

# Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques

Yves Benoist

**ABSTRACT Hyperbolic convex sets and quasisymmetric functions**

Every bounded convex open set  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^m$  is endowed with its Hilbert metric  $d_\Omega$ . We give a necessary and sufficient condition, called quasisymmetric convexity, for this metric space to be hyperbolic. As a corollary, when the boundary is real analytic,  $\Omega$  is always hyperbolic.

In dimension 2, this condition is : in affine coordinates, the boundary  $\partial\Omega$  is locally the graph of a  $C^1$  strictly convex function whose derivative is quasisymmetric.

## 1 Introduction

### 1.1 Présentation générale

Tout ouvert convexe borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$  est muni de la distance de Hilbert  $d_\Omega$ . Le but de cet article est de caractériser les ouverts convexes bornés qui sont hyperboliques pour cette distance (dans cet article, hyperbolique signifiera “Gromov hyperbolique” : voir [9] ou la définition 1.1)

Plus précisément, nous montrerons l'équivalence:

$\Omega$  est hyperbolique  $\iff \Omega$  est quasisymétriquement convexe.

La condition “quasisymétriquement convexe” est explicitée dans les définitions 1.2 et 1.3. En dimension 2, elle signifie que, dans des systèmes de coordonnées affines, le bord  $\partial\Omega$  est localement le graphe d'une fonction strictement convexe  $C^1$  dont la dérivée est quasisymétrique.

Lorsque le bord  $\partial\Omega$  est analytique réel, nous verrons que cette condition est toujours vérifiée.

Signalons quelques résultats antérieurs sur cette question:

- J'avais montré dans [3] l'implication,  $\Omega$  hyperbolique  $\implies \Omega$  strictement convexe ainsi que l'existence de tels convexes  $\Omega$  dont le bord est nulle part de classe  $C^2$ .

- Plus récemment, Karlsson et Noskov ont montré dans [11] les implications  $\partial\Omega$  est  $C^2$  à Hessien défini positif  $\implies \Omega$  est hyperbolique et  $\Omega$  est hyperbolique  $\implies \partial\Omega$  est  $C^1$ .

Précisons maintenant plus en détail nos définitions et nos résultats.

## 1.2 Notations et définitions

### 1.2.1 Ouverts proprement convexes et distance de Hilbert

Notons  $\mathbb{P}^m := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{m+1})$  l'espace projectif de  $V := \mathbb{R}^{m+1}$ . Pour tout couple  $x, y$  de points distincts de  $\mathbb{P}^m$ , on note  $\langle x, y \rangle$  la droite projective les contenant. On munit  $V$  du produit scalaire euclidien standard et  $\mathbb{P}(V)$  de la distance

$$d(x, y) = \inf\{\|v - w\| / v \in x, w \in y \text{ et } \|v\| = 1\}.$$

Une partie *proprement convexe*  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^m$  est une partie convexe dont l'adhérence est incluse dans le complémentaire d'un hyperplan projectif  $H$  de  $\mathbb{P}^m$ . Le *support* d'un convexe est le plus petit sous-espace projectif le contenant. La *dimension* d'un convexe est la dimension de son support. Une partie *strictement convexe* est une partie proprement convexe telle que toute droite projective de  $\mathbb{P}^m$  rencontre le bord  $\partial\Omega$  en au plus deux points. On note  $X_m$  l'ensemble des ouverts proprement convexes de  $\mathbb{P}^m$ . L'espace  $X_m$  est un espace métrique localement compact pour la distance de Hausdorff:

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \sup_{\{i,j\}=\{1,2\}} \left( \sup_{x_i \in \Omega_i} \left( \inf_{x_j \in \Omega_j} d(x_i, x_j) \right) \right).$$

On note  $G_m := \text{PGL}(\mathbb{R}^{m+1})$  le groupe des transformations projectives de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Ce groupe agit naturellement sur  $X_m$ . Un ouvert proprement convexe  $\Omega$  est dit *stable* si son orbite  $G_m\Omega$  est fermée dans  $X_m$ . Pour tout  $\Omega$  dans  $X_m$ , on note  $\Omega^*$  l'ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}(V^*)$  dual de  $\Omega$  :  $\Omega^* := \{\mathbb{R}f \in \mathbb{P}(V^*) / \forall \mathbb{R}v \in \overline{\Omega}, f(v) \neq 0\}$ .

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^{m+1}$  de signature  $(1, m)$  et  $\Omega_0 := \{[v] \in \mathbb{P}^m / q(v) > 0\}$ . Nous appellerons *ellipsoïde* un tel ouvert convexe de  $\mathbb{P}^m$ .

Chaque ouvert proprement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^m$  est muni d'une distance  $d_\Omega$  appelée *distance de Hilbert* et définie par, pour tout  $x, x'$  dans  $\Omega$ ,  $d_\Omega(x, x') = \log([x; x'; a; a'])$  où  $a$  et  $a'$  sont les deux points du bord de  $\Omega$  qui sont sur la droite  $\langle x, x' \rangle$  et où  $[x; x'; a; a'] = \frac{xa'}{xa} \frac{x'a}{x'a'}$  est le *birapport* de ces quatre points.

Lorsque  $\Omega$  est un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}^m$  dont le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ , pour tout point  $a$  de  $\partial\Omega$ , on note  $a^* \in \partial\Omega^*$  l'hyperplan projectif tangent en  $a$  à  $\partial\Omega$ . On note alors  $H(\partial\Omega)$  l'ensemble des quadruplets *harmoniques* de  $\partial\Omega$  c'est-à-dire des



Figure 1: A. La distance de Hilbert

B. Un quadruplet harmonique  $(a, b, c, d)$

quadruplets  $\xi = (a, b, c, d)$  de points distincts de  $\partial\Omega$  tels que

- les droites  $\langle a, c \rangle$  et  $\langle b, d \rangle$  se coupent en un point  $x$  de  $\Omega$ .

- la droite  $\langle a, c \rangle$  rencontre les deux hyperplans  $b^*$  et  $d^*$  en un même point  $y$ .

On note alors  $\psi_{\partial\Omega} : H(\partial\Omega) \rightarrow ]0, \infty[$  la fonction donnée par  $\psi_{\partial\Omega}(\xi) = -[x; y; a; c]$ .

### 1.2.2 Métriques hyperboliques

Un espace métrique  $(X, d)$  est dit *géodésique* si, pour tout couple  $(x, y)$  de points de  $X$ , il existe une isométrie de l'intervalle  $[0, d(x, y)]$  dans  $X$  qui envoie les extrémités sur les points  $x$  et  $y$ . On appelle *géodésique* de  $x$  à  $y$  l'image d'une telle isométrie et on notera  $[x, y]$  une telle géodésique.

Par exemple, l'espace métrique  $(\Omega, d_\Omega)$  est géodésique. En outre, si  $\Omega$  est strictement convexe, la géodésique joignant deux points est unique:  $[x, y]$  est le segment de droites joignant  $x$  à  $y$ . La définition suivante est due à M.Gromov ([9]).

**Définition 1.1** *Un espace métrique géodésique  $X$  est dit hyperbolique si il existe un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout triangle géodésique  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  de  $X$  et tout point  $u$  sur un des côtés  $[x, y]$ , la distance  $d(u, [x, z] \cup [z, y])$  du point  $u$  à la réunion des deux autres côtés est majorée par  $\delta$ .*

Dans ce texte, l'expression  $\Omega$  est hyperbolique fera référence à la métrique de Hilbert.

### 1.2.3 Fonctions quasisymétriques

Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe de classe  $C^1$ . Pour  $x$  et  $x + h$  dans  $U$ , on note

$$D_x(h) := F(x + h) - F(x) - F'(x).h .$$

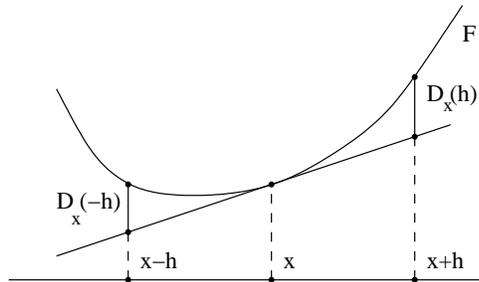


Figure 2: Fonction quasisymétriquement convexe

**Définition 1.2**  *$F$  est dite quasisymétriquement convexe si il existe un réel  $H \geq 1$  tel que, pour tous  $x - h$  et  $x + h$  dans  $U$ , on a*

$$D_x(h) \leq H D_x(-h) .$$

**Remarques** - Nous verrons que, lorsque  $N = 1$ , une fonction convexe est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si sa dérivée  $f = F'$  est une fonction quasisymétrique sur tout compact (proposition 5.2).

- Soient  $\alpha \in ]1, 2[$ ,  $\beta \in ]2, \infty[$ . Rappelons que  $F$  est dite  $C^\alpha$  si  $\sup_{\{(x,h)/h \neq 0\}} \|h\|^{-\alpha} |D_x(h)| < \infty$  et que  $F$  est dite  $\beta$ -convexe si  $\inf_{\{(x,h)/h \neq 0\}} \|h\|^{-\beta} D_x(h) > 0$ .

Recouvrons le bord  $\partial\Omega$  d'un ouvert proprement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^m$  par des ouverts  $\mathcal{G}_i$ , chacun d'eux s'identifiant, dans un système de coordonnées projectives convenable, au graphe d'une application convexe  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  où  $U_i$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^{m-1}$ .

**Définition 1.3** *Le convexe  $\Omega$  est dit quasisymétriquement convexe si les fonctions  $F_i$  sont quasisymétriquement convexes sur tout compact de  $U_i$ .*

**Remarques** - Nous verrons que cette définition ne dépend ni du choix des ouverts  $\mathcal{G}_i$  ni des systèmes de coordonnées projectives (lemme 8.1).

- De même,  $\Omega$  est dit à bord  $C^\alpha$  (resp.  $\beta$ -convexe) si les fonctions  $F_i$  sont  $C^\alpha$  (resp.  $\beta$ -convexes) sur tout compact de  $U_i$ .

### 1.3 Principaux résultats

Le but principal de cet article est le théorème suivant.

**Théorème 1.4** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$ . On a l'équivalence:  
 $\Omega$  est hyperbolique  $\iff \Omega$  est quasisymétriquement convexe.*

**Corollaire 1.5** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$ .*

- a) *Si  $\Omega$  est hyperbolique, alors il existe  $\alpha \in ]1, 2[$  tel que  $\partial\Omega$  est  $C^\alpha$ .*
- b) *Si  $\Omega$  est hyperbolique, alors il existe  $\beta \in ]2, \infty[$  tel que  $\partial\Omega$  est  $\beta$ -convexe.*
- c) *Lorsque  $\partial\Omega$  est analytique réel,  $\Omega$  est toujours hyperbolique.*

Appliquons ce critère à quelques convexes  $\Omega$  du plan.

★ **Exemple 1**  $\Omega_1 := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / |s + t| < 1, |s - t| < 1\}$ . Ce convexe est un carré. Il n'est pas hyperbolique car il n'est pas strictement convexe.

★ **Exemple 2**  $\Omega_2 := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / |s| < 1, t^2 - \frac{|s|}{\log|s|} < 1\}$ . Ce convexe n'est pas hyperbolique car son bord n'est  $C^\alpha$  pour aucun  $\alpha > 0$ .

★ **Exemple 3**  $\Omega_3 := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / t^2 + 2e^{-s^{-2}} < 1\}$ . Ce convexe n'est pas hyperbolique car son bord est  $C^\infty$  mais n'est pas  $\beta$ -convexe.

★ **Exemple 4**  $\Omega_4(\alpha, \beta) := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / |s|^\alpha + |t|^\beta < 1\}$ , avec  $1 < \alpha \leq \beta$ . Ce convexe est hyperbolique car son bord est quasisymétriquement convexe.

★ **Exemple 5**  $\Omega_5(\alpha, \beta) := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / |s|^\alpha 1_{\{s \geq 0\}} + |s|^\beta 1_{\{s \leq 0\}} + t^2 < 1\}$ , avec  $1 < \alpha < \beta$ . Ce convexe n'est pas hyperbolique car son bord n'est pas quasisymétriquement convexe.

Remarquons que dans cet exemple le bord est  $C^\alpha$  et  $\beta'$ -convexe avec  $\beta' = \max(\beta, 2)$ .

★ **Exemple 6**  $\Omega_6(C, \alpha) := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / |s|^\alpha 1_{\{s \geq 0\}} + C |s|^\alpha 1_{\{s \leq 0\}} + t^2 < 1\}$ , avec  $C > 0$  et  $\alpha > 1$ . Ce convexe est hyperbolique car son bord est quasisymétriquement convexe.

Les trois principales étapes de la démonstration sont les trois propositions ci-dessous.

La première proposition interprète l'hyperbolicité de  $\Omega$  en terme de l'adhérence de l'orbite de  $\Omega$  dans  $X_m$ .

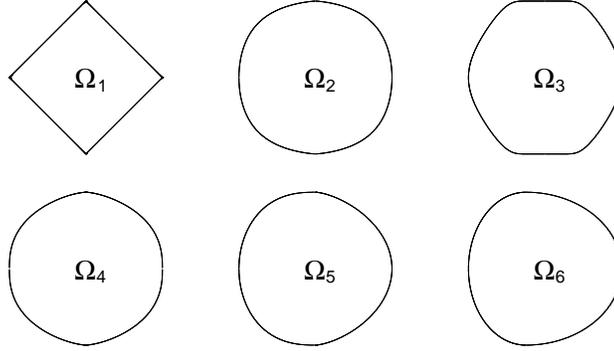


Figure 3: Parmi ces 6 convexes du plan, seuls  $\Omega_4$  et  $\Omega_6$  sont hyperboliques: le voisinage du point le plus bas du bord permet d'expliquer cette différence.

**Proposition 1.6** Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$  et  $G_m := \text{PGL}(\mathbb{R}^{m+1})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $\Omega$  est hyperbolique.
- (ii) Pour tout  $\Omega'$  dans l'adhérence  $\overline{G_m\Omega}$ ,  $\Omega'$  est strictement convexe.
- (iii) Pour tout  $\Omega'$  dans l'adhérence  $\overline{G_m\Omega}$ , le bord  $\partial\Omega'$  est de classe  $C^1$ .

**Corollaire 1.7** a) Tout ouvert strictement convexe et stable de  $\mathbb{P}^m$  est hyperbolique.  
b) Le dual d'un ouvert proprement convexe hyperbolique de  $\mathbb{P}^m$  est aussi hyperbolique.

La deuxième proposition interprète l'hyperbolicité par l'existence d'une borne pour le birapport des quadruplets harmoniques du bord de  $\Omega$ .

**Proposition 1.8** Un ouvert strictement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^m$  dont le bord est de classe  $C^1$  est hyperbolique si et seulement si on a  $\sup_{\xi \in H(\partial\Omega)} \psi_{\partial\Omega}(\xi) < \infty$ .

Pour tout ouvert convexe  $U$  de  $\mathbb{R}^{m-1}$ , toute fonction strictement convexe  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et toute partie  $V$  du graphe  $\mathcal{G}_F$  de  $F$ , on définit de la même façon l'ensemble  $H(V)$  des quadruplets de  $V$  harmoniques sur  $\mathcal{G}_F$  et la fonction  $\psi_V : H(V) \rightarrow ]0, \infty[$  (voir la définition 5.11 pour plus de détail). La troisième proposition affirme que les graphes des fonctions quasisymétriquement convexes peuvent être caractérisés à l'aide d'une propriété analogue à celle de la proposition 1.8.

**Proposition 1.9** Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^{m-1}$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement convexe de classe  $C^1$ . La fonction  $F$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact de  $U$  si et seulement si, pour tout compact  $V$  du graphe  $\mathcal{G}_F$ , on a  $\sup_{\xi \in H(V)} \psi_V(\xi) < \infty$ .

## 1.4 Plan

Nous démontrerons tout d'abord entièrement le théorème 1.4 en dimension 2 car c'est une étape importante pour le cas général. Cet article est structuré par les diverses étapes de

la démonstration du théorème 1.4:

Chapitre 2: La proposition 1.6 et le corollaire 1.7 sont démontrés.

