\Omega)$ convexe est utile. Exemple. $M = [0, 1]$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ et $\Omega =]0, 1[$.

2) Il ne semble pas que l'on puisse démontrer que l'application moment est ouverte par un argument de topologie similaire. En effet, on peut trouver des applications f comme dans le lemme 4.7 qui sont ouvertes sur Ω mais pas sur M . Exemple. $M = \{(s, t) \in [0, \infty[^2 / 1 \leq s^2 + t^2 \leq 2\}$, $\Omega = \{(s, t) \in M / s^2 + t^2 > 1\}$ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$f(s, t) = ((s^2 + t^2 - 1)s, (s^2 + t^2 - 1)t) .$$

Démonstration Supposons par l'absurde qu'il existe un point λ de $\mathbb{R}^d$ tel que la fibre $f^{-1}(\lambda)$ ne soit pas connexe. Comme f est propre, cette fibre est compacte. Il existe donc une décomposition de $f^{-1}(\lambda)$ en réunion de deux compacts disjoints G et G' .

Notons $\varepsilon = \frac{1}{3} \inf\{d(x, y) / x \in G, y \in G'\}$ et $G_\varepsilon, G'_\varepsilon$ les ε -voisinages de G et G' . Comme f est propre, f est fermée (i.e. l'image par f de tout fermé est un fermé). On peut donc trouver un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout x dans M , on a l'implication

$$d(f(x), \lambda) < \alpha \implies x \in G_\varepsilon \cap G'_\varepsilon .$$

Notons $B := \{\nu \in f(\Omega) / d(\nu, \lambda) < \alpha\}$. C'est un convexe de $\mathbb{R}^d$. Par hypothèse, la fibre $f^{-1}(\nu)$ au dessus d'un élément ν de B est connexe. Elle est donc incluse dans G_ε ou dans G'_ε . Cela définit une partition de B en deux fermés non vides disjoints contredisant la connexité de B . $\square$

4.5 Convexité du moment pour une action hamiltonienne

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4.1 lorsque l'action est hamiltonienne.

Théorème 4.8 (Kirwan) *Soient (M, ω) une variété symplectique connexe, K un groupe compact connexe qui agit de façon hamiltonienne sur M , $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ le moment de cette action, $\mathfrak{t}_+^*$ une chambre de Weyl positive et $\mu_+ := \pi_+ \circ \mu$.*

Si μ_+ est propre, l'image $\mu_+(M)$ est un polyèdre convexe fermé et l'application $\mu_+ : M \rightarrow \mu_+(M)$ est ouverte et à fibres connexes.

Démonstration a) D'après le lemme 4.6, il existe une unique facette F de $\mathfrak{t}_+^*$ telle que $\mu_+(M) \subset \overline{F}$ et $\mu_+(M) \cap F \neq \emptyset$, la sous-variété symplectique $\Sigma = \mu^{-1}(F)$ est connexe, T -invariante et la restriction $\mu|_\Sigma$ est un moment pour l'action de T sur Σ . L'application $\mu : \Sigma \rightarrow \mathfrak{t}^*$ n'est pas propre, on ne peut pas lui appliquer directement le théorème 3.16. Cependant, l'application $\mu : \Sigma \rightarrow F$ est propre. On peut donc reprendre la démonstration de ce théorème. Il résulte de la proposition 3.10 que l'espace des feuilles $P = \Sigma_\mu$ est séparé. L'application quotient $\hat{\mu} : \Sigma_\mu \rightarrow F$ est propre. D'après le lemme 3.9, $\hat{\mu}$ est une développante euclidienne convexe. Donc la proposition 3.13 assure que $\hat{\mu}$ est un homéomorphisme de P sur un convexe C_F fermé dans F .

L'ouvert $\Omega := K.\Sigma$ est dense dans M . Comme $\mu_+ : M \rightarrow \mathfrak{t}_+^*$ est propre, l'image $\mu_+(\widetilde{M})$ est égale au convexe fermé $C := \overline{C_F}$ de $\mathfrak{t}_+^*$.

Montrons que C est un polyèdre. On sait que le convexe $C \cap F$ est polyédral au voisinage de tous ses points. Pour conclure, il suffit de montrer que tout compact de $\overline{F}$ ne rencontre qu'un nombre fini de facettes de $C \cap F$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait à l'aide du lemme 3.4 trouver une suite de points x_n dans Σ dont les images $\mu(x_n)$ sont dans des facettes F_n distinctes de $C \cap F$, de sorte que la direction de la facette F_n soit égale à l'orthogonal $\mathfrak{s}_n^\perp$ de l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie S_n de x_n . En particulier, ces groupes S_n sont distincts. Comme μ est propre, ces points x_n restent dans un compact de M . Ceci contredit le lemme 4.5.

Montrons que, pour tout x dans M , la fibre $\mu_+^{-1}(\mu_+(x))$ est connexe. Pour x dans Ω , cela résulte de la connexité des fibres de l'application $\mu : \Sigma \rightarrow F$. Le cas général s'en déduit à l'aide du lemme 4.7.

Il reste à montrer que l'application $\mu_+ : M \rightarrow C$ est ouverte. Nous admettrons pour cela le fait suivant dû à Sjamaar voir [27] qui est démontré en détail dans les notes de cours de D.Luna [22].

Fait 4.9 (Sjamaar) *Soient K un groupe compact connexe qui agit de façon hamiltonienne sur une variété symplectique connexe (M, ω) , $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ un moment et $\mu_+ := \pi_+ \circ \mu$.*

Pour tout x dans M , il existe une base de voisinages ouverts U de x et un cône convexe polyédral C_x tels que l'image $\mu_+(U)$ est incluse dans $\mu_+(x) + C_x$ et tels que l'application $\mu_+ : U \rightarrow \mu_+(x) + C_x$ est ouverte.

Fin la démonstration du théorème 4.8 Pour tout point x de M , il existe donc un cône polyédral convexe C_x et un voisinage ouvert U de x tels que l'application $\mu_+ : U \rightarrow \mu_+(x) + C_x$ est ouverte. Comme $\Omega \cap U$ est dense dans U , le début de notre démonstration prouve que $\mu_+(U) \cap C_F$ est ouvert dans C_F et dense dans $\mu_+(U)$. On en déduit que C et $\mu_+(x) + C_x$ coïncident au voisinage de $\mu_+(x)$. Le fait 4.9 prouve alors que l'application $\mu_+ : U \rightarrow C$ est ouverte. C'est ce que l'on voulait $\square$

4.6 Convexité du moment pour une action symplectique

Pour démontrer le théorème 4.1, on suit tout d'abord la stratégie adoptée dans le cas hamiltonien pour obtenir le lemme suivant

Lemme 4.10 (Convexité sur un ouvert) *Avec les notations et hypothèses du théorème 4.1. Soit F la facette de $\mathfrak{t}_+^*$ et Ω l'ouvert connexe dense de M donnés par le lemme 4.6. Alors l'image $\tilde{\mu}_+(\Omega)$ est un convexe fermé dans F et l'application $\tilde{\mu}_+ : \Omega \rightarrow C_F$ est ouverte et à fibres connexes.*

Démonstration On procède comme dans la démonstration du théorème 4.8. On utilise l'égalité $\Omega := \tilde{K} \cdot \Sigma$ où $\Sigma = \tilde{\mu}^{-1}(F)$ est une sous- $\tilde{T}$ -variété symplectique connexe Γ -invariante dont le moment $\tilde{\mu} : \Sigma \rightarrow F$ est propre modulo Γ . Il résulte du lemme 3.11 que l'espace des feuilles $P = \Sigma_{\tilde{\mu}}$ est séparé. L'application quotient $\hat{\mu} : \Sigma_{\tilde{\mu}} \rightarrow F$ est propre modulo le groupe $I := \hat{\Gamma}$. D'après le lemme 3.9, $\hat{\mu}$ est une développante euclidienne convexe. Donc la proposition 3.13 assure que $\hat{\mu}$ est un homéomorphisme de P sur un convexe de F . $\square$

Nous avons besoin du corollaire suivant du fait 4.9 qui est un analogue non commutatif du lemme 3.4.

Lemme 4.11 (Convexité locale) *Soient K un groupe compact connexe, (M, ω) une K -variété symplectique connexe, $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ un moment et $\tilde{\mu}_+ := \pi_+ \circ \tilde{\mu}$.*

Pour tout x dans $\tilde{M}$, il existe une base de voisinages ouverts U de x et un cône convexe polyédral C_x tels que l'image $\tilde{\mu}_+(U)$ est incluse dans $\tilde{\mu}_+(x) + C_x$ et tels que l'application $\tilde{\mu}_+ : U \rightarrow \tilde{\mu}_+(x) + C_x$ est ouverte.

Démonstration On peut supposer que M est le modèle local $X = X(N, \sigma, W)$ des propositions 1.9 et 2.17 dont on reprend les notations. Notons $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{k}$, $K' := H.[K, K]$ et $\mathfrak{l}' := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}'$. Comme $\mathfrak{l}$ est le noyau d'une 2-forme fermée, on a l'égalité $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l} \cap [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{z})$ et donc $\mathfrak{k}' \cap \mathfrak{z} \subset \mathfrak{l}$.

Quitte à remplacer K par un revêtement fini, on peut trouver un sous-tore K'' du centre de K tel que $K = K' \times K''$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{l}''$ où $\mathfrak{l}'' := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}''$. La variété symplectique X s'identifie au produit $X' \times X''$ où $X' = X(K'/H, \sigma, W)$ et $X'' = X(K'', \sigma, 0)$ et l'action de $K = K' \times K''$ sur $X \simeq X' \times X''$ est l'action produit. Le premier facteur est une action hamiltonienne, on peut lui appliquer le fait 4.9. Le deuxième facteur est une action symplectique d'un tore, on peut lui appliquer le lemme 3.4. $\square$

Démonstration du théorème 4.1 a) On garde les notations du lemme 4.10.

Soit $C = \overline{C_F}$. Montrons tout d'abord que l'application $\tilde{\mu}_+ : \tilde{M} \rightarrow C$ est ouverte. On procède comme à la fin de la démonstration du théorème 4.8. Pour tout point x de M , il existe donc un cône polyédral convexe C_x et un voisinage ouvert U de x tels que l'application $\tilde{\mu}_+ : U \rightarrow \tilde{\mu}_+(x) + C_x$ est ouverte. Comme $\Omega \cap U$ est dense dans U , le lemme 4.10 prouve que $\tilde{\mu}_+(U) \cap C_F$ est ouvert dans C_F et dense dans $\tilde{\mu}_+(U)$. On en déduit que C et $\tilde{\mu}_+(x) + C_x$ coïncident au voisinage de $\tilde{\mu}_+(x)$. Le lemme 4.11 prouve alors que l'application $\tilde{\mu}_+ : U \rightarrow C$ est ouverte.

Soit $C' := \tilde{\mu}_+(\tilde{M})$. Montrons maintenant que $C' = C$. On vient de voir que C' est un ouvert de C . Cet ouvert est invariant par translation par $h(\Gamma)$ et donc aussi par $\overline{h(\Gamma)}$. Comme l'application moment $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ est propre modulo Γ , l'application obtenue par

passage au quotient $\bar{\mu} : M \rightarrow C/\overline{h(\Gamma)}$ est propre. Son image est donc fermée. Autrement dit, l'ouvert C' est fermé dans C . Comme C est connexe, on en déduit l'égalité $C' = C$.

