Itération de pliages de quadrilatères

Iteration of quadrilateral foldings

Yves Benoist [a] Dominique Hulin [b]

[a] *Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris*

[b] *Université Paris-Sud, Batiment 425, Orsay 91405*

Abstract

Starting with a quadrilateral $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ of $\mathbb{R}^2$, one constructs a sequence of quadrilaterals $q_n = (A_{4n+1}, \ldots, A_{4n+4})$ by iteration of foldings : $q_n = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(q_{n-1})$ where the folding φ_j replaces the vertex number j by its symmetric with respect to the opposite diagonal.

We study the dynamical behavior of this sequence. In particular, we prove that :

- The drift $v := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} q_n$ exists.

- When none of the q_n is isometric to q_0, then the drift v is zero if and only if one has $\max a_j + \min a_j \leq \frac{1}{2} \sum a_j$, where $a_1, \ldots, a_4$ are the sidelengths of q_0.

- For Lebesgue almost all q_0 the sequence $(q_n - nv)_{n\geq 1}$ is dense on a bounded analytic curve with a center, or an axis of symmetry. However, for Baire generic q_0, the sequence $(q_n - nv)_{n\geq 1}$ is unbounded.

Résumé

Partant d'un quadrilatère $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ de $\mathbb{R}^2$, on construit une suite $q_n = (A_{4n+1}, \ldots, A_{4n+4})$ de quadrilatères par itération de pliages : $q_n = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(q_{n-1})$, où le pliage φ_j remplace le sommet numéro j par son symétrique par rapport à la diagonale opposée. Dans cette note, nous étudions le comportement dynamique de la suite q_n.

1. Pliage cyclique

A chaque quadrilatère $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, on peut associer d'autres quadrilatères obtenus par pliage le long d'une diagonale. Ainsi, pour $j = 1, \ldots, 4$, le quadrilatère $\varphi_j(q_0)$ est obtenu à partir de q_0 en remplaçant le sommet A_j par son symétrique $s_{\Delta_j}(A_j)$ par rapport à la diagonale Δ_j joignant les deux voisins de A_j.

Partons du quadrilatère q_0 et considérons la suite q_n de quadrilatères obtenue en pliant de façon cyclique les sommets numéros $1, 2, 3, 4$. Autrement dit, on introduit $\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $q_n := \varphi^n(q_0)$. Nous voulons décrire le comportement dynamique de cette suite q_n. On notera $q_n = (A_{4n+1}, A_{4n+2}, A_{4n+3}, A_{4n+4})$. On a donc $A_5 = s_{A_2A_4}(A_1)$ puis $A_6 = s_{A_3A_5}(A_2)$, etc.

Email addresses: `Yves.Benoist@ens.fr` (Yves Benoist), `Dominique.Hulin@math.u-psud.fr` (Dominique Hulin).

Preprint submitted to Elsevier Science *21 décembre 2011*

Remarquons tout d'abord que la longueur des côtés $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$, $a_3 = A_3A_4$ et $a_4 = A_4A_1$ est préservée par le pliage et donc que la suite q_n de quadrilatères ne s'écrase pas sur un point... contrairement à ce que pourrait laisser croire la terminologie "itération de pliages". Cette suite q_n est particulièrement simple à étudier lorsque q_0 est *de type k-périodique*, c'est-à-dire lorsque $(\varphi_4 \circ \varphi_3)^k(q_0) = q_0$. Le quadrilatère q_k est alors l'image de q_0 par une isométrie de $\mathbb{R}^2$. Selon que cette isométrie a un point fixe ou non, la suite q_n reste bornée ou tend vers l'infini.

2. Principaux résultats

Nous supposerons que $(a_1, a_2) \neq (a_4, a_3)$ et que $(a_1, a_4) \neq (a_2, a_3)$ de sorte que la suite q_n des quadrilatères obtenue par pliage cyclique est bien définie.