Chapitre 3: La proposition 1.8 est démontrée.

Chapitre 4: Diverses propriétés des fonctions quasisymétriques sont rappelées.

Chapitre 5: La proposition 1.9 est démontrée pour  $m = 2$ .

Chapitre 6: Le théorème 1.4 est démontré pour  $m = 2$ .

Chapitre 7: La proposition 1.9 est démontrée.

Chapitre 8: Le théorème 1.4 et le corollaire 1.5 sont démontrés.

Pour faciliter la lecture de ce texte, nous rappellerons la démonstration des résultats préliminaires que nous utiliserons: ellipsoïde de John, action de  $G_m$  sur  $X_m$ , fonctions quasisymétriques et fonctions Hölder ... à l'exception notable d'une propriété des ensembles semianalytiques (fait 7.5) utilisée uniquement pour montrer le corollaire 1.5.c.

## 2 Convexes adhérents

Le but de ce chapitre est de montrer la proposition 1.6. Nous commençons par quelques rappels sur l'ellipsoïde de John (§2.1). Nous rappelons ensuite les propriétés dues à Benzecri de l'action du groupe projectif  $G_m$  sur l'espace  $X_m$  des ouverts proprement convexes (§2.2 et 2.3). La démonstration de la proposition 1.6 et du corollaire 1.7 est alors donnée au §2.4.

### 2.1 Convexes et ellipsoïdes

Rappelons quelques généralités bien connues sur les convexes.

#### 2.1.1 La dualité dans les ouverts convexes

Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}(V)$ . A chaque point  $x$  de  $\Omega$  on associe un point

$$x^* = \theta_\Omega(x)$$

de  $\Omega^*$  de la façon suivante. On note  $C$  un des deux cônes ouverts proprement convexes de  $V = \mathbb{R}^{m+1}$  dont l'image dans  $\mathbb{P}(V)$  est  $\Omega$ . On note  $C^* := \{f \in V^* / \forall v \in \overline{C} - \{0\}, f(v) > 0\}$  le cône dual de  $C$ . Son image dans  $\mathbb{P}(V)$  est  $\Omega^*$ . Pour tout  $v$  dans  $C$ , on note  $v^*$  l'élément de  $C^*$  donné par

$$v^* = \frac{\int_{C^*} e^{-f(v)} f df}{\int_{C^*} e^{-f(v)} df}.$$

Géométriquement,  $v^*$  est le centre de gravité du convexe  $\{f \in C^* / f(v) = m + 1\}$ . Le point  $x^*$  est la droite engendrée par l'image  $v^*$  d'un générateur  $v$  de  $x$ .

L'application  $x \rightarrow x^*$  est une bijection analytique de  $\Omega$  sur  $\Omega^*$ . En outre l'application  $(\Omega, x) \rightarrow (\Omega^*, x^*)$  est  $G_m$ -équivariante.

**Remarque (La dualité n'est pas une involution)** Lorsque  $\Omega$  est homogène, on a l'égalité  $(x^*)^* = x$  pour tout  $x$  dans  $\Omega$ . Une telle égalité n'est pas vraie en général. En voici un exemple qui répond donc à la question p.23 de [6]. Cet exemple est le carré, c'est-à-dire

$$\Omega := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / \sup(|s|, |t|) < 1\} .$$

Le convexe dual est aussi un carré :  $\Omega^* = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / |s| + |t| < 1\}$ . On peut calculer explicitement la dualité  $\theta_\Omega$  pour  $\Omega$ . Elle est donnée par la formule

$$\theta_\Omega(s, t) = \left( \frac{2s(1-t^2)}{3-s^2-t^2-s^2t^2}, \frac{2t(1-s^2)}{3-s^2-t^2-s^2t^2} \right) .$$

La dualité  $\theta_{\Omega^*}$  pour  $\Omega^*$  est donnée par  $\theta_{\Omega^*} = H^{-1} \circ \theta_\Omega \circ H$  où  $H(s, t) = (s+t, s-t)$ . Il est clair que dans ce cas, on a

$$\theta_{\Omega^*} \circ \theta_\Omega \neq Id_\Omega .$$

Le détail des calculs est laissé au lecteur.

### 2.1.2 L'ellipsoïde de John

Rappelons le fait suivant dû à F.John dont nous aurons besoin à plusieurs reprises. Pour tout ellipsoïde  $E$  d'un espace affine et tout réel  $\lambda > 0$ , on note  $\lambda E$  l'ellipsoïde image de  $E$  par une homothétie de rapport  $\lambda$  centrée au centre de  $E$ .

**Proposition 2.1** ([10]) *Soit  $\Omega$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^m$ .*

- a) *Il existe un unique ellipsoïde de volume maximum  $E_\Omega$  inclus dans  $\Omega$ .*
- b) *On a l'inclusion  $\Omega \subset mE_\Omega$ .*
- c) *L'ellipsoïde  $E_\Omega$  dépend continument de  $\Omega$ .*

**Démonstration** Contentons-nous d'une esquisse de preuve de ce résultat bien connu.

a) L'enveloppe convexe de deux ellipsoïdes  $E_1$  et  $E_2$  distincts de même volume contient un ellipsoïde  $E_3$  de volume plus grand. Pour vérifier cette assertion, on peut supposer que  $E_1$  est une boule euclidienne de rayon 1 centrée en  $x_0$  et que  $E_2$  est centré en  $y_0$  et a des axes principaux de longueur  $a_1, \dots, a_m$  avec  $a_1 \cdots a_m = 1$ . Si  $a_1 = \dots = a_m = 1$ , c'est évident. Sinon, on prend pour  $E_3$  l'ellipsoïde de centre  $(x_0 + y_0)/2$  dont les axes principaux sont parallèles à ceux de  $E_2$  et de longueur  $(1 + a_1)/2, \dots, (1 + a_m)/2$ .

b) On peut supposer que  $E_\Omega$  est la boule euclidienne  $B = B(0, 1)$ . Si  $\Omega$  contenait un point  $x_0$  de norme  $m' > m$ ,  $\Omega$  contiendrait l'enveloppe convexe  $\Omega'$  de  $B$  et  $x_0$ . Mais on peut construire dans  $\Omega'$  un ellipsoïde de volume supérieur à celui de  $B$ .

c) On peut supposer que  $\Omega$  est dans l'intérieur d'un compact de la forme

$$C_R := \{\Omega' \text{ ouvert convexe} / B(0, 1) \subset \Omega' \subset B(0, R)\} .$$

Mais alors, l'ellipsoïde  $E_\Omega$  est inclus dans le compact

$$C'_R := \{\Omega' \text{ ouvert convexe} / \Omega' \subset B(0, R) \text{ et } \text{vol}(\Omega') \geq \text{vol}(B(0, 1))\} .$$

Il suffit donc de montrer que le graphe de l'application  $\Omega \rightarrow E_\Omega$  est fermé. C'est-à-dire que si une suite d'ouverts convexes bornées  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  et si la suite des ellipsoïde  $E_{\Omega_n}$

converge vers un ellipsoïde  $E$ , alors on a  $E = E_\Omega$ . Cela est vrai car  $E$  est par construction un ellipsoïde inclus dans  $\Omega$  et de volume maximum.  $\square$

On utilisera encore dans la section 2.2 le lemme suivant que nous avons implicitement utilisé.

**Lemme 2.2** *Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  dans  $X_m$ . Alors l'ensemble  $\{\Omega \in X_m / \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2\}$  est un compact de  $X_m$ .*

**Démonstration** Cela résulte de la compacité de l'ensemble des fermés d'un espace métrique compact.  $\square$

## 2.2 Action projective sur les corps convexes

Notons  $X_{m,0} = \{(\Omega, x) \in X_m \times \mathbb{P}^m / x \in \Omega\}$ . Le groupe  $G_m = \text{PGL}(\mathbb{R}^{m+1})$  agit naturellement sur  $X_{m,0}$ .

**Proposition 2.3** ([4]) *L'action du groupe  $G_m$  sur  $X_{m,0}$  est propre et cocompacte.*

"Cocompacte" signifie que le quotient  $G_m \backslash X_{m,0}$  est compact.

**Démonstration** Rappelons les grandes lignes de la démonstration de cette proposition (voir aussi [8]). Nous allons construire une application propre et  $G_m$ -équivariante  $\varphi_m$  de  $X_{m,0}$  sur l'espace

$$Q_m := \{ \text{formes quadratiques définies positives de déterminant 1 sur } V \}.$$

Plus précisément, nous allons construire une application propre et  $G_m$ -équivariante  $\psi_m$  de  $X_{m,0}$  sur le produit  $Q_m \times \mathbb{P}(V)$  dont  $\varphi_m$  est la première composante.

Pour construire  $\psi_m$ , on remarque que le produit  $Q_m \times \mathbb{P}(V)$  s'identifie à l'espace

$$Y_{m,0} := \{ (q', x') \text{ où } q' \text{ est une forme quadratique de signature } (1, m) \text{ et de déterminant 1 sur } V \text{ et où } x' \in \mathbb{P}(V) \text{ est une droite de type temps } \}.$$

Cette identification est donnée par  $(q, x) \rightarrow (2f^2 - q, x)$  où  $f \in V^*$  est duale, via  $q$ , à un vecteur  $v$  de  $x$  tel que  $q(v) = 1$ .

On veut donc associer à tout couple  $(\Omega, x) \in X_m \times \mathbb{P}(V)$  un élément  $(q', x') \in Y_{m,0}$ . On prend  $x' = x$ . Notons  $v \in V$  un générateur de  $x$ . Introduisons successivement le cône ouvert convexe  $C$  de  $V$  contenant  $v$  et d'image  $\Omega$  dans  $\mathbb{P}(V)$ , l'hyperplan  $H_v$  de  $V$  noyau de  $v^*$ , l'espace affine  $W_v := v + H_v$ , le convexe borné  $\Omega_v := C \cap W_v$ , son ellipsoïde de John  $E_v$  et la forme quadratique Lorentzienne  $q_v$  de déterminant 1 sur  $V$  telle que  $m.E_v = \{w \in W_v / q_v(w) > 0\}$ . On prend alors  $q' = q_v$ .

Nous avons donc construit une application continue et  $G_m$  équivariante  $\psi_m$  de  $X_{m,0}$  sur  $Q_m \times \mathbb{P}(V)$ . Il reste à montrer que  $\psi_m$  est propre. D'après la proposition 2.1.b et le lemme 2.2, les fibres  $\psi_m^{-1}(q', x')$  sont compactes. Comme l'action de  $G_m$  sur  $Q_m \times \mathbb{P}(V)$  est propre et transitive,  $\psi_m$  est propre et l'action de  $G_m$  sur  $X_{m,0}$  est aussi propre et cocompacte.  $\square$

Le corollaire suivant fournit une classe importante d'ouverts proprement convexes stables. Un ouvert proprement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^m$  est dit *balayable* si le quotient  $\text{Aut}(\Omega)\backslash\Omega$  est compact où  $\text{Aut}(\Omega) := \{g \in G_m / g(\Omega) = \Omega\}$ .

**Corollaire 2.4** ([4]) *Tout ouvert proprement convexe balayable de  $\mathbb{P}^m$  est stable.*

**Démonstration** Soient  $\Omega \in X_m$  un convexe balayable et  $\Omega' \in X_m$  un point limite d'une suite  $g_n\Omega$  d'éléments de l'orbite  $G_m\Omega$ . On veut montrer que  $\Omega'$  est dans cette orbite. Choisissons un point  $x'$  dans  $\Omega'$ . Pour  $n$  grand, le point  $x_n = g_n^{-1}x'$  est dans  $\Omega$ . Comme  $\Omega$  est balayable, quitte à remplacer  $g_n$  par  $g_nh_n$  avec  $h_n$  dans  $\text{Aut}(\Omega)$ , et quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $x_n$  converge vers un point  $x$  de  $\Omega$ . On a donc dans  $X_{m,0}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Omega, x_n) = (\Omega, x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\Omega, x_n) = (\Omega', x').$$

Comme l'action de  $G_m$  sur  $X_{m,0}$  est propre, la suite  $g_n$  est bornée et  $(\Omega, x)$  et  $(\Omega', x')$  sont dans la même  $G_m$ -orbite. C'est ce que l'on voulait.  $\square$

## 2.3 Sections adhérentes

On note  $X_k^m$  l'ensemble des parties proprement convexes de dimension  $k$  de  $\mathbb{P}^m$  qui sont ouverte dans leur support. On munit  $X_k^m$  de la distance de Hausdorff.

**Définition 2.5** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$  et  $k$  un entier avec  $0 \leq k \leq m$ . On appelle  $k$ -section de  $\Omega$  une partie  $\omega \in X_k^m$  de la forme  $\omega = \Omega \cap L$  où  $L$  est un sous-espace projectif de dimension  $k$ .*

La proposition suivante affirme qu'un convexe adhérent à l'orbite d'une section de  $\Omega$  est section d'un convexe adhérent à l'orbite de  $\Omega$ .

**Proposition 2.6 (Sections adhérentes [4])** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$ ,  $\omega$  une  $k$ -section de  $\Omega$  et  $\omega' \in X_k^m$  un convexe adhérent à l'orbite  $G_m\omega$ . Alors, il existe un ouvert proprement convexe  $\Omega'$  adhérent à l'orbite  $G_m\Omega$  et admettant  $\omega'$  comme  $k$ -section.*

**Remarques** - Nous verrons que  $(\Omega', \omega')$  est adhérent à  $(\Omega, \omega)$ .

- Après transformations projectives, on peut supposer que  $\omega$  et  $\omega'$  sont dans  $\mathbb{P}^k$ . L'hypothèse [ $\omega'$  adhérent à  $G_m\omega$ ] équivaut à [ $\omega'$  adhérent à  $G_k\omega$ ]. C'est ce qu'affirme le lemme 2.7.b ci-dessous. Pour l'énoncer, nous aurons besoin de notations supplémentaires. On pose

$$\begin{aligned} X_{m,k} &= \{(\Omega, \omega) \in X_m \times X_k^m / \omega \text{ est une } k\text{-section de } \Omega \} \\ X_{m,k,0} &= \{(\Omega, \omega, x) / (\Omega, \omega) \in X_{m,k} \text{ et } x \in \omega \} \\ X_{k,0}^m &= \{(\omega, x) \in X_k^m \times \mathbb{P}^m / x \in \omega \}. \end{aligned}$$

Le groupe  $G_m$  agit diagonalement sur ces trois espaces.

**Lemme 2.7** a) L'injection  $X_{k,0} \hookrightarrow X_{k,0}^m$  induit un homéomorphisme entre les espaces quotients  $G_k \backslash X_{k,0} \simeq G_m \backslash X_{k,0}^m$ . Ces espaces sont compacts.  
b) De même, l'injection  $X_k \hookrightarrow X_k^m$  induit un homéomorphisme  $G_k \backslash X_k \simeq G_m \backslash X_k^m$ .  
c) L'action de  $G_m$  sur  $X_{m,k,0}$  est propre et cocompacte.

**Remarque** L'action de  $G_m$  sur  $X_{k,0}^m$  n'est pas propre.

**Démonstration du lemme 2.7** a) Notons  $P_k^m \subset G_m$  le stabilisateur de  $\mathbb{P}^k$  et  $K_m \subset G_m$  le groupe orthogonal. L'action de  $P_k^m$  sur  $\mathbb{P}^k$  factorise par celle de  $G_k$ . On a donc l'égalité  $G_k \backslash X_{k,0} = P_k^m \backslash X_{k,0}$ .