Ce raisonnement prouve aussi que C est un polyèdre convexe.

b) On procède comme pour la proposition 3.17.b : Comme $\tilde{\mu}_+ : \tilde{M} \rightarrow \tilde{\mu}_+(\tilde{M})$ est ouverte, on a les égalités $\tilde{\mu}_+^{-1}(\overline{\lambda + h(\Gamma)}) = \overline{\tilde{\mu}_+^{-1}(\lambda + h(\Gamma))} = \overline{\Gamma \cdot \tilde{\mu}_+^{-1}(\lambda)}$, pour tout λ dans $\tilde{\mu}_+(\tilde{M})$. En outre, si λ n'est pas dans $\tilde{\mu}_+(\tilde{M})$, ces ensembles sont vides. $\square$

Remarque Voici une autre stratégie pour démontrer le théorème 4.1.

Le lemme 4.11 affirme que l'application $\tilde{\mu}_+$ est localement ouverte sur un polyèdre convexe (définition 3.6). Il est probable que $\tilde{\mu}_+$ est localement à fibres connexes : c'est une propriété du modèle local qui mérite d'être vérifiée en détail. On pourrait alors appliquer directement la proposition 3.17 avec l'application $\tilde{\mu}_+$.

En outre cet argument prouverait directement que les fibres de $\tilde{\mu}_+$ sont connexes.

Démonstration du corollaire 4.2 Gardons les notations de la démonstration du théorème 4.1.

1) On a l'égalité $\mathfrak{k}_h = \{\xi \in \mathfrak{t} / \forall \gamma \in \Gamma h(\gamma)(\xi) = 0\}$. Autrement dit, $\mathfrak{k}_h^\perp$ n'est autre que le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{k}^*$ engendré par le groupe d'holonomie $h(\Gamma)$. Comme $\tilde{\mu}(\tilde{M})$ est un convexe invariant par $h(\Gamma)$, on a l'égalité $\tilde{\mu}(\tilde{M}) + \mathfrak{k}_h^\perp = \tilde{\mu}(\tilde{M})$.

2) a) Soit M_0 un compact de $\tilde{M}$ tel que $\tilde{M} = \Gamma M_0$. On a alors $\tilde{\mu}(\tilde{M}) = \tilde{\mu}(M_0) + \mathfrak{k}_h^\perp$.

b) D'après le lemme 2.8, le groupe K_h contient $[K, K]$. Soient Z la composante connexe du centre de K et $Z_h := Z \cap K_h$. D'après le corollaire 3.2, le groupe Z_h est fermé, donc le groupe K_h aussi. $\square$

5 Actions coïsootropes

Les actions symplectiques coïsootropes (aussi appelées actions sans multiplicité) d'un groupe compact K sur une variété symplectique (M, ω) sont les actions symplectiques dont les orbites régulières sont coïsootropes.

Ces actions sont les plus petites possibles au sens suivant : la variété M n'est pas la réunion de ses sous-variétés symplectiques K -invariantes de codimension non nulles.

Ces actions ont été introduites par Guillemin et Sternberg dans [16].

Cette partie est consacrée à la démonstration de quelques propriétés générales de ces actions qui nous seront utiles dans la partie suivante.

5.1 Orbites coïsootropes et commutativité du crochet de Poisson.

Lorsqu'un groupe K agit sur une variété M , on note $C^\infty(M)^K$ l'espace des fonctions K -invariantes sur M de classe C^∞ .

Proposition 5.1 *Soient K un groupe compact connexe et (M, ω) une K -variété symplectique connexe. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La réunion des sous-variétés symplectiques K -invariantes de codimension positive dans M n'est pas égale à M .*
- (ii) *Toutes les orbites régulières de K dans M sont coïsootropes.*
- (iii) *$C^\infty(M)^K$ est commutatif pour le crochet de Poisson. En outre, En outre, lorsque K est un tore, ces assertions sont équivalentes à :*
- (iv) *Il existe une orbite de K dans M qui est coïsootrope.*

Définition 5.2 *Lorsque ces assertions sont vraies, on dit que l'action de K sur (M, ω) est coïsootrope (ou sans multiplicité).*

Remarques 1) L'assertion (iii) signifie que le crochet de Poisson de deux fonctions K -invariantes est nul.

2) Notons $C_c^\infty(M)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact et $C_c^\infty(M)^K := C^\infty(M)^K \cap C_c^\infty(M)$. L'assertion (iii) est équivalente à l'assertion :

(iii)' $C_c^\infty(M)^K$ est commutatif pour le crochet de Poisson.

3) Il se peut que certaines orbites non régulières d'une action coïsootrope ne soient pas coïsootropes. C'est le cas des points fixes de K dans M .

L'outil principal de la démonstration est le modèle local $X(N, \sigma, W)$ des propositions 1.9 et 2.17 dont on reprend les notations. Remarquons que l'orbite N est régulière dans $X(N, \sigma, W)$ si et seulement si l'action de la composante connexe H_e du groupe d'isotropie H sur $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times W$ est triviale. Remarquons aussi que l'orbite N est coïsootrope si et seulement si $W = 0$.

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 5.3 *Soient K un groupe compact connexe et (M, ω) une K -variété symplectique connexe. Par tout point x de M passe une sous-variété symplectique K -invariante M' dans laquelle l'orbite $K.x$ est coïsothrope.*

Remarque La sous-variété M' est ouverte dans M si et seulement si l'orbite $K.x$ est coïsothrope dans M .

Démonstration On peut supposer que M est égal à un modèle local $X = X(N, \sigma, W)$ et que $K.x = N$. On prend alors $M' = \{[k, \nu, w] \in X \mid w = 0\}$. $\square$

Soit M une K -variété. Un élément x de M est dit régulier principal si l'action du groupe d'isotropie en x sur l'espace vectoriel $T_x M / T_x Kx$ est triviale.

Lemme 5.4 *Soient M une variété C^∞ connexe et K un groupe de Lie compact qui agit sur M . Alors l'ouvert M_{pr} des éléments réguliers principaux est dense dans M*

Démonstration D'après le lemme 4.3, il suffit de montrer que l'ouvert M_{pr} est dense dans l'ouvert M_r des éléments réguliers. On peut donc supposer que M est un fibré induit $K \times_H V$ où l'action sur V de la composante connexe H_e de H est triviale. On se ramène ainsi à démontrer le lemme pour une action linéaire d'un groupe fini. Dans ce cas, le lemme est évident. $\square$

Démonstration de la proposition 5.1

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) : cela résulte du lemme 5.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soient φ, ψ deux fonctions K -invariantes sur M . Pour tout point x de M_r , l'orbite Kx est coïsothrope. Donc le gradient symplectique X^ψ est tangent à cette orbite. Par suite, la fonction $\{\varphi, \psi\} = L_{X^\psi}(\varphi)$ est nulle sur M_r . Elle est donc nulle sur M .

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $N = Kx$ une orbite régulière principale. Montrons que N est coïsothrope. Il existe un voisinage K -invariant U de N qui s'identifie via un difféomorphisme K -équivariant au produit $N \times V$ où $V = T_x M / T_x N$. On a alors une identification naturelle : $C_c^\infty(U)^K \simeq C_c^\infty(V)$.

Les valeurs en x des gradients symplectiques X^ψ des fonctions ψ de $C_c^\infty(U)^K$ engendrent donc l'orthogonal $T_x N^\omega$. Si l'orbite N n'est pas coïsothrope, on peut trouver ψ dans $C_c^\infty(U)^K$ dont le gradient symplectique X^ψ n'est pas tangent à N en X . On peut alors trouver φ dans $C_c^\infty(U)^K$ tel que $L_{X^\psi}(\varphi) \neq 0$. Autrement dit $\{\varphi, \psi\} \neq 0$. Ceci contredit la commutativité de $C_c^\infty(M)^K$. Donc N est coïsothrope.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) : On suppose désormais que K est un tore. Montrons tout d'abord que la réunion M_c des orbites coïsootropes est un ouvert de M . Soit $N \hookrightarrow M$ une orbite coïsothrope. On peut supposer que M est égal à un modèle local $X = X(N, \sigma, W)$ avec $W = 0$. On a donc $X = K \times_H (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$, $\omega = \omega_0 + \omega_1$, $Y = K \times (\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$ et $q : Y \rightarrow X$ est la projection. Il résulte de la formule explicite pour $q^*\omega$ que toutes les orbites de K dans Y sont coïsootropes pour $q^*\omega$. On en déduit que toutes les orbites de K dans X sont coïsootropes.

Montrons maintenant que la réunion M_{rc} des orbites régulières coïsootropes est un fermé de l'ouvert M_r des éléments réguliers. Soit $N \hookrightarrow M$ une orbite régulière qui est limite

d'orbites régulières coïsootropes N_k . Comme toutes ces orbites ont la même dimension, on a l'égalité $T_x N = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{x_k} N_k$. Les espaces $T_{x_k} N_k$ sont coïsootropes. Donc l'espace $T_x N$ aussi et N est coïso trope.

Donc M_{rc} est ouvert et fermé dans le connexe M_r . D'où $M_{rc} = M_r$ ou $M_{rc} = \emptyset$. $\square$

Corollaire 5.5 *Soient K un groupe compact connexe et (M, ω) une K -variété symplectique connexe. Alors*

a) Par tout point x de M passe une variété symplectique K -invariante sur laquelle l'action de K est coïso trope.

b) Soit U un ouvert connexe K -invariant de M . Alors l'action de K sur U est coïso trope si et seulement si l'action de K sur M est coïso trope.

Démonstration a) Cela résulte de (ii) et du lemme 5.3.

b) Cette assertion ne sera pas utilisée. Pour un tore K , elle résulte de (ii) et (iv). $\square$

Remarque Lorsque l'action de K sur M est coïso trope, la réunion des sous-variétés symplectiques K -invariantes de codimension positive ne rencontre pas M_r . Elle est donc d'intérieur vide.

5.2 Actions coïsootropes et fibres du moment

Proposition 5.6 (Feuilles du moment) *Soient K un groupe compact connexe, (M, ω) une K -variété symplectique connexe, $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M , $\Gamma = \pi_1(M)$ et $\tilde{\mu} : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ le moment de l'action de $\widetilde{K}$ sur $\widetilde{M}$. Pour tout x dans $\widetilde{M}$, on note F_x la feuille de $\tilde{\mu}$ passant par x . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) L'action de K sur M est coïso trope.*
- (ii) Pour tout x dans $\widetilde{M}$, on a $F_x \subset \widetilde{K}x$.*
- (iii) Il existe x dans $\widetilde{M}_r$ tel que $F_x \subset \widetilde{K}x$.*

Remarque L'action diagonale de $K = \mathrm{U}(1)$ sur $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est hamiltonienne mais n'est pas coïso trope. Pourtant certaines fibres (non régulières) de l'application moment sont des K -orbites (l'image de l'application moment est un segment; il s'agit des fibres au dessus des extrémités de ce segment)

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons tout d'abord x régulier. Sur l'ouvert $\widetilde{M}_r$ des éléments réguliers, l'application $\tilde{\mu}$ est de rang constant. Les feuilles de cette application forment donc un feuilletage de $\widetilde{M}_r$. Les orbites de $\widetilde{K}$ forment aussi un feuilletage de $\widetilde{M}_r$. Comme ces orbites sont coïsootropes, les espaces tangents aux feuilles du moment sont inclus dans les espaces tangents aux $\widetilde{K}$ -orbites. On en déduit que les feuilles du moment sont incluses dans les $\widetilde{K}$ -orbites.