La proposition suivante affirme l'existence d'une dérive pour le pliage cyclique.

Proposition 2.1 *Soit q_n la suite des quadrilatères obtenue par pliage cyclique à partir d'un quadrilatère q_0. Alors, la limite $v(q_0) := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} q_n$ existe.*

Par construction, la dérive $v(q_0)$ est un quadrilatère dont les quatre sommets sont confondus, et s'identifie donc à un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Voici un critère d'annulation de cette dérive. On note M le plus grand côté, m le plus petit côté et p le demi-périmètre de q_0.

Théorème 2.2 *On suppose q_0 de type non périodique. Alors on a l'équivalence :*

$$v(q_0) = 0 \Longleftrightarrow M + m \leq p \, .$$

Définition 2.3 *Un quadrilatère q_0 est de type* NC *si $M + m \leq p$ et de type* C *sinon.*

Remarques - Pour un quadrilatère de type périodique, la nullité de $v(q_0)$ équivaut au fait que la suite q_n est bornée.

- Géométriquement, cette condition "q_0 de type C" signifie que l'on peut déformer continûment le quadrilatère q_0 en une image miroir $\sigma(q_0)$ sans changer la longueur des côtés et sans passer par un quadrilatère plat.

- Tous les quadrilatères de *période stricte* $2k$ sont de type NC et vérifient $v(q_0) = 0$; d'autre part, parmi les quadrilatères de type n-périodique et de type C, *presque tous* vérifient $v(q_0) \neq 0$.

- Malheureusement, il existe des quadrilatères de type $(4k+2)$-périodiques et de type NC tels que $v(q_0) \neq 0$ et il existe aussi des quadrilatères de type $4k$-périodique et de type C tels que $v(q_0) = 0$.

On en déduira le :

Corollaire 2.4 *Soit q_0 un quadrilatère de type non périodique. La suite q_n obtenue par pliage cyclique tend vers l'infini si et seulement si q_0 est de type* C.

La proposition suivante décrit le comportement du pliage cyclique par rapport à sa dérive.

Proposition 2.5 *a) Pour presque tout quadrilatère q_0, la suite de quadrilatères $q_n - n\,v(q_0)$ est dense sur une courbe analytique lisse bornée $\mathcal{C}$.*

b) Pour un ensemble générique de quadrilatères q_0, la suite de quadrilatères $q_n - n\,v(q_0)$ n'est pas bornée.

c) Si la suite de quadrilatères $q_n - n\,v(q_0)$ est bornée, elle est soit convergente, soit périodique, soit dense sur une courbe $\mathcal{C}$ de classe C^0.

Remarques - Cette courbe $\mathcal{C} \subset (\mathbb{R}^2)^4$ n'est pas toujours de classe C^1. Appelons encore symétrie la transformation de l'espace $(\mathbb{R}^2)^4$ induite par une symétrie de $\mathbb{R}^2$. La courbe $\mathcal{C}$ est invariante par une symétrie centrale lorsque q_0 est de type NC, et par une symétrie axiale d'axe parallèle à la dérive $v(q_0)$ lorsque q_0 est de type C. Elle admet une symétrie supplémentaire lorsque q_0 est isocèle (i.e. lorsque $a_1 = a_3$).

- La condition *presque tout* signifie que l'assertion est vraie en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. *Ensemble générique* signifie ensemble dont le complémentaire est inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Un tel ensemble est dense. *Courbe* C^0 signifie sous-variété de dimension 1 et de classe C^0.

L'énoncé suivant complète le corollaire 2.4 pour les quadrilatères de type NC.

Corollaire 2.6 *a) Pour presque tout quadrilatère q_0 de type* NC, *la suite q_n est dense sur une courbe analytique bornée $\mathcal{C}$.*
b) Pour un ensemble générique de quadrilatères q_0 de type NC, *la suite q_n n'est pas bornée.*
c) Si la suite q_n est bornée, elle est soit convergente, soit périodique, soit dense sur une courbe $\mathcal{C}$ de classe C^0.