On a aussi l'égalité  $G_m = K_m P_k^m$ . Comme le groupe  $K_m$  agit transitivement sur la grassmannienne des  $k$ -plans, l'injection  $X_{k,0} \hookrightarrow X_{k,0}^m$  induit une bijection continue  $P_k^m \backslash X_{k,0} \simeq G_m \backslash X_{k,0}^m$ . Comme  $K_m$  est compact, cette bijection est un homéomorphisme.

b) Même démonstration qu'en a).

c) L'application  $(\Omega, \omega, x) \rightarrow (\Omega, x)$  est une application propre et  $G_m$  équivariante de  $X_{m,k,0}$  dans  $X_{m,0}$ . Comme l'action du groupe  $G_m$  sur  $X_{m,0}$  est propre et cocompacte, il en est de même de son action sur  $X_{m,k,0}$ .  $\square$

**Démonstration de la proposition 2.6** C'est une conséquence du lemme plus précis suivant avec  $\Omega_n = \Omega$  et  $\omega_n = \omega$ .  $\square$

**Lemme 2.8** Soient  $(\Omega_n, \omega_n)$  une suite dans  $X_{m,k}$  et  $h_n$  une suite dans  $G_m$  telle que la limite  $\omega' = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \omega_n$  existe dans  $X_k^m$ . Alors, il existe  $\Omega'$  dans  $X_m$ , une sous-suite  $S$  de  $\mathbb{N}$ , et, pour tout  $n$  dans  $S$ , des éléments  $g_n$  de  $G_m$  qui coïncident avec  $h_n$  sur  $\omega_n$  et tels que on a  $\lim_{n \in S} g_n(\Omega_n, \omega_n) = (\Omega', \omega')$ .

**Démonstration** Le support de  $\omega_n$  converge vers le support de  $\omega'$ . Quitte à multiplier  $h_n$  par des rotations, on peut supposer que  $\omega_n$ ,  $h_n \omega_n$  et  $\omega$  sont inclus dans  $\mathbb{P}^k$ . Choisissons un point  $x'$  dans  $\omega'$  et une suite de points  $x_n$  de  $\omega_n$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n x_n = x'$ . On a donc l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\omega_n, x_n) = (\omega', x'). \quad (1)$$

Comme l'action de  $G_m$  sur  $X_{m,k,0}$  est cocompacte (lemme 2.7.c), on peut trouver une sous-suite  $S$  de  $\mathbb{N}$  et, pour  $n$  dans  $S$ , des éléments  $g_n$  dans  $G_m$  tels que la limite  $(\Omega', \omega'', x'') = \lim_{n \in S} g_n(\Omega_n, \omega_n, x_n)$  existe dans  $X_{m,k,0}$ . En particulier, on a l'égalité

$$\lim_{n \in S} g_n(\omega_n, x_n) = (\omega'', x''). \quad (2)$$

Comme le quotient  $G_m \backslash X_{k,0}^m$  est séparé (lemme 2.7.a), les égalités (1) et (2) prouvent que les points  $(\omega', x')$  et  $(\omega'', x'')$  sont dans la même  $G_k$ -orbite. On peut donc supposer que  $(\omega'', x'') = (\omega', x')$ . Quitte à multiplier  $g_n$  par des rotations, on peut supposer que  $g_n \omega_n$  est aussi dans  $\mathbb{P}^k$ . Les éléments  $h_n$  et  $g_n$  sont dans le stabilisateur  $P_k^m$  de  $\mathbb{P}^k$ . Comme

l'action de  $G_k$  sur  $X_{k,0}$  est propre (proposition 2.3), les égalités (1) et (2) prouvent que la restriction à  $\mathbb{P}^k$  de  $g_n h_n^{-1}$  reste dans un compact de  $G_k$ . Quitte de nouveau à extraire et à multiplier à gauche  $g_n$  par un élément de  $G_k$ , on peut supposer que  $g_n$  et  $h_n$  coïncident sur  $\mathbb{P}^k$ . On a bien

$$\lim_{n \in S} g_n(\Omega_n, \omega_n, x_n) = (\Omega', \omega', x').$$

C'est ce que l'on voulait. □

Le corollaire suivant est aussi dû à Benzecri.

**Corollaire 2.9 (Triangles adhérents [4])** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$ . On suppose que  $\Omega$  n'est pas strictement convexe ou que  $\partial\Omega$  n'est pas de classe  $C^1$ . Alors, il existe un ouvert proprement convexe  $\Omega'$  adhérent à l'orbite  $G_m\Omega$  et qui admet une 2-section triangulaire.*

**Démonstration** On peut trouver une 2-section  $\omega$  de  $\Omega$  qui n'est pas strictement convexe ou dont le bord  $\partial\omega$  n'est pas de classe  $C^1$ . D'après la proposition 2.6, il suffit de montrer que le triangle  $T$  est adhérent à l'orbite  $G_m\omega$ . Autrement dit, on peut supposer que  $m = 2$ .

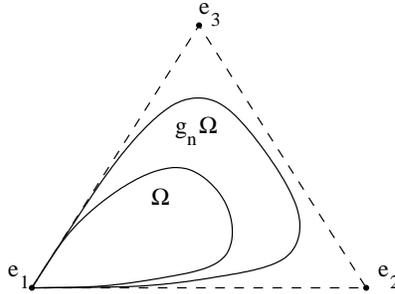


Figure 4: Un triangle dans l'adhérence d'une orbite d'un convexe non  $C^1$

Lorsque  $\partial\omega$  n'est pas  $C^1$ , on choisit un triangle  $T$  dans  $\mathbb{P}^2$  de sommets  $e_1, e_2, e_3$  contenant  $\Omega$  tel que  $e_1$  est dans  $\partial\omega$  et les segments  $[e_1, e_2]$  et  $[e_1, e_3]$  sont tangents en  $e_1$  à  $\partial\omega$  (voir figure 4). On note alors  $g_n$  la transformation diagonale dans cette base  $g_n := \text{diag}(e^{-2n}, e^n, e^n)$ . La suite  $g_n\Omega$  converge vers  $T$ . Ce qui termine le premier cas.

Lorsque  $\Omega$  n'est pas strictement convexe, le bord du convexe dual  $\Omega^*$  n'est pas de classe  $C^1$ . Donc le triangle  $T$  est adhérent à l'orbite de  $\Omega^*$ . Comme  $T$  et  $T^*$  sont dans la même orbite,  $T$  est aussi adhérent à l'orbite de  $\Omega$ . Ce qui termine le deuxième cas. □

**Exemple** Soit  $\Omega = \Omega_5(\alpha, \beta)$ , avec  $2 < \alpha < \beta$ , le convexe du plan introduit dans le §1.3. On peut décrire explicitement l'adhérence de l'orbite  $G_2\Omega$  dans  $X_2$ : c'est une réunion de sept orbites.

## 2.4 Convexes hyperboliques et convexes adhérents

Nous obtiendrons la proposition 1.6 comme le corollaire 2.13 de la proposition plus précise suivante.

Notons  $X_m^\delta$  l'ensemble des ouverts proprement convexes  $\delta$ -hyperboliques de  $\mathbb{P}^m$ .

**Proposition 2.10** a) Pour tout réel  $\delta > 0$ , l'ensemble  $X_m^\delta$  est un fermé  $G_m$ -invariant de  $X_m$  dont tous les éléments sont strictement convexes.

b) Réciproquement, soit  $F$  une partie fermée et  $G_m$ -invariante de  $X_m$  dont tous les éléments sont strictement convexes. Alors, il existe un réel  $\delta > 0$  tel que  $F \subset X_m^\delta$ .

Commençons par le lemme suivant.

**Lemme 2.11** ([3]) Tout ouvert proprement convexe hyperbolique de  $\mathbb{P}^m$  est strictement convexe.

**Démonstration** Recopions, pour pouvoir le réutiliser dans la proposition 2.10, le raisonnement de la proposition 2.5 de [3]. Dans ce raisonnement, les seules géodésiques que nous considérerons sont des segments. Supposons qu'un ouvert proprement convexe  $\Omega$  n'est pas strictement convexe. Le bord  $\partial\Omega$  contient donc un segment maximal  $[x_\infty, y_\infty]$  avec  $x_\infty \neq y_\infty$ . Choisissons un point  $u_\infty$  à l'intérieur de ce segment et un point  $z_\infty$  dans  $\Omega$ . On considère alors quatre suites de points  $u_n, x_n, y_n$  et  $z_n$  de  $\Omega$  qui convergent respectivement vers  $u_\infty, x_\infty, y_\infty$  et  $z_\infty$  et telles que

$$z_n = z_\infty, y_n \in [y_\infty, z_\infty], x_n \in [x_\infty, z_\infty] \text{ et } u_n \in [x_n, y_n]$$

(voir figure 5.A). La distance de  $u_n$  à la réunion  $[x_n, z_n] \cup [z_n, y_n]$  tend vers l'infini avec  $n$ . Donc  $(\Omega, d_\Omega)$  n'est pas hyperbolique.  $\square$

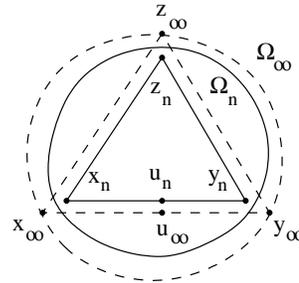
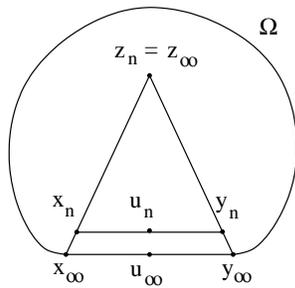


Figure 5: A. Un convexe non hyperbolique

B. Des convexes  $\delta$ -hyperboliques

**Démonstration de la proposition 2.10** a) Soit  $\Omega_n$  une suite d'ouverts proprement convexes et  $\delta$ -hyperboliques qui convergent vers un ouvert proprement convexe  $\Omega$ .

i) Montrons tout d'abord que  $\Omega$  est strictement convexe. Si ce n'est pas le cas, la démonstration du lemme 2.11 permet de trouver un triangle  $x, y, z$  dans  $\Omega$  et un point

$u$  sur le segment  $[x, y]$  tel que  $d_\Omega(u, [x, z] \cup [z, y]) > \delta$ . Pour  $n$  grand, ce triangle est inclus dans  $\Omega_n$  et est un triangle géodésique pour  $d_{\Omega_n}$ . Comme  $\Omega_n$  est  $\delta$ -hyperbolique on a  $d_{\Omega_n}(u, [x, z] \cup [z, y]) \leq \delta$  et donc en passant à la limite  $d_\Omega(u, [x, z] \cup [z, y]) \leq \delta$ . Contradiction.

*ii)* Montrons maintenant que  $\Omega$  est  $\delta$ -hyperbolique. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver un triangle géodésique  $x, y, z$  dans  $\Omega$  et un point  $u$  sur la géodésique  $[x, y]$  tel que  $d_\Omega(u, [x, z] \cup [z, y]) > \delta$ . Comme  $\Omega$  est strictement convexe, les côtés de ce triangle géodésique sont des segments. On peut alors conclure comme en *i*).

b) On reprend les idées de la démonstration de la proposition 2.5 de [3]. Si  $\delta$  n'existait pas, on pourrait trouver une suite  $\Omega_n$  dans  $F$  et des suites  $u_n, x_n, y_n$  et  $z_n$  dans  $\Omega_n$ , avec  $u_n$  sur le segment  $[x_n, y_n]$  et telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\Omega_n}(u_n, [x_n, z_n] \cup [z_n, y_n]) = \infty \quad (3)$$

Comme l'action de  $G_m$  sur  $X_{m,0}$  est cocompacte (proposition 2.3), quitte à remplacer le couple  $(\Omega_n, u_n)$  par son image par un élément  $g_n$  de  $G_m$ , et quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(\Omega_n, u_n)$  converge dans  $X_{m,0}$  vers un élément  $(\Omega_\infty, u_\infty)$ .

Comme  $F$  est fermé,  $\Omega_\infty$  est dans  $F$  et donc  $\Omega_\infty$  est strictement convexe. Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que les suites  $x_n, y_n$  et  $z_n$  convergent vers des points  $x_\infty, y_\infty$  et  $z_\infty$  de  $\overline{\Omega}_\infty$ . Comme les distances  $d_{\Omega_n}(u_n, x_n)$ ,  $d_{\Omega_n}(u_n, y_n)$  et  $d_{\Omega_n}(u_n, z_n)$  tendent vers l'infini, les points  $x_\infty, y_\infty$  et  $z_\infty$  sont sur le bord  $\partial\Omega_\infty$  (voir figure 5.B). Le point  $u_\infty$  est sur le segment ouvert entre  $x_\infty$  et  $y_\infty$ . Si on avait  $x_\infty \neq z_\infty$ , la stricte convexité de  $\Omega_\infty$  entraînerait que

$$d_{\Omega_\infty}(u_\infty, ]x_\infty, z_\infty[) < \infty ,$$

ce qui contredirait la condition (3). On a donc  $x_\infty = z_\infty$  et de la même façon  $z_\infty = y_\infty$ . Contradiction.  $\square$

**Corollaire 2.12** *a) Pour tout réel  $\delta > 0$ , l'ensemble  $X_m^\delta$  est un fermé  $G_m$ -invariant de  $X_m$  dont tous les éléments ont un bord de classe  $C^1$ .*

*b) Réciproquement, soit  $F$  une partie fermée et  $G_m$ -invariante de  $X_m$  dont tous les éléments ont un bord de classe  $C^1$ . Alors, il existe un réel  $\delta > 0$  tel que  $F \subset X_m^\delta$ .*

**Démonstration** En effet, par le corollaire 2.9, les éléments de  $F$  sont tous strictement convexes si et seulement si ils ont tous un bord de classe  $C^1$ .  $\square$

**Remarque** Ceci donne une nouvelle démonstration du résultat de Karlsson et Noskov ([11]): *Tout ouvert proprement convexe hyperbolique de  $\mathbb{P}^m$  a un bord de classe  $C^1$ .*

On en déduit la proposition 1.6 comme corollaire:

**Corollaire 2.13** *Un ouvert proprement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^m$  est hyperbolique si et seulement si tout ouvert proprement convexe adhérent à l'orbite  $G_m\Omega$  est strictement convexe (resp. a un bord de classe  $C^1$ ).*

**Démonstration** Si  $\Omega$  est  $\delta$ -hyperbolique, tous les éléments de l'orbite  $G_m\Omega$  sont aussi  $\delta$ -hyperboliques. Il suffit d'appliquer la proposition 2.10 (resp. le corollaire 2.12) à l'adhérence de cette orbite.  $\square$

Le corollaire 1.7 résulte du corollaire plus précis suivant :

**Corollaire 2.14** a) *Tout ouvert strictement convexe stable de  $\mathbb{P}^m$  est hyperbolique.*  
b)  $\forall \delta > 0, \exists \delta^* > 0, \forall \Omega \in X_m, (\Omega \text{ est } \delta\text{-hyperbolique}) \implies (\Omega^* \text{ est } \delta^*\text{-hyperbolique}).$

**Démonstration** Appliquer la proposition 2.10.b à l'orbite  $G_m\Omega$  qui est fermée.

b) L'application  $\Omega \rightarrow \Omega^*$  est un homéomorphisme de  $X_m$  sur lui même. D'après le corollaire 2.12, l'ensemble  $X_m^\delta$  est un fermé de  $X_m$  dont tous les éléments ont un bord de classe  $C^1$ . Donc, l'ensemble  $F := \{\Omega^* / \Omega \in X_m^\delta\}$  est un fermé  $G_m$ -invariant dont tous les éléments sont strictement convexes. Il existe donc, d'après la proposition 2.10, un réel  $\delta^* > 0$  tel que  $F \subset X_m^{\delta^*}$ . C'est ce que l'on voulait.  $\square$

**Remarque** On retrouve ainsi le théorème 2.5 de [3] : *Tout ouvert strictement convexe balayable de  $\mathbb{P}^m$  est hyperbolique.* En effet, par le corollaire 2.4, un tel ouvert  $\Omega$  est stable.

### 3 Quadruplets harmoniques

Le but de ce chapitre est de montrer la proposition 1.8, c'est-à-dire de caractériser les ouverts proprement convexes hyperboliques à l'aide du birapport des quadruplets harmoniques.

#### 3.1 La constante $\Delta_\Omega$

Rappelons tout d'abord la définition donnée en 1.2.1. Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}^m$  dont le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ .

**Définition 3.1** *Un quadruplet  $(a, b, c, d)$  de points distincts de  $\partial\Omega$  est dit harmonique si*

- les droites  $\langle a, c \rangle$  et  $\langle b, d \rangle$  se coupent en un point  $x$  de  $\Omega$ .
- la droite  $\langle a, c \rangle$  rencontre les deux hyperplans tangents  $b^*$  et  $d^*$  en un même point  $y$ .

*On note  $H(\partial\Omega)$  l'ensemble des quadruplets harmoniques de  $\partial\Omega$ .*

*On note  $\psi_{\partial\Omega} : H(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction donnée par*

$$\psi_{\partial\Omega}(a, b, c, d) = -[x; y; a; c] = \frac{xc}{ax} \frac{ay}{cy} .$$

*On note  $\Delta_\Omega = \sup_{\xi \in H(\partial\Omega)} \psi_{\partial\Omega}(\xi) \in [1, \infty]$ .*

- Remarques** - Dans cette configuration, les six points  $a, b, c, d, x$  et  $y$  sont coplanaires.  
- Si  $(a, b, c, d)$  est harmonique,  $(c, b, a, d)$  aussi et on a  $\psi_{\partial\Omega}(c, b, a, d) = (\psi_{\partial\Omega}(a, b, c, d))^{-1}$ .  
- Lorsqu'un ouvert  $\Omega \in X_m$  n'est pas strictement convexe à bord  $C^1$ , on posera  $\Delta_\Omega = \infty$ .

**Exemple** Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$ . La constante  $\Delta_\Omega$  est égale à 1 si et seulement si  $\Omega$  est un ellipsoïde.

**Remarque** Lorsque  $\Omega$  est un ellipsoïde, le bord  $\partial\omega$  de chaque 2-section  $\omega$  de  $\Omega$  s'identifie naturellement à la droite projective réelle  $\mathbb{P}^1$  et les quadruplets harmoniques de  $\partial\omega$  sont simplement les quadruplets de points de  $\mathbb{P}^1$  qui sont "en division harmonique".

## 3.2 Hyperbolicité et quadruplets harmoniques

La proposition 1.8 est une conséquence de la proposition plus précise suivante.

**Proposition 3.2** Rappelons que  $X_m = \{\text{ouverts proprement convexes de } \mathbb{P}^m\}$ . On a  
a)  $\forall \delta > 0, \exists \Delta \leq 1, \forall \Omega \in X_m, (\Omega \text{ est } \delta\text{-hyperbolique}) \implies (\Delta_\Omega \leq \Delta)$ .  
b)  $\forall \Delta \leq 1, \exists \delta > 0, \forall \Omega \in X_m, (\Delta_\Omega \leq \Delta) \implies (\Omega \text{ est } \delta\text{-hyperbolique})$ .

**Démonstration** Par définition, l'ouvert  $\Omega$  est  $\delta$ -hyperbolique si et seulement si toutes ses 2-sections sont  $\delta$ -hyperboliques. De même, on a la majoration  $\Delta_\Omega \leq \Delta$  si et seulement si toutes les 2-sections  $\omega$  de  $\Omega$  vérifient  $\Delta_\omega \leq \Delta$ . On peut donc supposer  $m = 2$ .

a) Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite  $\Omega_n$  d'ouverts proprement convexes et  $\delta$ -hyperboliques tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{\Omega_n} = \infty$ . On a donc des quadruplets harmoniques  $(a_n, b_n, c_n, d_n)$  de  $\partial\Omega_n$  et des points  $x_n, y_n$  comme dans la définition 3.1 tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n, y_n, a_n, c_n] = -\infty. \quad (4)$$

Le point  $x_n$  est dans  $\Omega_n$ . Comme l'action de  $G_m$  sur  $X_{m,0}$  est cocompact et que le birapport est un invariant projectif, quitte à remplacer nos ouverts  $\Omega_n$  et les divers points  $x_n$  par leurs images par un élément  $g_n$  de  $G_m$ , et, quitte à extraire, on peut supposer que la limite

$$(\Omega_\infty, x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Omega_n, x_n)$$

existe dans  $X_{m,0}$ . Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que les points  $a_n, b_n, c_n, d_n$  et  $y_n$  convergent vers des points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$  et  $y_\infty$  de  $\mathbb{P}^m$ . Les points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty$  et  $d_\infty$  sont sur le bord  $\partial\Omega_\infty$  et le point  $x_\infty$  est sur les segments  $]a_\infty, c_\infty[$  et  $]b_\infty, d_\infty[$ . En particulier, on a  $a_\infty \neq c_\infty$  et  $b_\infty \neq d_\infty$ .

D'après la proposition 2.10, le convexe  $\Omega_\infty$  est  $\delta$ -hyperbolique, strictement convexe et à bord  $C^1$ . On en déduit que la droite projective  $b_n^*$  (resp.  $d_n^*$ ) tangente à  $\partial\Omega_n$  en  $b_n$  (resp.  $d_n$ ) converge pour  $n$  infini vers la droite projective  $b_\infty^*$  (resp.  $d_\infty^*$ ) tangente à  $\partial\Omega_\infty$  en  $b_\infty$  (resp.  $d_\infty$ ). On en déduit que les quatre points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty$  et  $d_\infty$  sont distincts et forment un quadruplet harmonique (voir figure 6.A). Mais alors l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n, y_n, a_n, c_n] = [x_\infty, y_\infty, a_\infty, c_\infty].$$

contredit l'égalité (4).

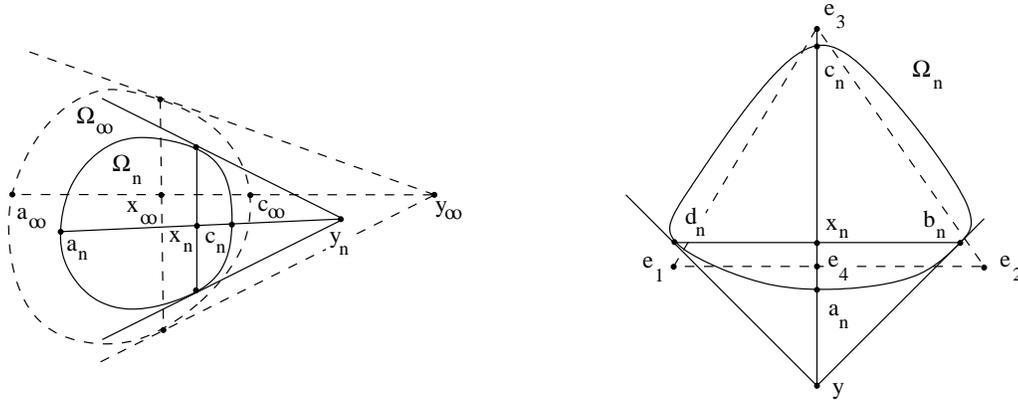


Figure 6: A. Convexe adhérent

B. Triangle adhérent

b) Soit  $E := \{\Omega \in X_m / \Delta_\Omega \leq \Delta\}$ . C'est une partie  $G_m$ -invariante de  $X_m$ . D'après la proposition 2.10.b, il suffit pour conclure de montrer que tout élément de l'adhérence<sup>1</sup> de  $E$  est strictement convexe.

Supposons, par l'absurde, que ce n'est pas le cas. D'après le corollaire 2.9, l'adhérence de  $E$  contient alors un triangle  $T$  dont on note  $e_1, e_2$  et  $e_3$  les sommets. Soit  $\Omega_n$  une suite de  $E$  qui converge vers  $T$ . Pour obtenir une contradiction, nous allons construire un quadruplet harmonique  $(a_n, b_n, c_n, d_n)$  sur  $\partial\Omega_n$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n) = \infty . \quad (5)$$

Pour cela, choisissons un point  $y$  en dehors de  $\overline{T}$  de sorte que la droite  $\langle e_3, y \rangle$  rencontre le segment  $]e_1, e_2[$  en un point  $e_4$ . Pour  $n$  grand, la droite  $\langle e_3, y \rangle$  coupe le bord  $\partial\Omega_n$  en deux points  $a_n$  et  $c_n$ . On note  $b_n$  et  $d_n$  deux points sur le bord  $\partial\Omega_n$  tels que les droites  $\langle b_n, y \rangle$  et  $\langle d_n, y \rangle$  soient tangentes à  $\partial\Omega_n$ . On note enfin  $x_n$  l'intersection des droites  $\langle e_3, y \rangle$  et  $\langle b_n, d_n \rangle$  (voir figure 6.B). Les choix sont faits de sorte que l'on a les égalités

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = e_1 , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e_2 , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e_3 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e_4 .$$

Ce qui prouve l'égalité (5) et donne la contradiction cherchée.  $\square$

## 4 Fonctions quasisymétriques

Ce chapitre est formé de rappels sur les fonctions quasisymétriques: invariance affine, caractère local, stabilité par composition, régularité Hölder et compacité. Nous en déduisons des propriétés analogues pour les primitives des fonctions quasisymétriques qui jouent un rôle central dans cet article.

<sup>1</sup>On peut en fait montrer que cette partie  $E$  est fermée dans  $X_m$ , pour tout  $m \geq 2$ .

## 4.1 Définitions et exemples

La définition suivante est due à Ahlfors et Beurling en 1966.

**Définition 4.1** Soit  $H \geq 1$ . Une fonction continue  $f : I \rightarrow J$  entre deux intervalles de  $\mathbb{R}$  est dite  $H$ -quasisymétrique si, pour tous points  $x - h, x + h$  dans  $I$ , on a

$$|f(x + h) - f(x)| \leq H |f(x) - f(x - h)|. \quad (6)$$

$f$  est dite quasisymétrique si une telle constante  $H$  existe.

$f$  est dite localement quasisymétrique si elle est quasisymétrique au voisinage de tout point de  $I$ .

**Remarques** - Une fonction quasisymétrique  $f$  non constante est injective et est donc croissante ou décroissante. Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on pourra supposer  $f$  croissante.

- En échangeant  $h$  et  $-h$ , on déduit de (6) la minoration

$$|f(x + h) - f(x)| \geq H^{-1} |f(x) - f(x - h)|.$$

- Remarquons qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est  $H$ -quasisymétrique si et seulement si on a les inégalités suivantes, pour tout  $x$  et  $x + h$  dans  $I$  :

$$(1 + H^{-1})|f(x + \frac{h}{2}) - f(x)| \leq |f(x + h) - f(x)| \leq (1 + H)|f(x + \frac{h}{2}) - f(x)|. \quad (7)$$

On en déduit, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$(1 + H^{-1})^n |f(x + \frac{h}{2^n}) - f(x)| \leq |f(x + h) - f(x)| \leq (1 + H)^n |f(x + \frac{h}{2^n}) - f(x)|. \quad (8)$$

**Remarque (Invariance affine)** Soit  $f$  une fonction  $H$ -quasisymétrique, alors, pour tous réels  $A, B, A', B'$ , la fonction  $x \rightarrow Af(A'x + B') + B$  est aussi  $H$ -quasisymétrique.

Cette remarque permet de supposer que  $I = J = [0, 1]$  (ou  $]0, 1[$ ) et de ramener l'étude des fonctions quasisymétriques à l'étude de celles telles que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

Le lemme suivant affirme que toute fonction localement quasisymétrique est quasisymétrique sur tout compact.

### Lemme 4.2 (Fonctions localement quasisymétriques)

Soient  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui est  $H$ -quasisymétrique sur tous les intervalles de longueur  $\varepsilon$ . Alors  $f$  est  $H_1$ -quasisymétrique avec  $H_1 = H^{1/\varepsilon + 1}$ .

Les valeurs des constantes  $H_1, H_2, \dots, H_{13}$  qui interviennent dans ce texte ne sont pas optimales, car seule leur existence nous sera utile.

**Démonstration** En effet, on montre par récurrence sur  $n \geq 1$  que, si on a  $|h| < \varepsilon/2$  et  $x \pm nh \in [0, 1]$ , alors on a  $|f(x + nh) - f(x)| \leq H^n |f(x) - f(x - nh)|$ .  $\square$

Donnons quelques exemples.

★ **Exemple 1** Soient  $0 < A < B$  et  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  une fonction dont la dérivée vérifie  $A \leq f' \leq B$ . Alors  $f$  est  $(\frac{A}{B})$ -quasisymétrique.

★ **Exemple 2** Soient  $N \geq 1$  et  $f \in C^N([0, 1], \mathbb{R})$  une fonction croissante telle que, pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ , au moins une dérivée  $f^{(n)}(x)$ , avec  $1 \leq n \leq N$ , est non nulle. Alors  $f$  est quasisymétrique.

Réciproquement si  $f$  est de classe  $C^\infty$ , et si  $f$  est quasisymétrique, alors pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ , il existe  $n \geq 1$  tel que  $f^{(n)}(x) \neq 0$ .

★ **Exemple 3** Soient  $0 < \alpha \leq \beta$ ,  $C, D > 0$  et  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction donnée par  $f(x) = C|x|^\alpha$  pour  $x \geq 0$  et  $f(x) = -D|x|^\beta$  pour  $x \leq 0$ . Cette fonction  $f$  est quasisymétrique si et seulement si on a  $\alpha = \beta$ .

### Lemme 4.3 (Composée et inverse de fonctions quasisymétriques)

a) La composée  $g \circ f$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  respectivement  $H_f$  et  $H_g$ -quasisymétriques est  $H_2$ -quasisymétrique avec  $H_2 = H_g^{2+\log_2 H_f}$ .

b) L'inverse  $f^{-1}$  d'une fonction  $H$ -quasisymétrique  $f$  est  $H_3$ -quasisymétrique avec  $H_3 = 2H^{1/(\log_2(1+H^{-1}))}$ .

**Démonstration** Introduisons l'entier  $n = \lceil \log_2 H_f \rceil + 1$  de sorte que l'on a, pour  $x \pm h$  dans  $I$ ,

$$2^{-n}|f(x+h) - f(x)| \leq H_f^{-1}|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x) - f(x-h)|.$$

On a alors, d'après (8),

$$\begin{aligned} |g \circ f(x+h) - g \circ f(x)| &\leq (1 + H_g)^n |g(f(x) + 2^{-n}(f(x) - f(x-h))) - g(f(x))| \\ &\leq H_g(1 + H_g)^n |g(f(x)) - g(f(x) - 2^{-n}(f(x) - f(x-h)))| \\ &\leq H_g^{n+1} |g(f(x)) - g(f(x-h))| \end{aligned}$$

b) On veut montrer que pour tous réels  $y = f(x)$ ,  $y+k = f(x+h)$  et  $y-k = f(x-h)$ , on a  $|h| \leq H_3 |h'|$ . Si ce n'est pas le cas, on introduit l'entier  $n = \left\lceil \frac{\log H}{\log(1+H^{-1})} \right\rceil + 1$  de sorte que  $(1+H^{-1})^n > H$  et  $|h| \geq 2^n |h'|$ . Mais alors on aurait, d'après (8),

$$\begin{aligned} |k| \geq |f(x+2^n h') - f(x)| &\geq (1 + H^{-1})^n |f(x+h') - f(x)| \\ &\geq H^{-1}(1 + H^{-1})^n |f(x) - f(x-h')| > |k|. \end{aligned}$$

Contradiction. □

## 4.2 Régularité Hölder et équicontinuité

Le lemme suivant permet de borner toute fonction  $H$ -quasisymétrique à partir d'une borne sur un sous-intervalle. On munit  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ .

**Lemme 4.4** Soient  $0 < \varepsilon < 1$  et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $H$ -quasisymétrique. Alors on a, avec  $H_4 = (1 + H)^{2 - \log_2(\varepsilon)}$ ,

$$\|f\|_\infty \leq H_4 \sup_{[0, \varepsilon]} |f|.$$

**Démonstration** Cela résulte des inégalités (8). □

Le point a) du lemme suivant exprime la régularité Hölder des fonctions  $H$ -quasisymétriques, avec un contrôle uniforme sur la norme Hölder.