Dans le cas général, soient x, y deux éléments de $\widetilde{M}$ tels que $F_x = F_y$. On note $\tilde{\mu}_+ = \pi_+ \circ \tilde{\mu}$. On peut trouver, grâce au lemme 4.11, deux suites x_n, y_n dans $\widetilde{M}_r$ telles que

$$\tilde{\mu}_+(x_n) = \tilde{\mu}_+(y_n) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad .$$

Soit K' le revêtement de K qui agit effectivement sur $\widetilde{M}$. Le premier cas permet de trouver des éléments τ_n de K' tels que

$$y_n = \tau_n x_n .$$

Le groupe K' est la composante connexe du groupe des difféomorphismes τ de $\widetilde{M}$ tels qu'il existe k dans K vérifiant $p \circ \tau = k \circ p$. Il agit donc proprement sur $\widetilde{M}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer la suite τ_n convergente vers un élément τ_∞ de K' . On a alors

$$y = \tau_\infty x .$$

C'est ce que l'on voulait.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Evident.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Comme x est régulier, la feuille F_x est lisse au voisinage de x . Par hypothèse, on a l'inclusion

$$T_x(F_x) = T_x(\widetilde{K}x)^\omega \subset T_x(\widetilde{K}x) .$$

Ce qui prouve que l'orbite $\widetilde{K}x$ est coïsothrope. $\square$

Corollaire 5.7 *Soient K un groupe compact connexe, (M, ω) une K -variété symplectique connexe. On suppose que l'action est coïsothrope et que le moment $\tilde{\mu}$ est propre modulo Γ .*

Alors, pour tout x dans $\widetilde{M}$, on a

$$\tilde{\mu}^{-1}(\tilde{\mu}(x)) \subset \widetilde{K}x .$$

Démonstration La propriété modulo Γ de $\tilde{\mu}$ assure que les fibres du moment sont connexes sur un ouvert dense (lemme 4.10). On conclut alors comme dans la démonstration de la proposition 5.6. $\square$

Remarque Lorsque l'action sur K est hamiltonienne, notre hypothèse est équivalente à "le moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ est propre". La conclusion exprime alors que $\mu^{-1}(K\mu(x)) = Kx$, pour tout x dans M .

Corollaire 5.8 (Fibres du moment) *Soient T un tore et (M, ω) une T -variété symplectique connexe. On suppose que l'action est coïsothrope et que le moment $\tilde{\mu}$ est propre modulo Γ . On note $\tilde{L}$ le noyau dans $\tilde{T}$ du cocycle C de cette action et $\tilde{\mu}_L : \widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{l}^*$ le moment de l'action de $\tilde{L}$ sur $\widetilde{M}$. Alors*

- a) les fibres de $\tilde{\mu}$ sont des $\tilde{L}$ -orbites,*
- b) les fibres de $\tilde{\mu}_L$ sont des $\tilde{T}$ -orbites.*

Démonstration Cela résulte du lemme 2.13 et de la proposition 5.6.

a) En effet, pour tout x dans $\widetilde{M}$, on a $\tilde{L} = \{t \in \tilde{T} / \tilde{\mu}(tx) = \tilde{\mu}(x)\}$.

b) Pour tout x dans $\widetilde{M}$, on a

$$\tilde{\mu}(\tilde{T}x) = \tilde{\mu}(x) + \text{Im}(C) = \tilde{\mu}(x) + \mathfrak{l}^\perp ,$$

donc

$$\tilde{\mu}_L^{-1}(\tilde{\mu}_L(x)) = \tilde{\mu}^{-1}(\tilde{\mu}(x) + \mathfrak{l}^\perp) = \tilde{\mu}^{-1}(\tilde{\mu}(\tilde{T}x)) = \tilde{T}x$$

$\square$

5.3 Actions coïsotropes et modèle local

Lemme 5.9 (Modèle local pour une action coïsothrope) *Soient T un tore, (M, ω) une T -variété symplectique connexe, x un point de M , $H = T_x$ son groupe d'isotropie, $N = Tx$ et W le H -module symplectique $W := T_x N^\omega / (T_x N^\omega \cap T_x N)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *L'action de T sur M est coïsothrope.*
- (ii) *L'action de H sur W est coïsothrope.*

Remarque Ce lemme n'est plus valable si on remplace T par un groupe de Lie compact K non commutatif. Cependant, lorsque l'action est hamiltonienne, on peut munir le modèle local $X = X(N, \sigma, W)$ d'une structure de variété algébrique complexe et étendre l'action de K sur X en une action algébrique du groupe complexifié $K_{\mathbb{C}}$. L'action de K sur M est alors coïsothrope si et seulement si la $K_{\mathbb{C}}$ -variété X est sphérique (voir [4] et [22]).

Par exemple, si $K = \mathrm{SU}(2)$, $H = \{e\}$ et $W = 0$, l'action de K sur $M := T^*K$ n'est pas coïsothrope alors que l'action de H sur W l'est.

Démonstration du lemme On peut supposer que M est la variété symplectique $X = X(N, \sigma, W)$ des propositions 1.9 et 2.17 dont on reprend les notations et que x est l'image dans X du point $\tilde{x} = [e, 0, 0]$ du revêtement universel $\tilde{X}$. On note $y = [k, \nu, w]$ et $y' = [k', \nu', w']$ deux points de $\tilde{X}$. On a l'égalité $\tilde{\mu}(y) = \tilde{\mu}(\tilde{x}) + C_k + \nu + \mu_W(w)$. On a donc l'équivalence

$$\tilde{\mu}(y) = \tilde{\mu}(y') \iff (C_k = C_{k'} \text{ , } \nu = \nu' \text{ et } \mu_W(w) = \mu_W(w')) \text{ .}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si w et w' sont sur la même feuille de μ_W , alors $[e, 0, w]$ et $[e, 0, w']$ sont sur la même feuille de $\tilde{\mu}$. Ils sont donc dans la même $\tilde{T}$ -orbite. Par suite w et w' sont dans la même H -orbite.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si y et y' sont sur la même feuille de $\tilde{\mu}$, alors $C_k = C_{k'}$, $\nu = \nu'$ et w, w' sont sur la même feuille de μ_W . On en déduit que w et w' sont dans la même H -orbite puis que y et y' sont dans la même $\tilde{T}$ -orbite. $\square$

Corollaire 5.10 (L'algèbre d'isotropie pour une action coïsothrope) *Soient T un tore, (M, ω) une T -variété symplectique connexe, $\mathfrak{t}_h := \{\xi \in \mathfrak{t} \mid i_{X_\xi} \omega \text{ est exacte}\}$, x un point de $\tilde{M}$, et $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_x := \{\xi \in \mathfrak{t} \mid X_\xi(x) = 0\}$ son algèbre de Lie d'isotropie. On suppose M compacte et l'action coïsothrope.*

Alors, on a l'inclusion $\mathfrak{t}_x \subset \mathfrak{t}_h$, avec égalité si et seulement si $\tilde{\mu}(x) + \mathfrak{t}_h^\perp$ est extrémal dans $\tilde{\mu}(\tilde{M})$.

Démonstration On garde les notations précédentes.

Au voisinage de $\tilde{\mu}(x)$, le convexe $\tilde{\mu}(\tilde{M})$ coïncide avec $\mathfrak{t}_x^\perp + \mu_W(W)$. Comme l'action de H sur W est coïsothrope, le cône $\mu_W(W)$ est simplicial et saillant.

D'autre part, le corollaire 3.2 affirme que $\tilde{\mu}(\tilde{M}) + \mathfrak{t}_h^\perp = \tilde{\mu}(\tilde{M})$.

On en déduit l'inclusion $\mathfrak{t}_h^\perp \subset \mathfrak{t}_x^\perp$, avec égalité si et seulement si $\tilde{\mu}(x) + \mathfrak{t}_h^\perp$ est un sous-espace affine extrémal du convexe $\tilde{\mu}(\tilde{M})$. C'est ce que l'on voulait. $\square$

6 Actions coïsotropes d'un tore

Le but de cette partie est de décrire les actions coïsootropes d'un tore T sur une variété symplectique compacte (M, ω) . Nous montrerons les trois assertions suivantes :

- Ces actions sont le produit d'une action hamiltonienne coïso trope et d'une action anhamiltonienne coïso trope (théorème 6.6.A).
- Les actions anhamiltoniennes coïso tropes sont des actions d'un tore central sur une nilvariété symplectique (théorème 6.6.B).
- Quant aux actions hamiltoniennes coïso tropes, elles sont entièrement déterminées par le polyèdre convexe compact image de l'application moment et on peut décrire les polyèdres que l'on obtient ainsi (théorème 6.5 dû à Delzant).

On démontrera presque simultanément ces trois assertions.

On commencera par déterminer le revêtement $\tilde{T}$ de T qui agit effectivement sur le revêtement universel $\tilde{M}$ de M (lemme 6.7).

On introduira alors une classe d'actions symplectiques coïso tropes dites adaptées qui contient l'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ et on montrera qu'une action symplectique coïso trope adaptée est entièrement déterminée par le convexe image de l'application moment (proposition 6.13) Le point clef est, comme dans [7] et [19], une interprétation faisceautique du groupe des automorphismes de $\tilde{M}$ (lemme 6.14).

On en déduira que l'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ est un produit d'une action hamiltonienne coïso trope d'un tore T_h sur une variété symplectique compacte M_h par une action coïso trope d'un groupe de Lie commutatif simplement connexe $\tilde{T}_a$ sur une variété symplectique $\tilde{M}_a$ difféomorphe à un espace vectoriel (corollaire 6.16).

On montrera alors que le choix de cette décomposition peut être fait de sorte que le groupe fondamental Γ de $\tilde{M}$ n'agisse que sur le facteur $\tilde{M}_a$ et est inclus dans un sous-groupe de Lie nilpotent N du groupe des automorphismes de $\tilde{M}_a$, sous-groupe qui agit simplement transitivement sur $\tilde{M}_a$ (proposition 6.17).

6.1 Nilvariétés symplectiques

Dans cette section, nous construisons des actions anhamiltoniennes qui généralisent l'exemple 2.4.a.

Définition 6.1 *Nous appellerons nilvariété symplectique, une variété symplectique telle que*

- M est une nilvariété compacte, c'est à dire le quotient $M = \Gamma \backslash N$ d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N par un sous-groupe Γ discret et cocompact de N . On note $p : N \rightarrow M$ la projection canonique.
- ω est une forme symplectique dont la relevée $p^*\omega$ est une 2-forme invariante par translation à gauche sur N .

Un tore central de M est une sous-variété compacte T de M image d'un sous-groupe connexe du centre Z de N .

Un tore central est donc un groupe commutatif compact connexe qui agit sur M par translation en préservant ω . Son algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ est incluse dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N .

L'action de T sur M est anhamiltonienne. En effet, l'action de T sur M est libre alors que le gradient symplectique de toute fonction sur une variété compacte s'annule.

Lorsque T est une sous-variété coïsotrope de M , l'action de T sur M est coïsotrope.

Voici deux exercices. Le premier attire l'attention du lecteur sur la différence entre droite et gauche. Le deuxième affirme que nos exemples seront toujours commutatifs ou nilpotents à deux crans.