Remarques - Pour les quadrilatères de type non périodique, le fait que la suite q_n soit bornée ne dépend que des côtés $a_1, \ldots, a_4$.
- Malheureusement, une telle assertion n'est pas toujours vraie pour les quadrilatères de type périodique.

L'étude de la dynamique de cette suite q_n a été initiée par K.Charter, J.Esch et T.Rogers dans [4] et [6]. Les corollaires 2.4, 2.6 et leurs remarques sont vrais pour les quadrilatères isocèles. Ce qui répond aux questions et conjectures de ces deux articles (voir [4] p.222).

3. Méthode suivie

On note $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et $Q = Q_{\mathbf{a}}$ l'ensemble des quadrilatères de côtés a_1, a_2, a_3 et a_4. On note $\dot{Q} = \dot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des translations et $\ddot{Q} = \ddot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des isométries positives de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout quadrilatère q dans Q, on note $\dot{q}$ et $\ddot{q}$ ses images dans $\dot{Q}$ et $\ddot{Q}$. On note $\varphi_{j_1 \cdots j_\ell} = \varphi_{j_1} \circ \cdots \circ \varphi_{j_\ell}$ de sorte que $\varphi := \varphi_{4321}$ et $q_n = \varphi^n(q_0)$. Pour toute transformation ψ de Q qui commute aux isométries de $\mathbb{R}^2$, par exemple $\psi = \varphi_{j_1 \cdots j_\ell}$, on note $\dot{\psi}$ et $\ddot{\psi}$ les transformations de $\dot{Q}$ et $\ddot{Q}$ induites par ψ.

Pour étudier le système dynamique (Q, φ), nous allons tout d'abord étudier les systèmes dynamiques $(\ddot{Q}, \ddot{\varphi})$ et $(\dot{Q}, \dot{\varphi})$. En effet l'espace Q est de dimension 4 et non compact, tandis que les espaces $\ddot{Q}$ et $\dot{Q}$ sont compacts et de dimensions respectives 1 et 2. On supposera, pour simplifier notre exposition, que l'on a toujours $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \neq 0$.

3.1. *La dynamique sur $\ddot{Q}$*

Comme dans [4], la courbe $\ddot{Q}$ est une courbe elliptique réelle et la transformation $\ddot{\varphi}_{21} = \ddot{\varphi}_{43}$ est une translation sur cette courbe elliptique. Il est remarquable que ce système dynamique $(\ddot{Q}, \ddot{\varphi}_{43})$ est conjugué au système dynamique de Poncelet pour deux cercles dont les centres sont à distance $a := a_1 a_3$, le cercle circonscrit ayant pour rayon $R := a_2 a_4$ et le cercle inscrit ayant pour rayon $r := \frac{1}{2}|a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2|$ (voir [3] et [8] pour le lien entre le système dynamique de Poncelet et les courbes elliptiques). Il existe sur $\dot{Q}$ une fonction $\dot{\varphi}$-invariante h. Elle est donnée par $h(\dot{q}_0) = r_1 r_2 r_3 / r_4$ où $r_j = \frac{1}{a_j}(A_{j+1} - A_j)$ pour $j = 1$, 2, 3, et $r_4 = \frac{1}{a_4}(A_1 - A_4)$. Lorsque q_0 n'est pas de type périodique, la suite $\dot{q}_n = \dot{\varphi}^n(\dot{q}_0)$ s'équirépartit sur une courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ de $\dot{Q}$ en suivant une loi statistique μ : cette courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est une composante connexe d'un revêtement à deux feuillets de $\ddot{Q}$ et μ est la probabilité invariante sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. Ce qui permet de démontrer la proposition 2.1.

3.2. *La dynamique sur* $\dot{Q}$

Introduisons, pour $j = 1, \ldots, 4$, la loi μ_j de la suite des directions $\frac{1}{a_j}(A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$.