**Lemme 4.5 (Régularité Hölder)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $H$ -quasisymétrique. Posons  $\gamma_H = \log_2(1 + H^{-1}) \in ]0, 1[$  et  $\delta_H = \log_2(1 + H) \in ]1, \infty[$ . Alors

a)  $f$  est  $\gamma_H$ -Hölder et on a la majoration

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\gamma_H}} \leq 4 |f(1) - f(0)|.$$

b) On a aussi la minoration

$$\inf_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\delta_H}} \geq (1 + H)^{-3} |f(1) - f(0)|.$$

**Démonstration** Cela résulte aussi des inégalités (8). □

**Remarque** Les constantes  $\gamma_H$  et  $\delta_H$  sont optimales : prendre  $f(x) = |x|^\gamma$  avec  $0 < \gamma < 1$ .

**Corollaire 4.6 (Compacité)** Pour tout  $H \geq 1$ , l'ensemble  $Q_H := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est } H\text{-quasisymétrique et } \|f\|_\infty \leq 1\}$  est compact dans  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Démonstration** En effet, il est fermé et équicontinu par le lemme 4.5.a. Notre assertion résulte alors du théorème d'Ascoli. □

### 4.3 Fonctions convexes à dérivée quasisymétrique

Les fonctions convexes à dérivée quasisymétrique sont tout simplement les primitives des fonctions quasisymétriques croissantes ou constantes. Nous rassemblons dans cette section quelques propriétés élémentaires de ces fonctions

**Remarque (Invariance affine)** Soit  $F$  une fonction à dérivée  $H$ -quasisymétrique, alors, pour tous réels  $A, B, C, A', B'$ , la fonction  $x \rightarrow AF(A'x + B') + Bx + C$  est aussi à dérivée  $H$ -quasisymétrique.

Les constantes dans le lemme suivant ne sont pas optimales (voir [1]).

**Lemme 4.7** Soient  $0 < \varepsilon < 1$  et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $H$ -quasisymétrique telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Alors on a

$$(2(H+1))^{-1} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq 1 - (2(H+1))^{-1}.$$

**Démonstration** Il suffit de démontrer la première inégalité. Celle-ci résulte de la minoration (7) :  $f(\frac{1}{2}) \geq (H+1)^{-1}$ .  $\square$

On munit  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\|F\|_{C^1} := \sup(\|F\|_\infty, \sup(\|F'\|_\infty))$ . Le lemme suivant affirme que, pour contrôler la norme  $C^1$  de  $F$ , il suffit de borner  $F$  en trois points.

**Lemme 4.8 (Contrôle des normes)** Soient  $0 < \varepsilon < 1$  et  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe à dérivée  $H$ -quasisymétrique. Alors on a

- a)  $\|F'\|_\infty \leq H_5 \|F\|_\infty$  avec  $H_5 := 20(H+1)$ .
- b)  $\|F\|_\infty \leq H_6 \sup_{[0, \varepsilon]} |F|$  avec  $H_6 := 20\varepsilon^{-1}(H+1)^{4-\log_2(\varepsilon)}$ .

**Démonstration** a) Comme  $F$  est convexe, on a  $|F'(\frac{1}{2})| \leq 4\|F\|_\infty$ . Introduisons alors la fonction  $x \rightarrow G(x) := F(x) - F(\frac{1}{2}) - (x - \frac{1}{2})F'(\frac{1}{2})$  et sa dérivée  $g := G'$ . D'après le lemme 4.7, on a

$$g(1) \leq 4(H+1) \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t) dt = 4(H+1)G(1) \leq 16(H+1)\|F\|_\infty.$$

De même, on a  $|g(0)| \leq 16(H+1)\|F\|_\infty$ . On en déduit la majoration annoncée.

- b) Soit  $m := \sup_{[0, \varepsilon]} |F|$ . Par le a), on a, avec  $H_4$  comme dans le lemme 4.4,

$$\|F\|_\infty \leq |F(0)| + \|F'\|_\infty \leq m + H_4 \sup_{[0, \varepsilon]} |F'| \leq (1 + H_4 H_5 / \varepsilon) m \leq H_6 m. \quad \square$$

**Lemme 4.9 (Régularité Hölder et  $\beta$ -convexité)** Soit  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe à dérivée  $H$ -quasisymétrique. Posons  $\alpha_H = 1 + \log_2(1 + H^{-1}) \in ]1, 2[$  et  $\beta_H = 1 + \log_2(1 + H) \in ]2, \infty[$ . Alors,

- a)  $F$  est  $\alpha_H$ -Hölder et on a la majoration

$$\sup_{x \neq y} \frac{|F'(x) - F'(y)|}{|x - y|^{\alpha_H - 1}} \leq 160(H+1)\|F\|_\infty.$$

- b)  $F$  est  $\beta_H$ -convexe.

**Démonstration** Cela résulte des lemmes 4.5 et 4.8.  $\square$

**Corollaire 4.10 (Compacité)** Pour tout  $H \geq 1$ , l'ensemble  $P_H := \{F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / F \text{ est convexe à dérivée } H\text{-quasisymétrique et } \|F\|_\infty \leq 1\}$  est compact dans  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Démonstration** En effet, il est fermé et l'ensemble des dérivées est équicontinu par le lemme 4.9. Notre assertion résulte alors du théorème d'Ascoli.  $\square$

## 5 Fonctions quasisymétriquement convexes sur $\mathbb{R}$

Comme le précédent, ce chapitre est entièrement consacré aux fonctions d'une variable réelle. Son but est de montrer la proposition 1.9 pour  $m = 2$ , c'est-à-dire de donner une caractérisation géométrique des graphes  $\mathcal{G}_F$  des fonctions localement quasisymétriquement convexes  $F$  à l'aide des quadruplets harmoniques (proposition 5.14). Cette condition est très semblable à la condition  $\Delta_\Omega < \infty$  de la proposition 3.2.

Nous en déduisons l'invariance projective de ces graphes (corollaire 5.17).

Pour cela, nous donnons deux autres propriétés géométriques de ces graphes appelées "quasisymétrie de la corde" (proposition 5.5) et "intersection des tangentes" (lemme 5.10).

Nous expliquons en quoi ces configurations géométriques sont des cas limites de quadruplets harmoniques (lemmes 5.12 et 5.13).

### 5.1 La dérivée des fonctions quasisymétriquement convexes

Commençons par identifier (localement) les fonctions quasisymétriquement convexes avec les fonctions convexes à dérivée quasisymétrique.

Rappelons tout d'abord la définition 1.2. Soient  $H \geq 1$ ,  $U$  un convexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe de classe  $C^1$ . Pour  $x$  et  $x + h$  dans  $U$ , on note

$$D_x(h) := F(x + h) - F(x) - F'(x).h .$$

**Définition 5.1**  $F$  est dite  $H$ -quasisymétriquement convexe si, pour tous  $x + h$  et  $x - h$  dans  $U$ , on a

$$D_x(h) \leq H D_x(-h) .$$

$F$  est dite quasisymétriquement convexe si un tel réel  $H \geq 1$  existe.

**Remarque (Invariance affine)** Soit  $F$  une fonction  $H$ -quasisymétriquement convexe, alors, pour tous  $A, B, C, A', B'$  avec  $A \in \mathbb{R}, B \in (\mathbb{R}^N)^*, C \in \mathbb{R}, A' \in \text{End}(\mathbb{R}^N), B' \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $x \rightarrow A F(A'x + B') + Bx + C$  est aussi  $H$ -quasisymétriquement convexe.

**Proposition 5.2** Une fonction  $C^1$  convexe  $F : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si sa dérivée  $F'$  est quasisymétrique sur tout compact.

**Démonstration** Cela résulte du lemme plus précis suivant. □

**Lemme 5.3** Soient  $H \geq 1, \varepsilon \in ]0, 1[$  et  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  convexe et  $f = F'$ .  
a) Si  $f$  est  $H$ -quasisymétrique,  $F$  est  $H_7$ -quasisymétriquement convexe avec  $H_7 = 4H^2$ .  
b) Réciproquement, si  $F$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe sur tous les intervalles de longueur  $\varepsilon$ ,  $f$  est  $H_8$ -quasisymétrique sur l'intervalle  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  avec  $H_8 = (4H(H + 1))^{1/\varepsilon + 1}$ .

**Remarques** - Même si  $F$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe sur  $]0, 1[$ , il est indispensable, dans le point b), de réduire l'intervalle pour avoir un contrôle uniforme sur la constante  $H_8$ , à cause de l'exemple suivant : la fonction  $F(x) = -\sqrt{x}$  est quasisymétriquement convexe sur  $]0, 1[$ , mais sa dérivée  $f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$  n'est pas quasisymétrique. - Lorsque  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , nous verrons que la constante  $H_8 := 4H(H + 1)$  convient.

**Démonstration** a) Si  $f$  est constante, c'est clair. Supposons donc  $f$  non constante. On veut majorer, pour  $h \neq 0$ , le quotient  $\frac{D_x(h)}{D_x(-h)}$ . Par invariance affine, on peut remplacer l'intervalle  $[0, 1]$  par  $[-1, 1]$  et supposer que  $x = 0$ ,  $h = -1$  et  $F(0) = f(0) = 0$ . D'après le lemme 4.7, on a la minoration  $F(1) \geq \frac{1}{2(H+1)}f(1) > 0$ . On a aussi la majoration  $F(-1) \leq |f(-1)|$ . On a donc

$$\frac{D_x(h)}{D_x(-h)} = \frac{F(-1)}{F(1)} \leq 2(H+1) \frac{|f(-1)|}{f(1)} \leq 2H(H+1) \leq 4H^2.$$

b) D'après le lemme 4.2, il suffit de montrer que  $f$  est  $(4H(H+1))$ -quasisymétrique sur les sous-intervalles de taille inférieure à  $\varepsilon$  de  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . Il suffit donc de montrer la majoration, pour tout  $h$  dans  $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$  et  $x$  dans  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 4H(H+1) |f(x) - f(x-h)|. \quad (9)$$

On peut supposer  $h > 0$ . Montrons tout d'abord que, pour  $k$  dans  $[0, \varepsilon/4]$  et  $y$  dans  $[\varepsilon/2, 1 - \varepsilon/2]$ , on a :

$$f(y+k) - f(y) \leq 2H(f(y) - f(y-2k)). \quad (10)$$

En effet, on a par convexité :

$$\begin{aligned} (f(y+k) - f(y))k &\leq F(y+2k) - F(y+k) - f(y)k \leq F(y+2k) - F(y) - 2f(y)k \\ &\leq H(F(y-2k) - F(y) + 2f(y)k) \leq 2H(f(y) - f(y-2k))k. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (10) avec  $(y, k) = (x + \frac{h}{2}, \frac{h}{2})$  et  $(x, \frac{h}{2})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &\leq 2H(f(x + \frac{h}{2}) - f(x) + 2(f(x) - f(x-h))) \\ &\leq 4H(H+1)(f(x) - f(x-h)) \end{aligned}$$

C'est bien la majoration (9) cherchée. □

Le corollaire suivant affirme que toute fonction localement quasisymétriquement convexe est quasisymétriquement convexe sur tout compact.

**Corollaire 5.4** *Soient  $H \geq 1$ ,  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui est  $H$ -quasisymétriquement convexe sur les intervalles de longueur  $\varepsilon$ , alors  $F$  est  $H_9$ -quasisymétriquement convexe sur  $[0, 1]$ , avec  $H_9 = (4H(H+1)^2)^{1-\log_2 \varepsilon}$*

**Remarque** Lorsque  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , nous verrons que la constante  $H_9 := 4H(H + 1)^2$  convient.

**Démonstration** Supposons tout d'abord  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . On veut majorer, pour  $h \neq 0$ , le quotient  $\frac{D_x(h)}{D_x(-h)}$ . Par invariance affine, on peut supposer que  $x = \frac{1}{2}$ ,  $h = \frac{1}{2}$ ,  $F(0) = 1$  et  $F(\frac{1}{2}) = F'(\frac{1}{2}) = 0$ . La majoration (9) du lemme 5.3 avec  $x = \frac{1}{2}$  et  $h = \frac{1}{4}$  assure que

$$F'(\frac{3}{4}) \leq 4H(H + 1)|F'(1/4)| \leq 16H(H + 1).$$

En appliquant la  $H$ -quasisymétrie convexité sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ , on obtient alors

$$F(1) \leq \frac{H+1}{4}F'(\frac{3}{4}) \leq 4H(H + 1)^2.$$

Le cas général se déduit du cas précédent, en introduisant l'entier  $n = \lceil -\log_2 \varepsilon \rceil$ .  $\square$

## 5.2 Quasisymétrie de la corde

La configuration géométrique que nous allons étudier dans cette section est un cas limite de quadruplets harmoniques. Elle permet de donner une interprétation géométrique des fonctions quasisymétriquement convexes.

Pour toute fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe de classe  $C^1$ , on note

$$L_F = \sup \left\{ \frac{t_1 - t}{t - t_0} / t_0, t, t_1 \in I, t \neq t_0 \text{ et } F'(t) = \frac{F(t_1) - F(t_0)}{t_1 - t_0} \right\}. \quad (11)$$

**Interprétation** Notons  $a, b, c$  les points du graphe  $\mathcal{G}_F$  d'abscisse  $t_0, t, t_1$  respectivement. Géométriquement, le point  $b$  est le point de  $\mathcal{G}_F$  où la tangente est parallèle à la corde  $[a, c]$  et le rapport  $\frac{t_1 - t}{t - t_0}$  est égal à  $\frac{xc}{ax}$  où  $x$  est le point de la corde  $[a, c]$  ayant même abscisse que  $b$  (voir figure 7.A).

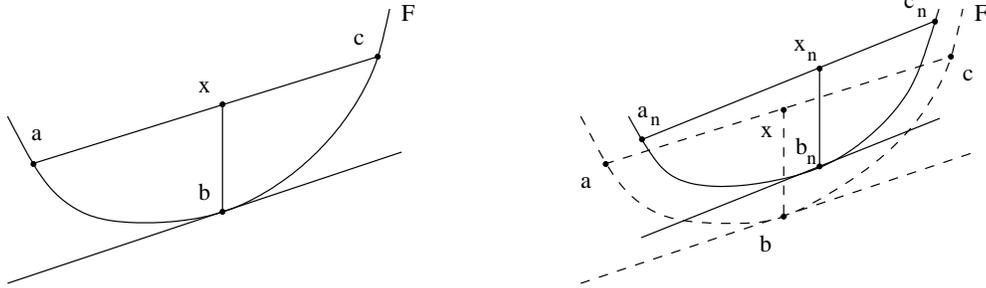


Figure 7: A. Quasisymétrie de la corde

B. Convergence des cordes

**Remarques - (Invariance affine)** Pour tous réels  $A, B, C, A', B'$ , la fonction  $x \rightarrow G(x) := AF(A'x + B') + Bx + C$  vérifie  $L_G = L_F$ .

- On a l'égalité  $L_F = 1$  si et seulement si  $F$  est quadratique.

**Proposition 5.5 (Quasisymétrie de la corde)** Une fonction  $C^1$  strictement convexe  $F : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si sa restriction  $F|_I$  à tout intervalle compact  $I$  de  $]0, 1[$  vérifie  $L_{F|_I} < \infty$ .

**Démonstration** Cela résulte de la proposition 5.2 et du lemme plus précis suivant.  $\square$

**Lemme 5.6** a) Pour tout  $H \geq 1$ , il existe  $L \geq 1$  tel que, pour toute fonction  $C^1$  strictement convexe  $F$  à dérivée  $H$ -quasisymétrique, on a  $L_F \leq L$ .

b) Pour tout  $L \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $H \geq 1$  tel que, pour toute fonction  $C^1$  strictement convexe  $F : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $L_F \leq L$ , la dérivée  $F'$  est  $H$ -quasisymétrique sur l'intervalle  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ .

**Remarques** - Dans a), on peut prendre  $L = 20(H + 1)$ .

- La fonction  $F(x) = -\sqrt{x}$  sur  $]0, 1[$ , prouve aussi que dans b), on ne peut pas prendre  $\varepsilon = 0$ .