Exercice 6.2 *Soit $M = \Gamma \backslash N$ une nilvariété compacte munie d'une forme symplectique ω invariante par translation à droite par N . Alors M est un tore.*

Solution La forme bilinéaire antisymétrique ω_e sur $\mathfrak{n}$ est invariante sous l'action adjointe de Γ et donc aussi sous l'action adjointe de N . On en déduit que $\omega_e([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}) = 0$. Comme ω_e est non dégénérée, on a $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = 0$. $\square$

Exercice 6.3 *Soit $(M = \Gamma \backslash N, \omega)$ une nilvariété symplectique contenant un tore central coïsotrope T . Alors le groupe dérivé $[N, N]$ est inclus dans le centre Z de N .*

Solution Comme ω est fermée, la forme bilinéaire antisymétrique ω_e vérifie, pour tous ξ, η, ζ dans $\mathfrak{n}$, $\omega_e([\xi, \eta], \zeta) + \omega_e([\eta, \zeta], \xi) + \omega_e([\zeta, \xi], \eta) = 0$. On en déduit que $\omega_e([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{z}) = 0$. Donc $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}^\omega \subset \mathfrak{t}^\omega \subset \mathfrak{t} \subset \mathfrak{z}$. $\square$

Voici quelques exemples de triplets $(\mathfrak{n}, \omega_e, \mathfrak{t})$ associés à des tores centraux coïsotropes de nilvariétés symplectiques (on ne donne que les crochets non nuls).

a) $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^{2n}$ est commutative, ω_e est une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{t}$ est un sous-espace vectoriel coïsotrope de $\mathfrak{n}$.

b) $\mathfrak{n} \simeq \mathbb{R}^4$ a pour base (X, Y, Z, T) avec $[X, Y] = Z$, ω_e est égale à $X^* \wedge Z^* + Y^* \wedge T^*$ et $\mathfrak{t}$ a pour base (Z, T) .

c) $\mathfrak{n} \simeq \mathbb{R}^6$ a pour base $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ avec $[X_1, X_2] = Y_1$, $[X_2, X_3] = Y_2$, $[X_3, X_1] = Y_3$, ω_e est égale à $X_1^* \wedge Y_1^* + X_2^* \wedge Y_2^* + X_3^* \wedge Y_3^*$ et $\mathfrak{t}$ a pour base (Y_1, Y_2, Y_3) .

6.2 Description des actions coïsotropes d'un tore

Les actions coïsotropes d'un tore sur une variété symplectique compacte sont entièrement décrites par les deux théorèmes ci-dessous.

Pour tout tore $T = \mathbb{T}^d$, on note $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ le réseau de $\mathfrak{t}$ noyau de l'application exponentielle et $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^* := \{\lambda \in \mathfrak{t}^* / \lambda(\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{Z}\}$ le réseau dual.

Définition 6.4 *On dira qu'un convexe C de $\mathfrak{t}^*$ est à directions entières si, au voisinage de chacun de ses points, C coïncide avec le translaté d'un cône convexe engendré par une base B de $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ et une partie de la base opposée $-B$.*

Soit (M, ω) une T -variété symplectique. Rappelons que, si l'action est hamiltonienne et effective, les orbites sont isotropes et on a l'inégalité $\dim M \geq 2d$ avec égalité si et seulement si l'action est coïsothrope.

Le théorème suivant décrit les actions hamiltoniennes coïsootropes de T sur une variété symplectique compacte.

Théorème 6.5 (Delzant) *Soit $T = \mathbb{T}^d$ un tore. L'application $M \rightarrow \mu(M)$ est une bijection entre*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{actions hamiltoniennes effectives de } T \\ \text{sur une variété symplectique } M \\ \text{compacte connexe de dimension } 2d \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{polyèdres convexes} \\ \text{compacts de } \mathfrak{t}^* \\ \text{à directions entières} \end{array} \right\}.$$

Dans cet énoncé, on identifie bien sûr deux actions symplectiques de T sur M et M' si il existe un symplectomorphisme T -équivariant φ de M sur M' i.e. un difféomorphisme T -équivariant qui échange les formes symplectiques. De même, on identifie deux polyèdres convexes de $\mathfrak{t}^*$ qui se déduisent l'un de l'autre par translation.

Soient T_0, T_1 deux tores qui agissent respectivement sur une variété symplectique (M_0, ω_0) et (M_1, ω_1) . L'action de $T_0 \times T_1$ sur la variété symplectique $(M_0 \times M_1, \omega_0 \times \omega_1)$ est appelée action produit.

Le produit de deux actions symplectiques est coïsothrope si et seulement si chacune des deux actions est coïsothrope.

Théorème 6.6 (Actions coïsootropes d'un tore)

A) Toute action coïsothrope d'un tore T sur une variété symplectique compacte connexe (M, ω) est isomorphe à un produit d'une action coïsothrope hamiltonienne et d'une action coïsothrope anhamiltonienne.

B) Toute action coïsothrope anhamiltonienne d'un tore T sur une variété compacte connexe (M, ω) est isomorphe à l'action d'un tore central coïsothrope sur une nilvariété symplectique (ces actions sont décrites en 6.1).

Cette partie est entièrement consacrée à la démonstration des théorèmes 6.5 et 6.6.

6.3 Connexité des groupes d'isotropie

Déterminons tout d'abord le revêtement $\tilde{T}$ de T qui agit effectivement sur $\widetilde{M}$.

Lemme 6.7 (Revêtement du tore) Soient T un tore et (M, ω) une T -variété symplectique connexe. On suppose que l'action est effective et coïsothrope. On note $\tilde{T}$ le revêtement de T qui agit effectivement sur $\tilde{M}$. Alors,

- 1) a) pour tout point y de M , le stabilisateur T_y de y dans T est connexe et
b) pour tout point x de $\tilde{M}$, le stabilisateur $\tilde{T}_x$ de x dans $\tilde{T}$ est connexe.
- 2) On suppose M compact. On note T_h le plus grand sous-tore de T dont l'action sur M est hamiltonienne (voir corollaire 3.2.c) et on choisit un sous-tore T_a de T tel que $T = T_h \times T_a$. Alors,
a) on a l'égalité $\tilde{T} = T_h \times \tilde{T}_a$ et
b) l'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ est propre.

Démonstration 1) a) Notons $H = T_y$. Au voisinage de l'orbite $N = T.y$, (M, ω) s'identifie à un modèle local $X(N, \sigma, W) = T \times_H ((\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times W)$. On note $\rho : H \rightarrow \mathrm{Sp}(W)$ l'action de H sur W . Comme cette action est coïsothrope (lemme 5.9), on a $\dim W = 2 \dim \rho(H)$. Donc la composante connexe de $\rho(H)$ est un tore compact maximal de $\mathrm{Sp}(W)$. Comme ces tores sont égaux à leur propre centralisateur, le groupe commutatif $\rho(H)$ est connexe.

Comme T est commutatif, l'action de H sur $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$ est triviale. Donc, comme l'action de T est localement effective, ρ est injectif et H est connexe.

b) Notons $\pi : \tilde{T} \rightarrow T$ la projection naturelle. Un élément non trivial du noyau $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$ de π n'a pas de points fixes dans $\tilde{M}$. Donc la restriction de π à $\tilde{T}_x$ est injective. En outre, comme $T_{p(x)}$ est connexe, on a $\pi(\tilde{T}_x) = T_{p(x)}$. En conclusion, la projection π induit un isomorphisme entre $\tilde{T}_x$ et $T_{p(x)}$. Donc le groupe $\tilde{T}_x$ est connexe.

2)a) Soit γ un élément du revêtement universel de T_h dont l'image dans T_h est triviale. L'action de γ sur $\tilde{M}$ est un élément du groupe fondamental de M . Or, comme M est compact, $\tilde{T}_h$ a des points fixes dans $\tilde{M}$ (théorème 3.16) et γ aussi. Donc γ agit trivialement sur $\tilde{M}$. Ceci prouve que l'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ se factorise en une action de $T_h \times \tilde{T}_a$. On peut donc écrire $\tilde{T} = T_h \times \tilde{T}_a$ où $\tilde{T}_a$ est le revêtement de T_a qui agit effectivement sur $\tilde{M}$. On veut montrer l'égalité $\tilde{T}_a = \tilde{T}_a$.

Il résulte du corollaire 5.10 et du point 1.b) que tous les stabilisateurs $\tilde{T}_x$ des points x de $\tilde{M}$ sont inclus dans T_h . Soient $\mathfrak{l}$ le noyau dans $\mathfrak{t}$ du cocycle infinitésimal, $\tilde{L}$ le sous-groupe de Lie connexe de $\tilde{T}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ et $\tilde{\mu}_L : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{l}^*$ le moment de l'action de $\tilde{L}$ sur $\tilde{M}$. Comme M est compact, les fibres de $\tilde{\mu}_L$ sont les orbites de $\tilde{T}$ (corollaire 5.8) et l'image $C_L := \tilde{\mu}_L(\tilde{M})$ est un polyèdre convexe. On note N l'espace quotient $N := T_h \backslash \tilde{M}$ et $\nu : N \rightarrow C_L$ l'application définie par l'égalité $\nu(T_h.x) = \tilde{\mu}_L(x)$, pour tout x dans $\tilde{M}$. L'action naturelle de $\tilde{T}_a$ sur N est simplement transitive sur les fibres de ν . Il résulte alors du modèle local donné ci-dessus que $\nu : N \rightarrow C_L$ est un $\tilde{T}_a$ -fibré principal. Comme la base C_L est contractile, ce fibré est trivial et N est homéomorphe à $\tilde{T}_a \times C_L$. Or, comme T_h est connexe, N est simplement connexe et $\tilde{T}_a$ aussi. C'est ce que l'on voulait.

b) Cet argument prouve aussi que l'action de $\tilde{T}_a$ sur N est propre. L'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ aussi. $\square$

Remarque Le fait que l'action de T_h sur M se relève en une action de T_h sur $\tilde{M}$ est une conséquence de la compacité de M et n'utilise pas le fait que l'action est coïsothrope.

Corollaire 6.8 (Noyau de l'holonomie) *Soient T un tore et (M, ω) une T -variété symplectique compacte connexe. On suppose que l'action est effective et coïsothrope. On note $\mathfrak{l}$ le noyau dans $\mathfrak{t}$ du cocycle infinitésimal, $\tilde{L}$ le sous-groupe de Lie connexe de $\tilde{T}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$, $\tilde{\mu}_L : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{l}^*$ le moment de l'action de $\tilde{L}$ sur $\tilde{M}$, $h_L : \Gamma \rightarrow \mathfrak{l}^*$ le morphisme d'holonomie et $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$ le noyau de la projection naturelle $\pi : \tilde{T} \rightarrow T$.*

Alors $\text{Ker}(h_L) = \tilde{T}_{\mathbb{Z}}$.

Démonstration Il est clair que $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$ est inclus dans Γ . Donc $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$ est inclus dans $\text{Ker}(h_L)$.

Réciproquement, soit γ un élément de Γ tel que $h_L(\gamma) = 0$. Vérifions que γ est dans $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$. Pour cela, choisissons un élément régulier x de $\tilde{M}$. Comme $\tilde{\mu}_L(\gamma.x) = \tilde{\mu}_L(x)$, il existe un élément t de $\tilde{T}$ tel que $\gamma.x = t.x$ (corollaire 5.8.b). L'image $\pi(t)$ de t dans T fixe le point $p(x)$. Comme ce point est régulier, son stabilisateur est trivial (lemme 6.7.1.a). Donc t est dans $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$. La connexité de $\tilde{M}_r$ prouve que cet élément t ne dépend pas du choix de x . Donc $\gamma = t$ et γ est dans $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$. $\square$

Remarque On notera L l'image de $\tilde{L}$ dans $\tilde{T}$. C'est un sous-groupe fermé de $\tilde{T}$. En effet, il contient T_h .