Lorsque q_0 est de type NC, le quadrilatère $-\dot{q}_0$ est dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. La loi μ est alors symétrique par rapport à l'origine et toutes les lois μ_j coïncident. Ce qui prouve que la dérive $v(q_0)$ est nulle.

Lorsque q_0 est de type C, notons j_0 le numéro du plus grand côté de q_0. Les directions $\frac{1}{a_j}(A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$ sont alors toutes dans un même demi-espace et les probabilités μ_j coïncident sauf pour $j = j_0$ où ces directions sont dans le demi-espace opposé et où la probabilité μ_{j_0} est la probabilité opposée. A cause de l'inégalité triangulaire, la dérive due au plus grand côté n'arrivera pas à annuler la somme des dérives dues aux trois autres côtés. Ce qui prouve que la dérive $v(q_0)$ est non nulle. On peut calculer cette dérive : elle est parallèle à $\sqrt{-h(\dot{q}_0)}$, a pour norme

$$|v(q_0)| = \frac{(p-M)\pi}{K} \quad \text{où} \quad K := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} \quad \text{et} \quad k^2 := \frac{(a+R)^2 - r^2}{4aR} \in \,]0, 1[\;,$$

et elle fait, pour tout $n \geq 1$, un angle aigu avec les vecteurs $A_{n+1} - A_n$, sauf pour ceux de longueur M, auquel cas cet angle est obtus. Ce qui permet de démontrer le théorème 2.2.

3.3. *La dynamique sur* Q

Nous avons vu que l'action de $\dot{\varphi}$ sur la courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est conjuguée à une rotation. On note $\rho_{\mathbf{a}}$ son nombre de rotation. Au dessus de cette courbe, le pliage cyclique "recentré" $\varphi - v(q_0)$ est donc conjugué à un système dynamique $\varphi_{\mathbf{a}}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ donné par

$$\varphi_{\mathbf{a}}(x, v) = (x + \rho_{\mathbf{a}}, v + f_{\mathbf{a}}(x))$$

où la fonction $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique explicite de moyenne nulle. Lorsque $\rho_{\mathbf{a}}$ a de bonnes propriétés diophantiennes, les orbites de $\varphi_{\mathbf{a}}$ sont denses sur des courbes analytiques réelles. Lorsque $\rho_{\mathbf{a}}$ n'a pas de bonnes propriétés diophantiennes, les orbites de $\varphi_{\mathbf{a}}$ ne sont pas bornées. Ce qui permet de démontrer la proposition 2.5. Les détails sont donnés dans [1].

Références

[1] Y.Benoist, D.Hulin - Itération de pliages de quadrilatères, preprint (2003).

[2] F.Beukers, R.Cushman - Zeeman's monotonicity conjecture, Journal of differential equations, 143 (1998) p.191-200.

[3] H.Bos, C.Kers, F.Oort, D.Raven - Poncelet's closure theorem, Expositiones Math. 5 (1987) p.289-364.

[4] K.Charter, T.Rogers - The dynamics of quadrilateral folding, Experimental Mathematics 2 (1993) p.209-222.

[5] P.Duval - Elliptic functions and elliptic curves, LMS Lect. Note, CUP (1973).

[6] J.Esch, T.Rogers - Dynamics on elliptic curves arising from polygonal folding, Discrete Comput. Geom. 25 (2001) p.477-502.

[7] H.Furstenberg - Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. Journ. Math. 83 (1961) p.573-601.

[8] P.Griffiths, J.Harris - On Cayley's explicit solution to Poncelet porism, l'Ens. Math. 24(1978) p.31-40.

[9] R.Mañe - Ergodic theory and differentiable dynamics, Ergebn. Springer (1987).

[10] H.McKean, V.Moll - Elliptic curves, CUP (1997).

[11] P.Samuel - Géométrie projective, PUF (1986).