**Démonstration du lemme 5.6.a** On veut majorer un rapport  $\frac{t_1-t}{t-t_0}$  de la définition (11). Par invariance affine, on peut supposer que

$$t_0 = 0, t_1 = 1, F(0) = F(1) = 1 \text{ et } F(t) = 0.$$

Comme on a  $F'(t) = 0$ , la fonction  $F$  est positive et on a  $\|F\|_\infty \leq 1$ . Le lemme 4.8 prouve alors que  $\|F'\|_\infty \leq 20(H + 1)$  et donc que  $L^{-1} \leq t \leq 1 - L^{-1}$ . D'où notre assertion.  $\square$

La démonstration du point b) est basée sur le lemme suivant. Munissons les espaces vectoriels  $C^0([0, 1[, \mathbb{R})$  et  $C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$  respectivement des familles de semi-normes  $\sup_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} |F|$

et  $\sup_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} (|F| + |F'|)$ , avec  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , et notons

$$C_L := \{F \in C^1(]0, 1[, [-1, 1]) / F \text{ est affine ou } (F \text{ est strictement convexe et } L_F \leq L) \}.$$

**Lemme 5.7** Pour tout  $L \geq 1$ , l'ensemble  $C_L$  est un compact de  $C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ .

**Remarque** Signalons que  $C_L$  est aussi un compact de  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

On utilisera le lemme général suivant sur les fonctions convexes.

**Lemme 5.8** Soit  $X$  une partie de  $C^1(]0, 1[, [-1, 1])$  formée de fonctions convexes. On suppose que  $X$  est fermée dans  $C^0(]0, 1[, \mathbb{R})$ . Alors  $X$  est un compact de  $C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ .

**Démonstration du lemme 5.8** La condition  $(\forall F \in X, \|F\|_\infty \leq 1)$  assure que  $X$  est équicontinue sur tout compact de  $]0, 1[$  et donc, par Ascoli,  $X$  est compact dans  $C^0(]0, 1[, \mathbb{R})$ . On conclut alors en utilisant le fait bien connu ci-dessous.  $\square$

**Fait 5.9** Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^m$  et  $F_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions  $C^1$  convexes qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction  $F$ . Si  $F$  est aussi de classe  $C^1$ , alors la suite  $F'_n$  des dérivées converge aussi uniformément sur tout compact vers la dérivée  $F'$ .

**Démonstration du lemme 5.7** Il suffit donc de montrer que  $C_L$  est fermé dans  $C^0(]0, 1[, \mathbb{R})$ . Notons donc  $F_n \in C_L$  une suite de fonctions qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction  $F$  et montrons que  $F$  est dans  $C_L$ . La fonction  $F$  est convexe et vérifie  $\|F\|_\infty \leq 1$ . Supposons  $F$  non affine. Nous ne savons pas encore que  $F$  est  $C^1$  et strictement convexe, mais montrons l'assertion suivante.

Pour tout triplet  $(a, b, c)$  de points non alignés du graphe  $\mathcal{G}_F$  tels que la parallèle  $b^*$  à la corde  $[a, c]$  passant par  $b$  est une droite d'appui à  $\mathcal{G}_F$ , alors, en notant  $x$  le point de la corde  $[a, c]$  ayant même abscisse que  $b$ , on a  $\frac{xc}{ax} \leq L$ .  $(\star)$

Pour cela, on choisit des suites de points  $a_n, b_n$  sur le graphe  $\mathcal{G}_{F_n}$  telles que, en notant  $b_n^*$  la tangente à  $\mathcal{G}_{F_n}$  en  $b_n$ , on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^* = b^*.$$

Pour  $n$  grand, la parallèle à la droite  $b_n^*$  issue de  $a_n$  coupe le graphe  $\mathcal{G}_{F_n}$  en un deuxième point  $c_n$ . Notons  $x_n$  le point de la corde  $[a_n, c_n]$  ayant même abscisse que  $b_n$  (voir figure 7.B). Comme  $F_n$  est dans  $C_L$ , on a l'inégalité  $\frac{x_n c_n}{a_n x_n} \leq L$ . En passant à la limite, on obtient l'inégalité cherchée  $\frac{xc}{ax} \leq L$ .

Montrons maintenant que  $F$  est strictement convexe. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver un segment maximal  $]c', c[$  inclus dans le graphe de  $\mathcal{G}_F$  tel que  $c'$  n'est pas une extrémité du graphe. Choisissons un point  $a$  sur  $\mathcal{G}_F$  hors de ce segment et très proche de  $c'$  (voir figure 8.A). Tout point  $b$  du graphe ayant une droite d'appui parallèle à la corde  $[a, c]$  est entre  $a$  et  $c'$ . Ce qui contredit l'assertion  $(\star)$ .

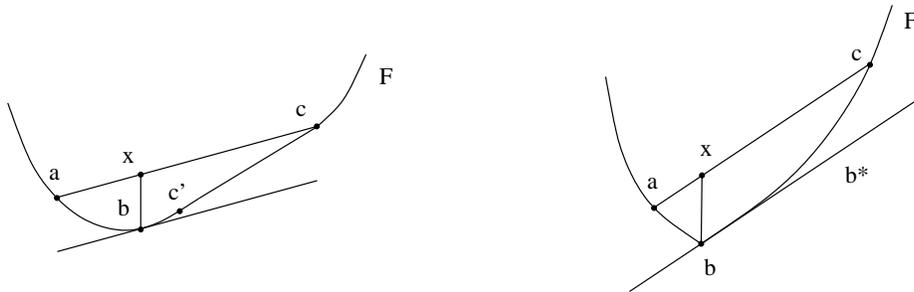


Figure 8: A. Un bord non strictement convexe

B. Un bord non  $C^1$

Montrons enfin que  $F$  est de classe  $C^1$ . Si ce n'est pas le cas, on peut trouver un point  $b$  de  $\mathcal{G}_F$  et une droite  $b^*$  tangente à droite en  $b$  à  $\mathcal{G}_F$  mais pas tangente à gauche. Choisissons un point  $a$  sur  $\mathcal{G}_F$  à gauche de  $b$  et très proche de  $b$ . La parallèle à la droite  $b^*$  issue de  $a$

coupe  $\mathcal{G}_F$  en un deuxième point  $c$  (voir figure 8.B). Lorsque  $a$  tend vers  $b$ , le rapport  $\frac{xc}{ax}$  tend vers l'infini, ce qui contredit l'assertion  $(\star)$ .

L'assertion  $(\star)$  signifie maintenant que  $L_F \leq L$  et prouve que  $F$  est dans  $C_L$ .  $\square$

**Démonstration du lemme 5.6.b** Remarquons tout d'abord que la condition  $L_F \leq L$  assure que  $F$  est bornée. Vérifions le par exemple au voisinage de 0. Fixons  $t_0$  dans  $]0, 1[$ . Pour tout  $t \leq t_0/2$ , on a  $\frac{F(t_0)-F(t)}{t_0-t} \geq F'(\frac{t_0}{L+1})$  et donc  $F(t) \leq F(t_0) + \frac{2}{t_0} F'(\frac{t_0}{L+1}) t$ .

On peut donc supposer que nos fonctions  $F$  sont dans le compact  $C_L$  du lemme 5.7.

Supposons par l'absurde que ce lemme est inexact. Il existe donc  $L \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0$ , des réels  $\varepsilon \leq x_n - h_n < x_n + h_n \leq 1 - \varepsilon$  et des fonctions  $F_n \in C_L$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'_n(x_n + h_n) - F'_n(x_n)}{F'_n(x_n) - F'_n(x_n - h_n)} = \infty. \quad (12)$$

A l'aide de l'invariance affine, on peut supposer que

$$x_n = \frac{1}{2}, \quad h_n = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad F_n(0) = F_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad F_n(\frac{1}{2}) = 0.$$

Par compacité de  $C_L$ , on peut supposer que la suite  $F_n$  converge vers une fonction  $F \in C_L$  en norme  $C^1$  sur l'intervalle  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . On a donc  $F(0) = F(1) = 1$ ,  $F(\frac{1}{2}) = 0$  et  $F$  n'est pas affine. On a alors, comme  $F$  est strictement convexe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'_n(x_n + h_n) - F'_n(x_n)}{F'_n(x_n) - F'_n(x_n - h_n)} = \frac{F'(1 - \varepsilon) - F'(\frac{1}{2})}{F'(\frac{1}{2}) - F'(\varepsilon)}.$$

Ce qui contredit (12).  $\square$

### 5.3 Intersection des tangentes

La configuration géométrique que nous allons étudier dans cette section est un autre cas limite de quadruplets harmoniques.

Pour toute fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe de classe  $C^1$ , on note

$$L'_F = \sup \left\{ \max \left( \frac{xc}{cy}, \frac{cy}{xc} \right) \right\}.$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des points  $y$ ,  $c$  et  $x$  de même abscisse construits de la façon suivante: on part de deux points  $b$  et  $d$  sur le graphe  $\mathcal{G}_F$ , le point  $y$  est à l'intersection des tangentes à  $\mathcal{G}_F$  en  $b$  et  $d$ ,  $c$  est sur le graphe  $\mathcal{G}_F$  et  $x$  est sur la corde  $[b, d]$  (voir figure 9).

**Remarque** On a encore une invariance affine: pour tous réels  $A, B, C, A', B'$ , la fonction  $x \rightarrow G(x) := AF(A'x + B') + Bx + C$  vérifie  $L'_G = L'_F$ .

**Lemme 5.10** *Pour tout  $H \geq 1$ , il existe  $L' \geq 1$  tel que, pour toute fonction  $C^1$  convexe  $F$  non affine et à dérivée  $H$ -quasisymétrique, on a  $L'_F \leq L'$*

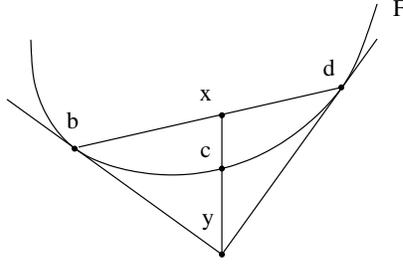


Figure 9: Intersection des tangentes

**Démonstration** Notons  $t_0$ ,  $t$  et  $t_1$  l'abscisse des points  $b$ ,  $c$ ,  $d$  de la définition (11). Par invariance affine, on peut supposer que

$$t_0 = 0, t_1 = 1, F(0) = f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

D'après le corollaire 4.10, l'ensemble  $P_H^0 := \{F \in P_H / F(0) = F'(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1\}$  est un compact de  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ . On veut donc montrer qu'il existe  $L' > 1$  tel que, pour tout  $F$  dans  $P_H^0$ , on a  $1/L' \leq \frac{tF(1)}{F(t)} - 1 \leq L'$  où  $t := 1 - F'(1)$ . L'existence de  $L'$  est une conséquence de la compacité de  $P_H^0$ .  $\square$

**Remarques** - On peut montrer que  $L' = (H + 1)^{1 + \log_2(H+1)}$  convient.

- Il n'existe pas de réciproque au lemme 5.10 analogue au lemme 5.6.b. En effet, les fonctions  $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto e^{-nt}$  vérifient  $\sup_{n \geq 1} L'_{F_n} < \infty$ . Mais, pour  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , on ne peut pas trouver de constante  $H$  telle que toutes les fonctions dérivées  $F'_n$  soient  $H$ -quasisymétriques sur l'intervalle  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ .

## 5.4 Quadruplets harmoniques d'un graphe

Pour la dernière caractérisation géométrique du graphe des fonctions quasisymétriquement convexes, nous aurons besoin des quadruplets harmoniques.

Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ . Pour toute fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe de classe  $C^1$ , on note  $\mathcal{G}_F$  son graphe et, pour tout point  $a$  sur  $\mathcal{G}_F$ , on note  $a^*$  l'hyperplan tangent à  $\mathcal{G}_F$  en  $a$ . La définition suivante est analogue à la définition 3.1.

**Définition 5.11** Un quadruplet  $(a, b, c, d)$  de points distincts de  $\mathcal{G}_F$  est dit harmonique si

- les droites  $\langle a, c \rangle$  et  $\langle b, d \rangle$  se coupent en un point  $x$  au dessus de  $\mathcal{G}_F$ .

- la droite  $\langle a, c \rangle$  rencontre  $b^*$  et  $d^*$  en un même point  $y$ .

Pour toute partie  $V$  de  $\mathcal{G}_F$ , on note  $H(V)$  l'ensemble des quadruplets harmoniques de  $V^4$ .

On note  $\psi_V : H(V) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction donnée par

$$\psi_V(a, b, c, d) = -[x; y; a; c] = \frac{xc}{ax} \frac{ay}{cy}.$$

On note  $\Delta_V = \sup_{\xi \in H(V)} \psi_V(\xi) \in [1, \infty]$ ,  $\psi_F := \psi_{\mathcal{G}_F}$  et  $\Delta_F := \Delta_{\mathcal{G}_F}$ .

**Remarque** On a encore une invariance affine: pour tous  $A, B, C, A', B'$  avec  $A \in \mathbb{R}, B \in (\mathbb{R}^N)^*, C \in \mathbb{R}, A' \in \text{End}(\mathbb{R}^N), B' \in \mathbb{R}^N$ , la fonction,  $x \rightarrow G(x) := AF(A'x+B') + Bx + C$  vérifie  $\Delta_G = \Delta_F$ .

Nous aurons besoin de deux lemmes techniques dont les énoncés sont très semblables. Le premier de ces lemmes étudie la dégénérescence des quadruplets harmoniques vers la configuration “quasisymétrie de la corde”.

**Lemme 5.12 (Quadruplets harmoniques et quasisymétrie de la corde)**

Soient  $\mathcal{G}_n \subset \mathbb{R}^2$  une suite de courbes strictement convexes et  $C^1$  qui converge vers une courbe  $\mathcal{G}_\infty$  strictement convexe et  $C^1$ . Soient  $a_n, b_n \in \mathcal{G}_n$  deux suites de points qui convergent vers un même point  $a_\infty = b_\infty$  à l'intérieur de la courbe  $\mathcal{G}_\infty$ .

On choisit une suite de points  $y_n \in b_n^*$  qui converge vers un point  $y_\infty \neq b_\infty$  et une suite de droites  $\Delta_n$  contenant  $b_n$  qui converge vers une droite  $\Delta_\infty \neq b_\infty^*$ . Ceci permet de construire, au moins pour  $n$  grand, des points

$$x_n := \Delta_n \cap \langle a_n, y_n \rangle \quad \text{et} \quad c_n := \mathcal{G}_n \cap \langle a_n, y_n \rangle - \{a_n\}.$$

Alors, si  $y'_n, \Delta'_n$  est un autre choix donnant des points  $x'_n$  et  $c'_n$  (voir figure 10.A), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x'_n; y'_n; a_n; c'_n]}{[x_n; y_n; a_n; c_n]} = 1.$$

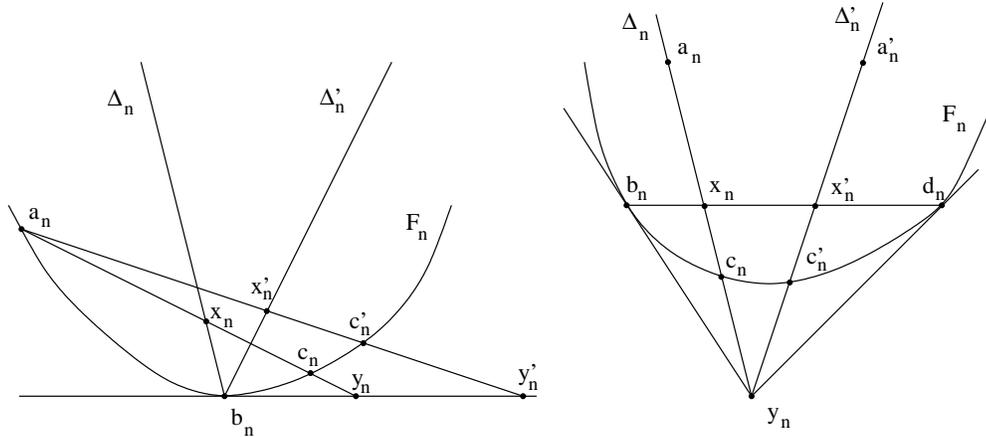


Figure 10: A.  $a_\infty = b_\infty = c_\infty \neq y_\infty$  B.  $a_\infty \neq b_\infty = c_\infty = d_\infty$   
Dégénérescence des quadruplets harmoniques vers une configuration  
“quasisymétrie de la corde” en A et “intersection des tangentes” en B.