Corollaire 6.9 (Actions coïsootropes hamiltoniennes) *Soient T un tore et (M, ω) une T -variété symplectique compacte connexe. On suppose que l'action est effective et coïsothrope. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *L'action est hamiltonienne.*
- (ii) *M est simplement connexe.*
- (iii) *$\tilde{M}$ est compact.*
- (iv) *L'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ se factorise en une action de T .*

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii) Si l'action est hamiltonienne, l'image $\tilde{\mu}(M)$ est compacte. Elle admet donc un point extrémal λ . La fibre $\tilde{\mu}^{-1}(\lambda)$ est formée de points fixes sous $\tilde{T}$ et est aussi incluse dans une seule $\tilde{T}$ -orbite (corollaire 5.7). Donc cette fibre est un singleton $\{x_0\}$. Comme cette fibre est invariante sous l'action du groupe fondamental Γ et que les éléments de Γ n'ont pas de points fixes, on en déduit que $\Gamma = \{e\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Clair.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si $\tilde{M}$ est compact, $\tilde{\mu}(\tilde{M})$ aussi et donc $\mathfrak{t}_h^\perp = 0$ (corollaire 3.2). Le lemme 2.11 prouve alors que l'action est hamiltonienne.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) Cela résulte du lemme 6.7. $\square$

Corollaire 6.10 (Actions coïsootropes anhamiltoniennes) *Soient $T = \mathbb{T}^d$ un tore et (M, ω) une T -variété symplectique compacte connexe. On suppose que l'action est effective et coïsothrope. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *L'action est anhamiltonienne.*
- (ii) *Toutes les orbites de T dans M sont de dimension d .*
- (iii) *Le moment $\tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ est une submersion.*
- (iv) *L'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ est libre.*

Démonstration (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Cela résulte du corollaire 5.10.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) En effet, pour tout x dans $\widetilde{M}$, on a

$$\dim T.x = \text{codim}(\text{Ker} d\tilde{\mu}(x)) = \dim(\text{Im} d\tilde{\mu}(x)) .$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) Cela résulte du lemme 6.7. □

6.4 Actions coïsootropes adaptées

Nous allons définir une classe ad hoc d'actions coïsootropes qui contient l'action de $\tilde{T}$ décrite dans la section précédente.

Soient K un groupe de Lie commutatif connexe et c une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{k}$. Une action symplectique de K sur une variété symplectique (M, ω) est dite c -symplectique si c est le cocycle infinitésimal de cette action. Par exemple, une action 0-symplectique n'est rien d'autre qu'une action localement hamiltonienne.

On note $\mathfrak{l}$ le noyau de c , L le sous-groupe de Lie connexe de K d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ et K_0 le sous-tore maximal de K . On suppose que K_0 est inclus dans L .

Explicitons la description des “modèles locaux” des actions c -symplectiques et coïsootropes de K . On se donne un espace homogène $N = K/H$ où H est un sous-tore de K et W un H -module symplectique tel que le morphisme $\rho : H \rightarrow \text{Sp}(W)$ est un isomorphisme de H sur un tore maximal de $\text{Sp}(W)$. On note $X = X(N, c, W)$ pour le modèle local $X(N, \sigma, W)$ de 1.4 où σ est la 2-forme K -invariante sur N donnée par c .

Comme K est commutatif, on peut décrire explicitement X . Choisissons un sous-groupe R de L supplémentaire à H et un sous-groupe S de K supplémentaire à L . On a donc $K = H \times R \times S$. On dispose d'une action symplectique coïsothrope pour chacun de ces trois groupes :

- l'action de H sur l'espace vectoriel W ,
 - l'action de R sur l'espace cotangent T^*R et
 - l'action par translation de S sur lui même muni de la forme symplectique donnée par c .
- L'action de K sur X n'est autre que l'action produit de $K = H \times R \times S$ sur $X = W \times T^*R \times S$.

En coordonnées, on a des entiers $p, q' \leq q$ et r tels que

$$\begin{aligned} K &= \{t = (\theta, a_0, b_0) \in \mathbb{R}^p / \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q / \mathbb{Z}^{q'} \times \mathbb{R}^{2r} \} \\ X &= \{x = (\xi, a, \alpha, b) \in \mathbb{C}^p \times (\mathbb{R}^q / \mathbb{Z}^{q'} \times \mathbb{R}^q) \times \mathbb{R}^{2r} \} \end{aligned}$$

L'action, la forme symplectique et les moments de K et L sur X sont donnés par :

$$\begin{aligned} t.x &= ((e^{2i\pi\theta_1}\xi_1, \dots, e^{2i\pi\theta_p}\xi_p), a + a_0, \alpha, b + b_0) \\ \omega &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d\xi_i \wedge d\bar{\xi}_i + \sum_{j=1}^q da_j \wedge d\alpha_j + \sum_{k=1}^r db_k \wedge db_{r+k} \\ \mu(x) &= ((|\xi_1|^2, \dots, |\xi_p|^2), \alpha, (b_{r+1}, \dots, b_{2r}, -b_1, \dots, -b_r)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{2r} \simeq \mathfrak{k}^* \\ \mu_L(x) &= ((|\xi_1|^2, \dots, |\xi_p|^2), \alpha) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \simeq \mathfrak{l}^* . \end{aligned}$$

Remarque Le système de coordonnées sur K dépend du modèle local.

Définition 6.11 Soient K un groupe de Lie commutatif connexe et c une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{k}$. Une action c -symplectique coïsothrope de K sur une variété symplectique (M, ω) est dite adaptée si elle est effective et si les deux propriétés suivantes sont satisfaites.

a) Pour toute orbite $N = K.x \simeq K/H$ dans M , le groupe d'isotropie H est compact, il existe un voisinage K -invariant U de N dans M , un voisinage K -invariant U' de N dans le modèle local $X(N, c, W)$ où W est le H -module symplectique $W = T_x N^\omega / (T_x N \cap T_x N^\omega)$, et il existe un difféomorphisme symplectique K -équivariant de U sur U' égal à l'identité sur N .

b) L'action de K sur M admet un moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$, l'image $\mu(M)$ est convexe et l'application $\mu : M \rightarrow \mu(M)$ est ouverte et à fibres connexes.

Remarque Par définition, pour une action symplectique coïsothrope adaptée,

- on a l'égalité $\mu(M) + \mathfrak{l}^\perp = \mu(M)$,
- les fibres de l'application moment $\mu_L : M \rightarrow \mathfrak{l}^*$ de l'action de L sont des K -orbites et
- les fibres de l'application moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ de l'action de K sont des L -orbites.

Exemples a) L'action de K sur le modèle local $X(K/H, c, W)$ décrit ci-dessus est une action c -symplectique coïsothrope adaptée.

b) Considérons une action c -symplectique coïsothrope adaptée de K sur une variété symplectique M et Ω un ouvert convexe de l'image $\mu_L(M)$. Alors, l'action de K sur l'ouvert $\mu_L^{-1}(\Omega)$ est encore c -symplectique coïsothrope et adaptée.

c) Soient T un tore, M une T -variété symplectique compacte connexe et $K = \check{T}$. On suppose l'action coïsothrope et on note c le cocycle infinitésimal. Alors, l'action de K sur $\widetilde{M}$ est c -symplectique, coïsothrope et adaptée (proposition 1.9 et 3.1) et on a $K_0 = T_h$.

Lorsque K est compact, on a $c = 0$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{l} = \mathfrak{k}_0$. La définition suivante est donc une généralisation de la définition 6.4. On note $\text{Res} : \mathfrak{l}^* \rightarrow \mathfrak{k}_0^*$ l'application de restriction.

Définition 6.12 Un convexe C de $\mathfrak{l}^*$ est dit à directions K_0 -entières si, au voisinage de chacun de ses points, C coïncide avec le translaté d'un cône convexe de la forme $\text{Res}^{-1}(C_0)$ où C_0 est un cône convexe de $\mathfrak{k}_0^*$ engendré par une base B de $\mathfrak{k}_{0,\mathbb{Z}}^*$ et une partie de la base opposée $-B$.

Remarque Par construction, pour toute action coïsothrope adaptée de K , l'image $\mu_L(M)$ est à directions K_0 -entières.

La proposition suivante est une généralisation du théorème 6.5 qui nous sera aussi utile pour démontrer le théorème 6.6

Proposition 6.13 (Actions coïsootropes adaptées) *Soit K un groupe de Lie commutatif connexe, K_0 son sous-tore maximal, c une forme bilinéaire sur $\mathfrak{k}$ dont le noyau $\mathfrak{l}$ contient $\mathfrak{k}_0$. Alors l'application $M \rightarrow \mu_L(M)$ est une bijection entre*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{actions } c\text{-symplectiques} \\ \text{coïsootropes adaptées de } K \text{ sur} \\ \text{une variété symplectique } M \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{convexes de } \mathfrak{l}^* \\ \text{à directions } K_0\text{-entières} \end{array} \right\} .$$

Dans cet énoncé, on fait bien sur les mêmes identifications que dans le théorème 6.5.

Les deux sections suivantes sont consacrées à la démonstration de cette proposition.

Démonstration du théorème 6.5 Si $K = T$ est un tore, on a $c = 0$ et $K_0 = K$. Donc, une action coïso trope de K est adaptée si et seulement si elle est hamiltonienne.

Comme les fibres du moment μ sont des T -orbites, la variété M est compacte si et seulement si l'image $\mu(M)$ est compacte. Le théorème 6.5 est donc un cas particulier de la proposition 6.13. $\square$

6.5 Le faisceau des automorphismes

Dans cette section, nous montrerons que les automorphismes des actions coïso tropes adaptées forment un faisceau de groupes abéliens et que la cohomologie de ce faisceau est nulle.

Reprenons les notations K, c, L, K_0 de la section précédente.

Pour tout convexe C localement fermé et d'intérieur non vide de $\mathfrak{l}^*$, on note $\mathcal{C}^\infty$ le faisceau sur C des fonctions de classe C^∞ à valeur réelles, $\mathcal{K}$ le sous-faisceau des fonctions dont la différentielle prend ses valeurs dans $\mathfrak{k}_{0,\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{A}$ le faisceau quotient $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty / \mathcal{K}$.

Donnons nous une action c -symplectique coïso trope adaptée de K sur une variété symplectique (M, ω) . On note $\mathcal{A}_M$ le faisceau de groupes sur le convexe $\mu_L(M)$ défini par, pour tout ouvert Ω de $\mu_L(M)$,

$$\mathcal{A}_M(\Omega) = \{ \varphi \in \text{Diffeo}(\mu_L^{-1}(\Omega)) / \varphi \text{ est } K\text{-équivariant, } \mu \circ \varphi = \mu \text{ et } \varphi^* \omega = \omega \}$$

Lemme 6.14 *Soit K un groupe de Lie commutatif connexe, K_0 son sous-tore maximal, c une forme bilinéaire sur $\mathfrak{k}$ dont le noyau $\mathfrak{l}$ contient $\mathfrak{k}_0$ et (M, ω) une variété symplectique munie d'une action c -symplectique coïso trope adaptée de K . Alors*

- a) *Le faisceau $\mathcal{A}_M$ est un faisceau de groupes abéliens.*
- b) *Pour tout ouvert Ω de $\mu_L(M)$ et toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, la formule*

$$\varphi^f(x) = \exp(df(\mu_L(x))).x$$

définit un élément φ^f aussi noté φ_M^f de $\mathcal{A}_M(\Omega)$.

c) L'application $f \rightarrow \varphi^f$ induit un morphisme de faisceaux surjectif de $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathcal{A}_M$ dont le noyau est $\mathcal{K}$. Autrement dit, elle induit un isomorphisme de faisceaux sur $\mu_L(M)$

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_M .$$

d) Soit C un convexe localement fermé et d'intérieur non vide de $\mathfrak{l}^*$. Alors, on a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(C) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(C) \longrightarrow \mathcal{A}(C) \longrightarrow 0$$

et, pour tout $i \geq 1$, on a

$$H^i(C, \mathcal{A}) = 0 .$$

Nous aurons besoin du résultat de calculs suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

Exercice 6.15 a) Soit $h : (\lambda, x) \rightarrow h_\lambda(x)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ telle que $h_\lambda(0) \equiv 0$. Alors il existe une fonction g C^∞ sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ telle que $h_\lambda(x) \equiv xg_\lambda(x)$.

b) Soit $g : (\lambda, x) \rightarrow g_\lambda(x)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ telle que $g_\lambda(x) \equiv g_\lambda(-x)$. Alors il existe une fonction f C^∞ sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ telle que $g_\lambda(x) \equiv f_\lambda(x^2)$.

Démonstration du lemme 6.14 a) Le groupe $\mathcal{A}_M(\Omega)$ est commutatif car ses éléments commutent à L et préservent les L -orbites.

b) Comme l'image $\varphi^f(x)$ s'obtient en faisant agir sur x un élément l de L , on a $\mu \circ \varphi = \mu$. Comme cet élément $l = \exp(\psi(\mu_L(x)))$ ne dépend que de $\mu_L(x)$, il est constant sur les K -orbites et l'application φ^f est K -équivariante. Comme la 1-forme $\psi = df \in C^\infty(\Omega, \mathfrak{l})$ est fermée, on a $\varphi^{f*}(\omega) = \omega$.

c) Il est clair que le noyau de ce morphisme est $\mathcal{K}$. Le point délicat est la surjectivité. Notons C_L le convexe $\mu_L(M)$ et λ_0 un point de C_L . Comme l'action de K sur M est adaptée, on peut choisir un système de coordonnées (θ, a_0, b_0) qui identifie K à

$$K \simeq \mathbb{R}^p / \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q / \mathbb{Z}^{q'} \times \mathbb{R}^{2r}$$

et on peut choisir $\varepsilon > 0$, un voisinage ouvert convexe Ω de λ_0 dans C_L et un système de coordonnées (ξ, a, α, b) qui identifie l'ouvert $U := \mu_L^{-1}(\Omega)$ à

$$U \simeq \{x = (\xi, a, \alpha, b) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q / \mathbb{Z}^{q'} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{2r} \mid \forall i \quad |\xi_i| < \varepsilon \text{ et } \forall j \quad |\alpha_j| < \varepsilon\}$$

et pour lesquels l'action de K , la forme symplectique et les moments μ et μ_L sont donnés par les formules explicites de 6.4. En particulier, on a

$$\mu_L(x) = ((|\xi_1|^2, \dots, |\xi_p|^2), \alpha) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \simeq \mathfrak{l}^* .$$

Il suffit de montrer que tout automorphisme φ dans $\mathcal{A}_M(\Omega)$ est l'image φ^f d'une fonction f dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Notons C_L° l'intérieur de C_L et $\Omega^\circ = \Omega \cap C_L^\circ$. Le groupe L agit librement

sur l'ouvert $\mu_L^{-1}(\Omega^\circ)$. Comme l'application φ est K -équivariante et qu'elle préserve chaque fibre de μ qui est une L -orbite, il existe une fonction t dans $C^\infty(\Omega^\circ, L)$ telle que

$$\varphi(x) = t(\mu_L(x)).x ,$$

pour tout x dans $\mu_L^{-1}(\Omega^\circ)$. Comme Ω° est convexe, on peut trouver une fonction ψ dans $C^\infty(\Omega^\circ, \mathfrak{l})$ telle que

$$t(p) = \exp(\psi(p)) ,$$

pour tout p dans Ω° . Comme Ω° est un ouvert de $\mathfrak{l}^*$, cette fonction est une 1-forme sur Ω° . La condition $\varphi^*\omega = \omega$ s'écrit alors $d\psi = 0$. Autrement dit la 1-forme ψ est fermée. Comme Ω° est convexe, on peut trouver une fonction f dans $C^\infty(\Omega^\circ, \mathbb{R})$ telle que

$$\psi = df .$$

On veut montrer que f se prolonge en une fonction C^∞ sur Ω . Pour cela, on remarque que $\mathfrak{l}$ est identifié à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, on note $(\psi_1, \dots, \psi_{p+q})$ les composantes de ψ et on calcule l'automorphisme φ dans notre système de coordonnées :

$$\varphi(x) = (e^{2i\pi\psi_1(\mu_L(x))}\xi_1, \dots, e^{2i\pi\psi_p(\mu_L(x))}\xi_p, a_1 + \psi_{p+1}(\mu_L(x)), \dots, a_q + \psi_{p+q}(\mu_L(x)), \alpha, b) .$$

On sait que φ est de classe C^∞ . L'exercice 6.15.a prouve que les fonctions $\psi_i \circ \mu_L$ se prolongent de façon C^∞ à l'ouvert U . L'exercice 6.15.b prouve alors que les fonctions ψ_i se prolongent de façon C^∞ à Ω . La primitive f de ψ aussi. On note encore f le prolongement de f à Ω , on a bien $\varphi = \varphi^f$.

d) Le faisceau $\mathcal{C}^\infty$ est mou et le faisceau $\mathcal{K}$ est constant (voir [12]). Donc, pour tout $i \geq 1$, on a

$$H^i(C, \mathcal{K}) = H^i(C, \mathcal{C}^\infty) = 0 .$$

Nos assertions résultent alors de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0 . \quad \square$$

6.6 Existence et unicité des actions coïsootropes adaptées

Nous pouvons terminer la

Démonstration de la proposition 6.13

L'existence et l'unicité sont des conséquences de l'annulation des deux premiers groupes de cohomologie du faisceau $\mathcal{A}$. Cela résulte d'un raisonnement fastidieux mais standard de théorie des faisceaux que nous allons détailler.

a) **Unicité** Considérons deux actions c -symplectiques coïsootropes adaptées de K sur des variétés symplectiques M et M' . Notons μ, μ_L, μ', μ'_L les applications moments des actions de K et L . Supposons que les images $\mu_L(M)$ et $\mu'_L(M')$ soient égales à un même convexe C_L et montrons qu'il existe un symplectomorphisme K -équivariant φ de M sur M' tel que $\mu' \circ \varphi = \mu$.

Comme les actions sont adaptées, on peut construire un recouvrement ouvert localement fini $(\Omega_i)_{i \in I}$ de C_L tel que, pour tout i , il existe un symplectomorphisme K -équivariant g_i de l'ouvert $U_i := \mu_L^{-1}(\Omega_i)$ sur l'ouvert $U'_i := \mu'^{-1}_L(\Omega_i)$ vérifiant $\mu' \circ g_i = \mu$.

1^{er} cas : Le recouvrement $(\Omega_i)_{i \in I}$ est fini.

Dans ce cas, la formule

$$g_{i,j} = g_i^{-1} \circ g_j$$

définit un élément $g_{i,j}$ de $\mathcal{A}_M(\Omega_i \cap \Omega_j)$ et on a, sur tout ouvert $U_i \cap U_j \cap U_k$, l'égalité

$$g_{i,k} = g_{i,j} \circ g_{j,k} .$$

Comme $H^1(C_L, \mathcal{A}_M) = 0$, quitte à remplacer ce recouvrement par un autre plus fin, on peut trouver des éléments h_i dans $\mathcal{A}_M(\Omega_i)$ tels que, sur tout ouvert $U_i \cap U_j$, on a l'égalité

$$g_{i,j} = h_i^{-1} \circ h_j .$$

Mais alors les symplectomorphismes $\varphi_i := g_i \circ h_i^{-1}$ de U_i sur U'_i vérifient

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j} .$$

Il existe donc un symplectomorphisme $\varphi : M \rightarrow M'$ qui coïncide avec φ_i sur chacun des ouverts U_i . C'est le symplectomorphisme cherché.

2^{ème} cas : Cas général

Comme le convexe C_L est à directions K_0 -entières, il est localement fermé et on peut trouver une suite croissante $(C_{n,L})_{n \geq 1}$ d'ouverts convexes de C_L qui recouvrent C_L et tels que $C_{n,L}$ est relativement compact dans $C_{n+1,L}$. Notons $M_n = \mu_L^{-1}(C_{n,L})$ et $M'_n = \mu'^{-1}_L(C_{n,L})$. Le premier cas permet de construire une suite ψ_n de symplectomorphismes K -équivariants de M_{n+1} sur M'_{n+1} tels que $\mu' \circ \psi_n = \mu$. On peut écrire $\psi_n = \varphi^{f_n}$ où f_n est une fonction C^∞ sur $C_{n+1,L}$. Il existe, pour tout $n \geq 1$, une fonction f'_n de classe C^∞ sur C_L dont la restriction à $C_{n,L}$ coïncide avec $f_n - f_{n+1}$. Notons ψ'_n l'élément de $\mathcal{A}_M(C_L)$ égal à $\varphi^{f'_n}$ et posons

$$\varphi_n = \psi_n \circ \psi'_{n-1} \circ \psi'_{n-2} \circ \cdots \circ \psi'_1 .$$

Par construction, φ_n et φ_{n+1} coïncident sur M_n . Il existe donc un symplectomorphisme φ de M sur M' dont la restriction à M_n est égale à φ_n pour tout n . C'est un symplectomorphisme K -équivariant tel que $\mu' \circ \varphi = \mu$. Ce qui prouve l'unicité.

Terminons par une remarque que nous utiliserons implicitement pour montrer l'existence et qui n'est qu'un avatar de la commutativité de $\mathcal{A}$.

Pour toute fonction f dans $\mathcal{A}(C_L)$, les éléments φ_M^f et $\varphi_{M'}^f$ de $\mathcal{A}_M(C_L)$ et $\mathcal{A}_{M'}(C_L)$ donnés par le lemme 6.14 vérifient l'égalité sur M

$$\varphi_{M'}^f \circ \varphi = \varphi \circ \varphi_M^f .$$

b) **Existence** Soit C un convexe de $\mathfrak{l}^*$ à directions K_0 -entières. On cherche une variété symplectique M munie d'une action c -symplectique coïsothrope adaptée de K telle que l'application moment μ_L de l'action de L sur M a pour image C .

Les modèles locaux permettent de construire un recouvrement localement fini $(\Omega_i)_{i \in I}$ de C et, pour tout i , des actions c -symplectiques coïsootropes adaptées de K sur des variétés symplectiques X_i de sorte que l'application moment $\mu_{i,L}$ de l'action L sur X_i a pour image $\mu_{i,L}(X_i) = \Omega_i$.

1^{er} cas : Le recouvrement $(\Omega_i)_{i \in I}$ est fini.

Posons $X_{i,j} = \mu_{j,L}^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j)$. On note μ_i le moment de l'action de K sur X_i . Par unicité, il existe, pour tout i, j , un symplectomorphisme K -équivariant $g_{i,j}$ de $X_{i,j}$ sur $X_{j,i}$ tel que $\mu_j \circ g_{i,j} = \mu_i$ sur $X_{i,j}$. On peut s'arranger pour que $g_{i,j} = g_{j,i}^{-1}$.

Comme les faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{X_i}$ sur Ω_i sont canoniquement isomorphes, la formule

$$\varphi^{h_{i,j,k}} = g_{i,j} \circ g_{j,k} \circ g_{k,i}$$

définit, pour tout i, j, k , un élément $h_{i,j,k}$ du groupe $\mathcal{A}(\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k)$. Par construction, ces éléments définissent un 2-cocycle à valeurs dans $\mathcal{A}$. Autrement dit, on a

$$h_{i,j,k} = h_{j,k,i} = -h_{j,i,k}$$

et, sur tout ouvert $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l$, on a l'égalité

$$h_{i,j,k} - h_{i,j,l} + h_{i,k,l} - h_{j,k,l} = 0 .$$

Comme $H^2(C, \mathcal{A}) = 0$, quitte à remplacer ce recouvrement par un autre plus fin, on peut trouver des éléments $f_{i,j}$ dans $\mathcal{A}_M(\Omega_i \cap \Omega_j)$ tels que

$$h_{i,j,k} = f_{i,j} - f_{i,k} + f_{j,k} .$$

Notons $\psi_{i,j}$ l'élément $\varphi^{f_{i,j}}$ de $\mathcal{A}_{X_i}(\Omega_i \cap \Omega_j)$. Les symplectomorphismes

$$\varphi_{i,j} := g_{i,j} \circ \psi_{i,j}^{-1}$$

vérifient l'égalité sur l'ouvert $X_{i,k} \cap X_{j,k}$

$$\varphi_{i,k} = \varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,k} .$$

On prend alors pour M la variété obtenue par recollement des variétés X_i en identifiant les ouverts $X_{i,j}$ et $X_{j,i}$ à l'aide des applications $\varphi_{i,j}$. Cette variété symplectique M est naturellement munie d'une action c -symplectique coïsothrope adaptée de K et l'image du moment de l'action de L sur M est le convexe C .