**Remarque** Si on prend le point  $y_n$  à l’infini et la droite  $\Delta_n$  verticale, on obtient la configuration “quasisymétrie de la corde” et le birapport correspondant vaut  $\frac{x_n c_n}{a_n x_n}$ .

**Démonstration** On peut supposer que la droite  $b_n^*$  est l’axe horizontal  $Ox$ , que la droite  $\Delta_n$  est l’axe vertical  $Oy$ , que  $\mathcal{G}_n$  est le graphe d’une fonction  $F_n$  strictement convexe

de classe  $C^1$  et que la suite  $F_n$  converge en norme  $C^1$  vers une fonction  $F_\infty$  strictement convexe de classe  $C^1$ . On a donc  $b_n = O$  et on note par une majuscule  $A_n, C_n, \dots$  les projections verticales sur  $Ox$  des points  $a_n, c_n, \dots$

On peut supposer  $C_n$  entre  $O$  et  $C'_n$ . Par convexité, on a la minoration

$$\frac{OC_n}{OC'_n} \geq \frac{C_n c_n}{C'_n c'_n}.$$

Comme les suites  $X_n x_n, X'_n x'_n, C_n c_n, C'_n c'_n$  et  $A_n a_n$  sont équivalentes et sont infiniment petites devant les suites  $A_n O, OC_n$  et  $OC'_n$ , on a les égalités

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x_n}{a_n x'_n} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n c_n}{x'_n c'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n C_n}{X'_n C'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OC_n}{OC'_n} = 1.$$

On a aussi les égalités

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n y_n}{c_n y_n} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n y'_n}{c'_n y'_n} = 1.$$

Notre assertion s'en déduit.  $\square$

Le deuxième lemme technique étudie la dégénérescence des quadruplets harmoniques vers la configuration "intersection des tangentes".

**Lemme 5.13 (Quadruplets harmoniques et intersection des tangentes)**

Soient  $\mathcal{G}_n \subset \mathbb{R}^2$  une suite de courbes strictement convexes et  $C^1$  qui converge vers une courbe  $\mathcal{G}_\infty$  strictement convexe et  $C^1$ . Soient  $b_n, d_n \in \mathcal{G}_n$  deux suites de points qui convergent vers un même point  $b_\infty = d_\infty$  à l'intérieur de la courbe  $\mathcal{G}_\infty$ . On note  $y_n := b_n^* \cap d_n^*$ .

On choisit une suite de droites  $\Delta_n$  contenant  $y_n$  qui converge vers une droite  $\Delta_\infty \neq b_\infty^*$  et une suite de points  $a_n$  dans  $\Delta_n$  qui converge vers un point  $a_\infty \neq b_\infty$ . Ceci permet de construire, au moins pour  $n$  grand, des points

$$x_n := [b_n, d_n] \cap \Delta_n \text{ et } c_n := \mathcal{G}_n \cap [x_n, y_n].$$

Alors, si  $\Delta'_n, a'_n$  est un autre choix donnant des points  $x'_n$  et  $c'_n$  (voir figure 10.B), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[x'_n; y_n; a'_n; c'_n]}{[x_n; y_n; a_n; c_n]} = 1.$$

**Remarque** Si on choisit le point  $a_n$  à l'infini et la droite  $\Delta_n$  verticale, on obtient la configuration "intersection des tangentes" et le birapport correspondant vaut  $\frac{x_n c_n}{c_n y_n}$ .

**Démonstration** On peut supposer que  $a_n$  et  $a'_n$  sont à l'infini, que la droite  $c_n^*$  est l'axe horizontal  $Ox$  et que la droite  $\Delta_n$  est l'axe vertical  $Oy$ . Les droites  $\langle x_n, x'_n \rangle$  et  $\langle c_n, c'_n \rangle$  convergent vers l'axe  $Ox$  et se coupent en un point  $z_n$  tel que les suites  $x_n x'_n$  et  $c_n c'_n$  sont infiniment petites devant les suites  $x_n z_n$  et  $c_n z_n$ . On en déduit que les suites

$$\frac{x_n c_n}{x'_n c'_n} \text{ et } \frac{c_n y_n}{c'_n y'_n}$$

convergent vers une même limite. Notre assertion s'en déduit.  $\square$

## 5.5 Invariance Projective

La dernière caractérisation géométrique du graphe des fonctions quasi-symétriquement convexes (proposition 5.14) est la plus importante car elle permet de montrer l'invariance projective de ces graphes.

**Proposition 5.14** *Une fonction  $C^1$  strictement convexe  $F : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact de  $]0, 1[$  si et seulement si, pour tout compact  $V$  du graphe  $\mathcal{G}_F$ , on a  $\Delta_V < \infty$ .*

**Remarques** - Il n'est pas possible d'obtenir un contrôle uniforme comme dans le lemme 5.6.b avec  $\Delta_F$  à la place de  $L_F$ . En voici un exemple. Les fonctions  $F_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  données par  $F_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$  vérifient  $\Delta_{F_n} = 1$  car leurs graphes sont des quadriques (exemple de la section 3.1). D'autre part, la suite  $F_n$  converge uniformément vers la fonction  $x \mapsto |x|$  qui n'est pas de classe  $C^1$ . Notons  $H_n$  des constantes telles que  $F_n$  est  $H_n$ -quasimétriquement convexe sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Par le lemme 5.3 et le corollaire 4.10, on a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$ .

Néanmoins, on a la proposition suivante qui remplace en partie cette absence de contrôle uniforme.

**Proposition 5.15 (Borne sur les birapports)** *Soient  $U := ]0, 1[$ ,  $\mathcal{E}$  un compact de  $C^1(U, \mathbb{R})$  formé de fonctions strictement convexes. Alors, on a l'équivalence:  
 $\forall K$  compact de  $U$ ,  $\exists H \geq 1 / \forall F \in \mathcal{E}$ ,  $F|_K$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe  
 $\iff \forall K$  compact de  $U$ , on a  $\sup_{F \in \mathcal{E}} \Delta_{F|_K} < \infty$ .*

**Remarques** - La constante  $\Delta_{F|_K}$  est introduite dans la définition 5.11.

- Nous généraliserons cet énoncé à tout ouvert convexe  $U$  de  $\mathbb{R}^N$  dans le §7.6.

- L'hypothèse de stricte convexité est indispensable pour l'implication réciproque. En voici un exemple qui est une simple modification des exemples de la remarque précédente: prendre pour  $\mathcal{E}$  la suite  $F_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{n}\sqrt{x^2 + n^{-2}}$  avec sa limite  $F_\infty = 0$ .

L'implication directe résulte du lemme suivant.

**Lemme 5.16** *Pour tout  $H \geq 1$ , il existe  $\Delta \geq 1$  tel que, pour toute fonction  $C^1$  convexe  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  non affine et à dérivée  $H$ -quasisymétrique, on a  $\Delta_F \leq \Delta$*

**Démonstration** Supposons par l'absurde qu'il existe une suite  $F_n$  de fonctions convexes à dérivée  $H$ -quasisymétrique et une suite  $(a_n, b_n, c_n, d_n) \in H(\mathcal{G}_{F_n})$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n) = 0 \text{ ou } \infty. \quad (13)$$

On peut supposer, grâce à la remarque de la définition 3.1, que les abscisses  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$  de ces quatre points sont rangés par ordre croissant:  $A_n \leq B_n \leq C_n \leq D_n$ . Par invariance affine et par compacité (corollaire 4.10), on peut supposer que

$$A_n = 0, \quad D_n = 1, \quad F_n(0) = F_n'(0) = 0 \text{ et } F_n'(1) = 1,$$

que la suite  $F_n$  converge dans  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$  vers une fonction  $F$  qui est  $H$ -quasisymétriquement convexe et non affine, et que les suites  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  et  $d_n$  convergent vers des points limites  $a_\infty$ ,  $b_\infty$ ,  $c_\infty$  et  $d_\infty$ . On est alors dans l'un des trois cas suivants. Pour chacun de ces cas, on va montrer que la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  reste dans un compact de  $]0, \infty[$ , ce qui fournira une contradiction avec (13).

**1<sup>er</sup> cas :** *Les quatre points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$  sont distincts.*

Le quadruplet  $(a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty)$  est harmonique sur  $\mathcal{G}_{F_\infty}$  et la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  converge vers  $\psi_{F_\infty}(a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty)$  Contradiction.

**2<sup>ème</sup> cas :**  $a_\infty = b_\infty = c_\infty \neq d_\infty$ .

Considérons alors le point  $b'_n$  où la tangente à  $\mathcal{G}_{F_n}$  est parallèle à la corde  $[a_n, c_n]$  et le point  $x'_n$  de cette corde ayant même abscisse que  $b'_n$ . Le lemme 5.6.a prouve alors que la suite  $\frac{a_n x'_n}{x'_n c_n}$  est bornée. D'après le lemme 5.12, la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est aussi bornée. Contradiction.

**3<sup>ème</sup> cas :**  $b_\infty = c_\infty = d_\infty \neq a_\infty$ .

Considérons alors le point  $y_n = b_n^* \cap d_n^*$  et les points  $c'_n$  sur  $\mathcal{G}_{F_n}$  et  $x'_n$  sur  $[b_n, d_n]$  ayant même abscisse que  $y_n$ . Le lemme 5.10 prouve alors que la suite  $\frac{x'_n c_n}{y_n x'_n}$  est bornée. D'après le lemme 5.13, la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est aussi bornée. Contradiction.  $\square$

**Démonstration de la proposition 5.14** Il reste à montrer l'implication réciproque. La démonstration ci-dessous s'adaptera sans changement à un ouvert convexe  $U$  de  $\mathbb{R}^N$ .  $\Leftarrow$  Supposons par l'absurde que, pour un compact  $K$ , la constante  $H$  n'existe pas, mais que l'on a  $\sup_{F \in \mathcal{E}} \Delta_{F|_{K'}} < \infty$  pour un voisinage compact  $K'$  de  $K$ . D'après les lemmes 5.3.b et 5.6.b, on peut trouver une suite convergente  $F_n$  dans  $\mathcal{E}$  et des points alignés  $A_n, B_n, C_n$  dans  $K$  tels que, en notant  $a_n, b_n, c_n$  les points sur le graphe  $\mathcal{G}_{F_n}$  au dessus de  $A_n, B_n, C_n$  et en notant  $x_n$  le point de la corde  $[a_n, c_n]$  au dessus de  $X_n := B_n$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n c_n}{a_n x_n} = \infty. \quad (14)$$

On peut supposer que les suites  $a_n, b_n, c_n$  convergent. Par stricte convexité de la fonction limite  $F_\infty$ , ces trois suites convergent alors vers un même point  $a_\infty = b_\infty = c_\infty$  du graphe limite  $\mathcal{G}_{F_\infty}$ .

On peut construire un quadruplet harmonique  $(a_n, b_n, c'_n, d'_n)$  sur  $\mathcal{G}_{F_n}$  de sorte que la suite de points  $d'_n$  converge vers un point  $d'_\infty \neq b_\infty$ . Le lemme 5.12 et l'égalité (14) prouvent alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{F_n}(a_n, b_n, c'_n, d'_n) = \infty.$$

Ce qui contredit l'inégalité  $\sup_{n \geq 1} \Delta_{F_n|_K} < \infty$ .  $\square$

**Corollaire 5.17 (Invariance projective)** *Soit  $F : ]t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G : ]t'_0, t'_1[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions  $C^1$  strictement convexes. On suppose qu'il existe une transformation projective  $\Phi$  de  $\mathbb{P}^2$  qui envoie le graphe de  $F$  sur celui de  $G$ . Alors,  $F$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si  $G$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact.*

**Démonstration** Cela résulte de la proposition 5.14 et de l'invariance par transformation projective des quadruplets harmoniques et de leur birapport.  $\square$

## 6 Convexes hyperboliques du plan

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats des parties précédentes pour démontrer le théorème 1.4 lorsque  $m = 2$ , c'est-à-dire l'équivalence entre l'hyperbolicité et la quasisymétrique convexité pour les ouverts convexes du plan.

Pour pouvoir utiliser cette équivalence en dimension supérieure, nous en démontrons une version qui relie la constante  $\delta$  d'hyperbolicité et la constante  $H$  de quasisymétrique convexité (proposition 6.6).

### 6.1 Ouverts quasisymétriquement convexes du plan

Commençons par définir une constante  $H_\Omega$  qui mesure la quasisymétrique convexité d'un ouvert convexe  $\Omega$ .

Rappelons auparavant la définition 1.3.

**Définition 6.1** *Un ouvert proprement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}^m$  est dit quasisymétriquement convexe si le bord  $\partial\Omega$  est une réunion d'ouverts  $\mathcal{G}_i$ , qui coïncident avec des graphes d'applications  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  quasisymétriquement convexes où  $U_i$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^{m-1}$ , dans un système de coordonnées projectives convenable.*

Autrement dit, si  $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$  est la base de  $\mathbb{R}^{m+1}$  correspondante, on a dans cette base,  $\mathcal{G}_i = \{[x_1, \dots, x_{m-1}, F_i(x_1, \dots, x_{m-1}), 1] / (x_1, \dots, x_{m-1}) \in U\}$ .

**Remarque** Un ouvert quasisymétriquement convexe est strictement convexe et a un bord  $C^1$ .

Le lemme suivant affirme que, dans la définition 1.3, le choix du recouvrement ouvert et des systèmes de coordonnées projectives importe peu. Les arguments dont nous disposons pour le moment ne nous permettent de le montrer que pour  $m = 2$ . Le cas général sera démontré au §8.1.

**Lemme 6.2** ( $m=2$ ) *Soit  $\Omega$  un ouvert quasisymétriquement convexe de  $\mathbb{P}^2$ . Alors, chaque fois que, dans un système de coordonnées projectives, un ouvert de  $\partial\Omega$  est le graphe d'une fonction convexe  $F$ , cette fonction  $F$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact.*

**Démonstration** Cela résulte des corollaires 5.4 et 5.17. □

Comme  $\Omega$  est proprement convexe, on peut choisir notre système de coordonnées projectives de sorte que  $\Omega$  soit un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^m$ . La définition suivante permet alors de mesurer la quasisymétrie convexe de  $\Omega$ .

Pour chaque système de coordonnées affines  $(x_1, \dots, x_{m-1}, t)$  de  $\mathbb{R}^m$ , on peut écrire

$$\Omega = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} / x \in U, F(x) < t < G(x) \}$$

où  $U$  est un ouvert convexe et où  $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions telles que  $F < G$ . Le graphe  $\mathcal{G}_F$  s'appelle alors *le bord inférieur* de  $\partial\Omega$  (voir figure 11). Pour  $\tau \in ]0, 1[$ , on note  $U^\tau$  l'image de  $U$  par l'homothétie de rapport  $\tau$  centrée au centre de gravité de  $U$ .

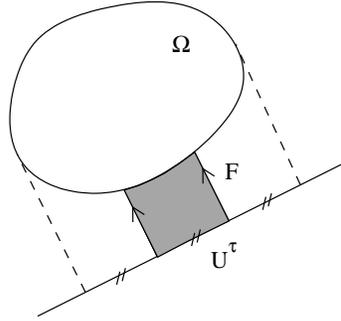


Figure 11: Un ouvert  $H$ -quasisymétriquement convexe

**Définition 6.3** Soit  $\tau \in ]0, 1[$  et  $H \geq 1$ . Un ouvert convexe borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$  est dit  $(H, \tau)$ -quasisymétriquement convexe si, pour tout système de coordonnées affines, la fonction  $F$  ci-dessus restreinte à l'ouvert  $U^\tau$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe.

$\Omega$  est dit  $H$ -quasisymétriquement convexe si il est  $(H, \frac{1}{3})$ -quasisymétriquement convexe. On note  $H_\Omega := \inf\{H / \Omega \text{ est } H\text{-quasisymétriquement convexe}\} \in [1, \infty]$ .