2^{ème} cas : Cas général

On note encore $(C_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'ouverts convexes de C qui recouvrent C et tels que C_n est relativement compact dans C_{n+1} .

D'après le premier cas, il existe, pour tout n , une action c -symplectique coïsothrope adaptée de K sur une variété symplectique M_n telle que l'application moment $\mu_{n,L}$ de l'action de L sur M_n a pour image C_n .

D'après l'unicité, il existe des symplectomorphismes K -équivalents φ_n qui identifient M_{n-1} avec l'ouvert $\mu_{n,L}^{-1}(C_{n-1})$ de M_n et qui vérifient l'égalité $\mu_n \circ \varphi_n = \mu_{n-1}$.

La variété symplectique M obtenue par réunion de cette suite est munie d'une action c -symplectique coïsothrope adaptée de K et l'image $\mu_L(M)$ est le convexe C . $\square$

6.7 Les automorphismes du revêtement universel

Nous terminons dans cette section la démonstration du théorème 6.6.

Le corollaire ci-dessous de la proposition 6.13 affirme que l'action de $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ est un produit.

Nous pourrions alors déterminer explicitement le groupe des automorphismes de $\tilde{M}$ et montrer que l'on peut s'arranger pour que le groupe fondamental Γ de $\tilde{M}$ n'agisse que sur le deuxième facteur de ce produit.

Commençons par le corollaire de la proposition 6.13.

Corollaire 6.16 (Le revêtement universel pour une action coïsothrope)

Soient T un tore et (M, ω) une variété symplectique compacte connexe munie d'une action de T effective et coïsothrope.

Soit T_h le plus grand sous-tore de T dont l'action sur M est hamiltonienne. On choisit un sous-tore T_a de T tel que $T = T_h \times T_a$. On note $\tilde{T}_a$ le revêtement universel de T_a , $\tilde{T} := T_h \times \tilde{T}_a$, c le cocycle infinitésimal et $(\tilde{M}_a, \tilde{\omega}_a)$ la $\tilde{T}_a$ -variété symplectique $X(\tilde{T}_a, c, 0)$.

Alors, il existe une variété symplectique compacte (M_h, ω_h) munie d'une action hamiltonienne coïsothrope de T_h telle que l'action du groupe $\tilde{T}$ sur $\tilde{M}$ est isomorphe à l'action produit de $T_h \times \tilde{T}_a$ sur $M_h \times \tilde{M}_a$.

Démonstration Notons $\tilde{\mu}_h : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{t}_h^*$ le moment de T_h sur $\tilde{M}$. Comme l'action de $T_h \times \tilde{T}_a$ sur $\tilde{M}$ est adaptée, le convexe

$$C_h := \tilde{\mu}_h(\tilde{M})$$

de $\mathfrak{t}_h^*$ est compact et à directions entières. D'après le théorème 6.5, on peut trouver une variété symplectique M_h munie d'une action hamiltonienne coïsothrope de T_h telle que, en notant μ_h le moment de T_h sur M_h , on a

$$\mu_h(M_h) = C_h.$$

Les actions de $T_h \times \tilde{T}_a$ sur $\tilde{M}$ et sur $M_h \times \tilde{M}_a$ sont coïsotropes adaptées, ont même cocycle infinitésimal et leurs images par l'application moment sont toutes deux égales à $C_h \times \mathfrak{t}_a^*$. La proposition 6.13 assure que ces actions sont isomorphes. $\square$

On identifie désormais $\tilde{M}$ à $\mathbf{M}_h \times \tilde{\mathbf{M}}_a$. On note $\text{Aut}(\tilde{M})$ le groupe des symplectomorphismes $\tilde{T}$ -équivalents de $\tilde{M}$. Le groupe $\text{Aut}(\tilde{M}_a)$ des symplectomorphismes

$\tilde{T}_a$ -équivalents de $\tilde{M}_a$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{M})$. Le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(M)$ est aussi un sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{M})$.

Le théorème 6.6 est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 6.17 (Construction du groupe nilpotent) *Soient T un tore, (M, ω) une variété symplectique compacte connexe munie d'une action de T effective et coïsothrope, T_h , T_a , M_h et M_a comme ci-dessus et $\Gamma = \pi_1(M)$. Alors*

- a) *Il existe un élément g de $\text{Aut}(\tilde{M})$ tel que $g\Gamma g^{-1}$ est inclus dans $\text{Aut}(\tilde{M}_a)$.*
- b) *Il existe un groupe de Lie nilpotent connexe N qui est un sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{M}_a)$, qui contient $\tilde{T}_a$ et $g\Gamma g^{-1}$ et tel que le quotient $N/g\Gamma g^{-1}$ est compact. Ce groupe N agit simplement transitivement sur $\tilde{M}_a$.*

Démonstration du théorème 6.6 On peut supposer que $g = 1$ dans la proposition 6.17. Le point a) de cette proposition permet d'introduire la variété symplectique $M_a := \Gamma \backslash \tilde{M}_a$. On a alors $M = M_h \times M_a$ et l'action de $T = T_h \times T_a$ sur M est l'action produit.

En outre le point b) permet d'identifier la variété $\tilde{M}_a$ avec le groupe de Lie nilpotent N . Par construction, la forme symplectique $p^*\omega$ est invariante par translation à gauche, Γ est un sous-groupe discret cocompact de N et le groupe $\tilde{T}_a$ est un sous-groupe central de N . $\square$

Pour démontrer la proposition, nous aurons besoin de quelques notations.

Soient $\mathfrak{l}$ le noyau du cocycle infinitésimal c , L le sous-groupe de Lie connexe de $\check{T}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$, $L_a := L \cap \tilde{T}_a$, $\mathfrak{l}_a$ l'algèbre de Lie de L_a et $\mathfrak{s}$ un supplémentaire de $\mathfrak{l}_a$ dans $\mathfrak{t}_a$.

On note $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}_L$ et $\tilde{\mu}_h$ les moments de l'action de $\check{T}$, L et T_h sur $\tilde{M}$, $C := \tilde{\mu}(\tilde{M})$, $C_L := \tilde{\mu}_L(\tilde{M})$ et $C_h := \tilde{\mu}_h(\tilde{M})$.

Par construction, on a l'égalité $\tilde{M}_a = \tilde{T}_a \times \mathfrak{l}_a^*$. Si on identifie $\tilde{T}_a$ à son algèbre de Lie à l'aide de l'application exponentielle, on a les identifications,

$$\begin{aligned} \check{T} &\simeq \{t = (\theta, l_0, s_0) \in T_h \times \mathfrak{l}_a \times \mathfrak{s}\}, \\ \tilde{M} &\simeq \{x = (m, l, \lambda, s) \in M_h \times \mathfrak{l}_a \times \mathfrak{s} \times \mathfrak{l}_a^*\}. \end{aligned}$$

Avec ces identifications, on peut calculer, comme en 6.4 l'action de $\check{T}$, la forme symplectique et les moments de $\check{T}$ et L sur $\tilde{M}$.

$$\begin{aligned} t.x &= (\theta.m, l + l_0, s + s_0, \lambda) \\ \omega &= \omega_h \times \tilde{\omega}_a \\ \mu(x) &= \mu_h(m) + c_{s,\cdot} + \lambda \in \mathfrak{t}_h^* \oplus \mathfrak{s}^* \oplus \mathfrak{l}_a^* \simeq \mathfrak{t}^* \\ \mu_L(x) &= \mu_h(m) + \lambda \in \mathfrak{t}_h^* \oplus \mathfrak{l}_a^* \simeq \mathfrak{l}^*. \end{aligned}$$

Introduisons l'espace

$$Z^\infty(C_L, L) := \{F \in \mathcal{C}^\infty(C_L, L) \mid dF = 0\}.$$

Cet espace s'identifie à l'espace des 1-formes fermées sur C_L modulo les 1-formes constantes à valeurs dans le noyau $\mathfrak{t}_h\mathbb{Z}$ de l'application $\exp : \mathfrak{t}_h \rightarrow T_h$.

Décrivons maintenant le groupe $\text{Aut}(\widetilde{M})$.

Lemme 6.18 (Le groupe des automorphismes) *Avec ces notations.*

a) Pour tout (F, s, λ) dans $Z^\infty(C_L, L) \times \mathfrak{s} \times \mathfrak{l}_a^*$, on note $[F, s, \lambda]$ l'élément de $\text{Aut}(\widetilde{M})$ donné par

$$[F, s, \lambda](m', l', s', \lambda') = F(\mu_h(m') + \lambda').(m', l', s' + s, \lambda' + \lambda) .$$

b) L'application $(F, s, \lambda) \longrightarrow [F, s, \lambda]$ est une bijection de $Z^\infty(C_L, L) \times \mathfrak{s} \times \mathfrak{l}_a^*$ sur $\text{Aut}(\widetilde{M})$.

c) Le produit dans $\text{Aut}(\widetilde{M})$ se calcule par la formule

$$[F, s, \lambda] \circ [F', s', \lambda'] = [F + F'(\lambda + .), s + s', \lambda + \lambda'] .$$

Démonstration a) Soit $A(\widetilde{M}) = \{\varphi \in \text{Aut}(\widetilde{M}) / \tilde{\mu} \circ \varphi = \tilde{\mu}\}$. Le lemme 6.14.d prouve que l'application $F \rightarrow [F, 0, 0]$ est une bijection de $Z^\infty(C_L, L)$ sur $A(\widetilde{M})$. D'autre part, comme $\tilde{\omega}_a$ est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{l}_a \times \mathfrak{s} \times \mathfrak{l}_a^*$, les éléments $[0, s, \lambda]$ sont bien dans $\text{Aut}(\widetilde{M})$, pour tout (s, λ) dans $\mathfrak{s} \times \mathfrak{l}_a^*$.

b) Soit φ dans $\text{Aut}(\widetilde{M})$. La fonction $\tilde{\mu} \circ \varphi - \tilde{\mu}$ est une constante $h(\varphi)$ de $\mathfrak{t}^*$ appelée holonomie de φ . L'égalité $C + h(\varphi) = C$ assure que $h(\varphi)$ est dans $\mathfrak{t}_a^*$. On a l'égalité $h([F, s, \lambda]) = c_{s, \cdot} + \lambda$. Il existe donc un unique couple (s, λ) dans $\mathfrak{s} \times \mathfrak{l}_a^*$ tel que $h(\varphi)$ est égal à l'holonomie de l'automorphisme $[0, s, \lambda]$. L'élément $[F, s, \lambda]^{-1} \circ \varphi$ est dans $A(\widetilde{M})$ et φ est donc égal à $[F, s, \lambda]$ pour un unique élément F de $Z^\infty(C_L, L)$.

c) Clair. □

Nous aurons aussi besoin du lemme classique suivant.

Lemme 6.19 *Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, Δ un sous-groupe discret de V et C un convexe fermé Δ -invariant de V . On note $\text{Pol}(V)$ l'espace des polynômes sur V .*

a) Pour tout $i \geq 1$, on a $H^i(\Delta, \text{Pol}(V)) = 0$.

b) Pour tout $i \geq 1$, on a $H^i(\Delta, C^\infty(C)) = 0$.

Remarque On peut aussi montrer que les Δ -modules $\text{Pol}(V)$ et $C^\infty(C)$ sont injectifs.

Démonstration a) On peut supposer que Δ est le groupe $\mathbb{Z}^m$ et que $V = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et utiliser la formule de Künneth pour se ramener au cas $m = 1$ et $p = 0$.

b) On peut supposer que Δ est le groupe $\mathbb{Z}^m$ et que $C = \mathbb{R}^m \times C_0$ où C_0 est un convexe fermé de $\mathbb{R}^p$. Pour $j = 0, \dots, m$, on note

$$\begin{aligned} E_j &= \{(x_1, \dots, x_m) / \#\{k/x_k \in \mathbb{Z}\} \geq n-j\} \times C_0 , \\ E'_j &= \text{le complémentaire de } E_{j-1} \text{ dans } E_j, \\ F_j &:= E_j \cap ([0, 1]^m \times C_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_j &:= E'_j \cap ([0, 1]^m \times C_0), \\
\mathcal{C}_0^\infty(E'_j) &:= \{ f \in \mathcal{C}^\infty(E_j) / f|_{E_{j-1}} = 0 \} \text{ et} \\
\mathcal{C}_0^\infty(F'_j) &:= \{ f \in \mathcal{C}^\infty(F_j) / f|_{F_{j-1}} = 0 \}.
\end{aligned}$$

Le Δ -module $\mathcal{C}_0^\infty(E'_j)$ est isomorphe au produit $\mathcal{C}_0^\infty(F'_j)^\Delta$. On a donc $H^i(\Delta, \mathcal{C}_0^\infty(E'_j)) = 0$. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de Δ -modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0^\infty(E'_j) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(E_j) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(E_{j-1}) \longrightarrow 0$$

permet d'en déduire par récurrence l'égalité $H^i(\Delta, \mathcal{C}_0^\infty(E_j)) = 0$. $\square$

Démonstration de la proposition 6.17

a) Pour tout φ dans $\text{Aut}(\widetilde{M})$, la fonction $\tilde{\mu}_L \circ \varphi - \tilde{\mu}_L$ est une constante de $\mathfrak{l}_a^*$ que l'on note $h_L(\varphi)$. L'application $h_L : \text{Aut}(\widetilde{M}) \rightarrow \mathfrak{l}_a^*$ est un morphisme de groupes et on a l'égalité

$$h_L([F, s, \lambda]) = \lambda.$$

Notons Δ l'image $h_L(\Gamma)$ et montrons que Δ est un réseau de $\mathfrak{l}_a^*$. Le corollaire 6.8 affirme que l'intersection $\Gamma \cap \text{Ker} h_L$ est le groupe $\check{T}_{\mathbb{Z}}$ noyau de la projection de $\check{T}$ sur T . En particulier, pour tout λ dans $\mathfrak{l}_a^*$, ce groupe agit proprement et avec quotient compact sur la fibre $\tilde{\mu}_L^{-1}(\lambda) \simeq M_h \times \mathfrak{l}_a \times \mathfrak{s} \times \{\lambda\}$. Comme Γ agit proprement sur $\widetilde{M}$, le groupe Δ est discret dans $\mathfrak{l}_a^*$. Comme $\Gamma \backslash \widetilde{M}$ est compact, le quotient $\Delta \backslash \mathfrak{l}_a^*$ aussi et Δ est un réseau de $\mathfrak{l}_a^*$.

Les symboles $\delta, \delta', \delta''$ désigneront des éléments de Δ . On choisit des éléments

$$\sigma(\delta) = [F_\delta, s_\delta, \delta]$$

de Γ et on choisit une primitive f_δ de F_δ , c'est à dire une fonction de $\mathcal{C}^\infty(C_L)$ telle que

$$F_\delta = d f_\delta \text{ modulo } \mathfrak{t}_{h, \mathbb{Z}}.$$

Comme Δ est un groupe abélien libre, on peut supposer ces choix faits de sorte que

$$s_{\delta, \delta'} = s_\delta + s_{\delta'}.$$

Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^\infty(C_L)$, on note $\delta.f$ la fonction de $\mathcal{C}^\infty(C_L)$ égale à $f(\delta + .)$. On pose

$$g_{\delta, \delta'} = \delta.f_{\delta'} - f_{\delta, \delta'} + f_\delta.$$

C'est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(C_L)$ qui satisfait l'égalité

$$\sigma(\delta)\sigma(\delta') = [dg_{\delta, \delta'}, 0, 0] \sigma(\delta\delta').$$

Les éléments $[dg_{\delta, \delta'}, 0, 0]$ sont dans $\Gamma \cap \text{Ker} h_L$, ils sont donc dans $\check{T}$ (corollaire 6.8). Autrement dit, les fonctions $g_{\delta, \delta'}$ sont des fonctions affines sur $C_L \simeq C_h \times \mathfrak{l}_a^*$ qui ne

dépendent pas de la première variable. En particulier $g_{\delta,\delta'}$ est dans l'espace vectoriel $\text{Pol}(\mathfrak{l}_a^*)$ des polynômes sur $\mathfrak{l}_a^*$. Ces éléments vérifient la relation de cocycle

$$\delta.g_{\delta',\delta''} - g_{\delta\delta',\delta''} + g_{\delta,\delta'\delta''} - g_{\delta,\delta'} .$$

D'après le lemme 6.19, on a $H^2(\Delta, \text{Pol}(\mathfrak{l}_a^*)) = 0$. Il existe donc des polynômes f'_δ dans $\text{Pol}(\mathfrak{l}_a^*)$ tels que

$$g_{\delta',\delta''} = \delta.f'_{\delta'} - f'_{\delta,\delta'} + f'_\delta .$$

Les éléments $f''_\delta := f_\delta - f'_\delta$ vérifient alors la relation de cocycle

$$\delta.f''_{\delta'} - f''_{\delta,\delta'} + f''_\delta = 0 .$$

D'après le lemme 6.19, on a $H^1(\Delta, \mathcal{C}^\infty(C_L)) = 0$. Il existe donc une fonction f dans $\mathcal{C}^\infty(C_L)$ telle que

$$f''_\delta = \delta.f - f'$$

Introduisons alors l'élément $g = [df, 0, 0]$ de $\text{Aut}(\widetilde{M})$. On a

$$g\sigma(\delta)g^{-1} = [df'_\delta, s_\delta, \delta]$$

et $g\Gamma g^{-1}$ est inclus dans $\text{Aut}(\widetilde{M}_a)$

Nous aurions pu nous contenter dans ce raisonnement de choisir f'_δ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{l}_a^*)$, le fait que ces fonctions f'_δ peuvent être choisies polynômiales va nous être utile pour démontrer le point suivant.

b) Pour $p \geq 1$, on note

$$N_p = \{ [df, s, \lambda] / f \in \text{Pol}(\mathfrak{l}_a^*) , d^o f \leq p , s \in \mathfrak{s} , \lambda \in \mathfrak{l}_a^* \} .$$

C'est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe inclus dans le groupe $\text{Aut}(\widetilde{M}_a)$. Comme Γ est un groupe de type fini, il résulte du raisonnement ci-dessus qu'il existe $p \geq 1$ et g dans $\text{Aut}(\widetilde{M})$ tels que $g\Gamma g^{-1}$ est inclus dans N_p . On peut supposer que $g = 1$.

Comme Γ est un sous-groupe discret de N_p , il existe un unique sous-groupe de Lie connexe N de N_p contenant Γ tel que $\Gamma \backslash N$ est compact (voir [26] chapitre 2). Comme le groupe $\widetilde{T}_a$ est inclus dans N_p et que l'intersection $\widetilde{T}_\mathbb{Z} = \Gamma \cap \widetilde{T}_a$ est cocompacte dans $\widetilde{T}_a$, le groupe $\widetilde{T}_a$ est inclus dans N .

Comme $\Gamma \backslash N$ est compact, le groupe N agit aussi proprement sur $\widetilde{M}_a$. Donc le groupe d'isotropie dans N de tout point de $\widetilde{M}_a$ est trivial. Comme $\Gamma \backslash N$ et $\Gamma \backslash \widetilde{M}_a$ sont compacts, on a $\dim N = \text{rg} \Gamma = \dim \widetilde{M}_a$. Donc les orbites de N dans $\widetilde{M}_a$ sont ouvertes. Elles sont donc aussi fermées et N agit simplement transitivement sur E . $\square$

Références

- [1] M. ATIYAH - Convexity and commuting hamiltonians, Bull. London Math. Soc. 14 (1982) p.1-15.
- [2] M. AUDIN - The topology of torus actions on symplectic manifolds, PM 93 Birkhäuser (1991).
- [3] N. BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9, Masson, Paris (1982).
- [4] M. BRION - Sur l'image de l'application moment, LN 1296 (1986) p.177-192.
- [5] M. BRION - Introduction aux variétés sphériques, Notes de cours (1997).
- [6] M. CONDEVAUX, P. DAZORD, P. MOLINO - Géométrie du moment, Travaux du séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie, Univ. Lyon I (1988) p.131-160.
- [7] T. DELZANT - Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment, Bull. Soc. Math. Fr. 116 (1988) p.315-339.
- [8] E. FEDIDA - Sur les feuilletages de Lie, CRAS 272 (1971) p.999-1002.
- [9] M. FERNANDEZ, A. GRAY, J. MORGAN - Compact symplectic manifolds with free circle actions and Massey products, Michig. Math. Journ. 38 (1991) p.271-283.
- [10] V. GINZBURG - Some remarks on symplectic actions of compact groups, Math. Zeit. 210 (1992) p.625-640.
- [11] C. GODBILLON - Feuilletages, PM 98 Birkhäuser (1991).
- [12] R. GODEMENT - Théorie des faisceaux, Hermann (1964).
- [13] V. GUILLEMIN - Moment maps and combinatorial invariants of hamiltonian T^n -spaces. PM 122 Birkhäuser (1994).
- [14] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG - Symplectic technics in physics, Camb. Univ. Press (1984).
- [15] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG - Convexity properties of the moment mapping, Inv.Math. 67 (1982) p.491-513 et 77 (1984) p.533-546.
- [16] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG - Multiplicity free spaces, Journ. Diff. Geom. 19 (1984) p.31-56.
- [17] J. HILGERT, K. NEEB, W. PLANCK - Symplectic convexity theorems and coadjoint orbits, Compos. Math. 94 (1994) p.129-180.
- [18] F. KIRWAN - Convexity properties of the moment mapping, Inv.Math. 77 (1984) p.547-552.
- [19] F. KNOP - Toward a classification of multiplicity free manifolds, Notes de cours (1997).
- [20] E. LERMAN, E. MEINREKEN, S. TOLMAN, C. WOODWARD - Non abelian convexity by symplectic cuts, preprint (1996).
- [21] E. LERMAN, R. MONTGOMERY, R. SJAMAAR - Examples of singular reduction, in Symplectic Geometry, London Math. Lect. Notes 192 (1993) p.127-155.
- [22] D. LUNA - Opérations algébriques... et opérations hamiltoniennes... Notes de cours (1997).
- [23] A. MARLE - Modèles d'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique, CRAS 299 (1984) p.249-252 et Rend. Sem. Math. Univ. Pol. Torino 43 (1985) p.227-251.
- [24] D. MCDUFF, D. SALAMON - Introduction to symplectic topology, Oxford Math. Mono. (1995).
- [25] D. MCDUFF - The moment map for circle actions on symplectic manifolds, Journ. Geom. Phys. 5 (1988) p.149-160.
- [26] M. RAGHUNATHAN - Discrete subgroups of Lie groups, EM 68 Springer (1972).
- [27] R. SJAMAAR - Convexity properties of the moment mapping re-examined, Adv. in Math. 138 (1998) p.46-91.
- [28] A. WEINSTEIN - Neighborhood classification of isotropic embedding, Journ. Diff. Geom. 16 (1981) p.125-128.

CNRS, Ecole Normale Supérieure, DMA, 45 rue d'Ulm 75005 Paris
benoist@dma.ens.fr