**Remarques** - Par convention,  $\inf \emptyset = \infty$ .

- Par construction, la constante  $H_\Omega$  est un invariant affine de  $\Omega$ . Par contre,  $H_\Omega$  n'est pas un invariant projectif.

Par définition, un ouvert  $H$ -quasisymétriquement convexe est quasisymétriquement convexe. Le lemme suivant est une réciproque pour  $m = 2$  qui sera généralisée en dimension supérieure au §8.1.

**Lemme 6.4** ( $m = 2$ ) Pour tout  $\tau \in ]0, 1[$  et tout ouvert quasisymétriquement convexe et borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe  $H \geq 1$  tel que  $\Omega$  est  $(H, \tau)$ -quasisymétriquement convexe. En particulier, on a  $H_\Omega < \infty$ .

**Démonstration** On remarque tout d'abord que, par invariance affine, la meilleure constante  $H$  de quasisymétrie convexe pour la restriction de la fonction  $F$  à  $U^\tau$  ne dépend que de la direction de l'axe vertical du système de coordonnées affines considéré. On peut donc supposer que ce système de coordonnées affines est le système orthonormé direct image du repère standard par une rotation  $r$  et on note  $U_r$ ,  $F_r$  et  $H_r$  pour les  $U$ ,  $F$  et  $H$  correspondants.

On doit montrer que cette fonction  $r \rightarrow H_r$  est bornée. Il suffit de montrer qu'elle est localement bornée. On peut donc, par exemple, supposer  $r$  proche de  $r_0 = \text{Id}$ . Pour chaque rotation  $r$ , on a une paramétrisation  $\gamma_r : x \rightarrow r(x_1 e_1 + \dots + x_{m-1} e_{m-1} + F_r(x_1, \dots, x_{m-1}) e_m)$  d'un ouvert de  $\partial\Omega$ . Fixons un ouvert  $V = U_{r_0}^{\tau'}$  de  $U_{r_0}$  avec  $\tau < \tau' < 1$ . Pour  $r$  près de  $r_0$ ,

- (i) la fonction dérivée  $F'_{r_0}$  est quasisymétriquement convexe sur  $V$  (lemme 6.2),
- (ii) le changement de paramétrage  $\psi_r := \gamma_r \circ \gamma_{r_0}^{-1}$  est  $C^1$ -proche de l'identité sur  $V$  et
- (iii) on a  $F'_r = p_r \circ F'_{r_0} \circ \psi_r^{-1}$  où  $p_r$  est aussi  $C^1$ -proche de l'identité (dans notre situation où  $m = 2$ , on a  $p_r(t) = \frac{t - t \tan \alpha}{1 + t \tan \alpha}$  où  $\alpha$  est l'angle de la rotation  $r$ ).

Il résulte alors du lemme 4.3 que  $H_r$  est borné pour  $r$  proche de  $r_0$ . □

Terminons cette section par une dernière interprétation de la notion de quasisymétrie convexe pour les ouverts convexes du plan.

Pour cela, considérons un ouvert proprement convexe borné de  $\mathbb{R}^2$  dont le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$  et notons  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \partial\Omega$  une paramétrisation de ce bord par la longueur d'arc. C'est une application périodique dont la période est la longueur  $L$  du bord. Notons alors  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction argument, c'est-à-dire la fonction continue qui donne l'angle  $\theta(\sigma)$  du vecteur tangent  $\gamma'(\sigma)$  avec une direction fixée. Cette fonction  $\theta$  est croissante et vérifie, pour tout  $\sigma$ ,  $\theta(\sigma + L) = \theta(\sigma) + 2\pi$ . Cette fonction argument est bien définie à une constante près et elle détermine  $\Omega$  à une isométrie euclidienne près.

Le lemme suivant décrit la quasisymétrie convexe de  $\Omega$  à l'aide de  $\theta$ .

**Lemme 6.5** ( $m = 2$ ) *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe borné de  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $\Omega$  est quasisymétriquement convexe si et seulement si le bord  $\partial\Omega$  est  $C^1$  et la fonction argument  $\theta$  définie ci-dessus est quasisymétrique.*

**Démonstration** C'est la même que celle du lemme précédent. Les détails sont laissés au lecteur car ce lemme ne sera pas utilisé plus loin. □

**Remarque** La meilleure constante  $H'_\Omega \geq 1$  telle que la fonction  $\theta$  est  $H'_\Omega$ -quasisymétriquement convexe est un invariant euclidien de  $\Omega$  mais n'est pas un invariant affine.

## 6.2 Hyperbolicité et quasisymétrie convexe

Lorsque  $m = 2$ , le théorème 1.4 est une conséquence du lemme 6.4 et de la proposition plus précise suivante que nous généraliserons au §8.2.

**Proposition 6.6** ( $m=2$ ) Fixons  $\tau \in ]0, 1[$ . On a

- a)  $\forall \delta > 0, \exists H \geq 1, \forall \Omega$  ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  
 $(\Omega \text{ est } \delta\text{-hyperbolique}) \implies (\Omega \text{ est } (H, \tau)\text{-quasisymétriquement convexe})$ .  
b)  $\forall H \geq 1, \exists \delta > 0, \forall \Omega$  ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  
 $(\Omega \text{ est } (H, \tau)\text{-quasisymétriquement convexe}) \implies (\Omega \text{ est } \delta\text{-hyperbolique})$ .

Comme la condition  $\delta$ -hyperbolique ne dépend pas du choix de  $\tau$  et est un invariant projectif de  $\Omega$ , on en déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 6.7** ( $m=2$ ) Fixons  $\tau, \tau' \in ]0, 1[$ . Alors  $\forall H \geq 1, \exists H' \geq 1, \forall \Omega, \Omega'$  ouverts convexes bornés de  $\mathbb{R}^2$  qui sont projectivement équivalents, on a l'implication:

$$(\Omega \text{ est } (H, \tau)\text{-quasisymétriquement convexe}) \implies (\Omega' \text{ est } (H', \tau')\text{-quasisymétriquement convexe}).$$

**Remarques** - Ce corollaire affirme que la constante  $H_\Omega$  dépend peu du choix de la valeur  $\tau = \frac{1}{3}$ .

- Il prouve aussi que, même si cette constante  $H_\Omega$  n'est pas un invariant projectif de  $\Omega$ , elle permet d'en construire, par exemple  $H_{1,\Omega} := \inf H_{g\Omega}$  (resp.  $H_{2,\Omega} := \sup H_{g\Omega}$ ) où  $g$  décrit l'ensemble des transformations projectives de  $\mathbb{P}^2$  telles que  $g\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .

- La condition  $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^2$  est importante. En voici un exemple. Les convexes  $\Omega_n$  de  $\mathbb{P}^2$  délimités par les hyperboles  $t = \pm \sqrt{s^2 + n^{-2}}$  sont tous projectivement équivalents car ce sont des ellipsoïdes. Néanmoins, on a déjà vu au §5.5 qu'il n'existe pas de constante  $H$  telle que toutes les fonctions  $F_n : s \mapsto \sqrt{s^2 + n^{-2}}$  soient toutes  $H$ -quasisymétriquement convexes sur  $[-1, 1]$ .

**Démonstration de la proposition 6.6** a) Supposons par l'absurde que cette assertion soit fautive. Par l'invariance affine, le théorème de John, les lemmes 5.3 et 5.6, on peut alors trouver une suite  $\Omega_n$  d'ouverts convexes de  $\mathbb{R}^2$  tels que

- (i)  $B(0, 1) \subset \Omega_n \subset B(0, m)$ ,  
(ii)  $\Omega_n$  est  $\delta$ -hyperbolique

et on peut trouver des points  $a_n, b_n, c_n$  sur le bord inférieur  $\mathcal{G}_{F_n}$  de  $\Omega_n$

- (iii) qui restent à distance minorée du bord de  $\mathcal{G}_{F_n}$ ,  
(iv) tels que l'hyperplan tangent  $b_n^*$  est parallèle à la corde  $[a_n, c_n]$  et tels que  
(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n c_n}{a_n x_n} = \infty$ .

D'après (i), on peut supposer que la suite  $\Omega_n$  converge vers un ouvert convexe  $\Omega_\infty$  coïncé entre les boules de rayon 1 et  $m$ , et que les suites  $a_n, b_n$  et  $c_n$  convergent vers des points  $a_\infty, b_\infty$  et  $c_\infty$  de  $\partial\Omega_\infty$ . D'après (ii) et la proposition 2.10, le convexe  $\Omega_\infty$  est  $\delta$ -hyperbolique, et donc strictement convexe à bord  $C^1$ .

Considérons alors un quadruplet harmonique  $(a_n, b_n, c'_n, d'_n)$  sur  $\partial\Omega_n$  tel que le point  $d'_n$  est le point du bord supérieur de  $\Omega_n$  au dessus de  $b_n$ . Grâce à (iii) et (iv), on peut appliquer le lemme 5.12. Le point (v) prouve alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c'_n, d'_n) = \infty.$$

Ce qui contredit la proposition 3.2.

b) On procède de façon très similaire. Supposons par l'absurde que cette assertion soit fausse. Par l'invariance affine, le théorème de John et la proposition 3.2, on peut alors trouver une suite  $\Omega_n$  d'ouverts convexes de  $\mathbb{R}^m$  tels que

(i)  $B(0, 1) \subset \Omega_n \subset B(0, m)$ ,

(ii)  $\Omega_n$  est  $(H, \tau)$ -quasisymétriquement convexe

et on peut trouver des quadruplets harmoniques  $(a_n, b_n, c_n, d_n)$  sur  $\partial\Omega_n$  tels que

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n) = \infty$ .

D'après (i), on peut supposer que la suite  $\Omega_n$  converge vers un ouvert convexe  $\Omega_\infty$  coïncé entre les boules de rayon 1 et  $m$ , et que les suites  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$  convergent vers des points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty$  et  $d_\infty$  de  $\partial\Omega_\infty$ . D'après (ii) et le corollaire 4.10, le convexe  $\Omega_\infty$  est aussi  $(H, \tau)$ -quasisymétriquement convexe. Il est donc strictement convexe à bord  $C^1$ . La convergence de  $\partial\Omega_n$  vers  $\partial\Omega_\infty$  est donc une convergence  $C^1$ .

Choisissons un système de coordonnées affines tel que le bord inférieur de  $\Omega_\infty$  soit le graphe d'une application continue  $F_\infty : U_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que le point  $b_\infty$  soit l'image du centre de gravité de  $U_\infty$ . C'est possible. Dans ce système de coordonnées affines, le bord inférieur de  $\Omega_n$  est le graphe d'une application continue  $F_n : U_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Quitte à réduire légèrement  $\tau$ , pour  $n$  grand, toutes ces applications  $F_n$  sont  $H$ -quasisymétriquement convexes sur  $U_\infty^\tau$ . Comme les fonctions  $F_n$  et  $F_\infty$  sont strictement convexes, on est dans le cadre de la proposition 5.15 avec pour compact  $\mathcal{E}$  la restriction de ces fonctions  $F_n$  et  $F_\infty$  à  $U_\infty^\tau$ . Autrement dit, si les quatre points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$  étaient sur le graphe de  $F_\infty|_{U_\infty^\tau}$  la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  serait bornée, ce qui fournirait la contradiction cherchée.

On se ramène à cette situation par un raisonnement très proche de la démonstration du lemme 5.16. On est dans l'un des quatre cas suivants.

**1<sup>er</sup> cas :** *Les quatre points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$  sont distincts.*

Le quadruplet  $(a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty)$  est harmonique sur  $\partial\Omega_\infty$  et la suite  $\psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  converge vers  $\psi_{\partial\Omega_\infty}(a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty)$ . Contradiction.

**2<sup>ème</sup> cas :**  *$a_\infty = b_\infty = c_\infty \neq d_\infty$  (ou  $c_\infty = d_\infty = a_\infty \neq b_\infty$ ).*

Pour  $n$  grand, les trois points  $a_n, b_n, c_n$  sont sur le graphe de la restriction de  $F_n$  à  $U_\infty^\tau$ . Construisons alors une suite de quadruplets harmoniques  $(a_n, b_n, c'_n, d'_n)$  sur  $\mathcal{G}_{F_n|_{U_\infty^\tau}}$  tels que la suite  $d'_n$  converge vers un point  $d'_\infty \neq b_\infty$  de  $U_\infty^\tau$  (voir figure 12.A). D'après la proposition 5.15, la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c'_n, d'_n)$  est bornée. Le lemme 5.12 prouve alors que la suite  $\psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est bornée. Contradiction.

**3<sup>ème</sup> cas :**  *$b_\infty = c_\infty = d_\infty \neq a_\infty$  (ou  $d_\infty = a_\infty = b_\infty \neq c_\infty$ ).*

Pour  $n$  grand, les trois points  $b_n, c_n, d_n$  sont sur le graphe de la restriction de  $F_n$  à  $U_\infty^\tau$ . Construisons alors une suite de quadruplets harmoniques  $(a'_n, b_n, c'_n, d_n)$  sur  $\mathcal{G}_{F_n|_{U_\infty^\tau}}$  tels que la suite  $a'_n$  converge vers un point  $a'_\infty \neq b_\infty$  de  $U_\infty^\tau$  (voir figure 12.B). D'après la proposition 5.15, la suite  $\psi_{F_n}(a'_n, b_n, c'_n, d_n)$  est bornée. Le lemme 5.13 prouve alors que

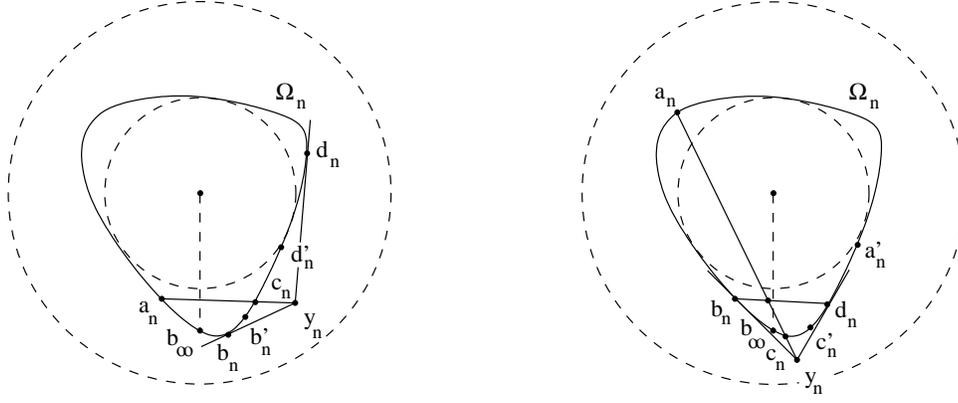


Figure 12: A.  $a_\infty = b_\infty = c_\infty \neq d_\infty$

B.  $a_\infty \neq b_\infty = c_\infty = d_\infty$

Un ouvert quasisymétriquement convexe est hyperbolique.

la suite  $\psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est bornée. Contradiction.

**4<sup>ème</sup> cas :**  $a_\infty = b_\infty = c_\infty = d_\infty$ .

Pour  $n$  grand, les quatre points  $a_n, b_n, c_n, d_n$  sont sur le graphe de la restriction de  $F_n$  à  $U_\infty^r$ . D'après la proposition 5.15, la suite  $\psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est bornée. Contradiction.  $\square$

## 7 Fonctions quasisymétriquement convexes

Nous généralisons dans ce chapitre les résultats du chapitre 5 en toute dimension. Le but principal en est la démonstration de la proposition 1.9, c'est-à-dire une caractérisation des fonctions quasisymétriquement convexes à l'aide des birapports des quadruplets harmoniques de leur graphe (proposition 7.14). Nous en déduisons l'invariance projective de ces graphes (corollaire 7.16) ... ce qui donnera un sens à la définition 1.3.

Nous donnons tout d'abord dans la section 7.1 quelques propriétés des fonctions quasisymétriquement convexes ainsi que quelques exemples.

Nous vérifions que les fonctions analytiques strictement convexes sont localement quasisymétriquement convexes (proposition 7.3).

Nous montrons ensuite les propriétés de régularité Hölder et de compacité des fonctions quasisymétriquement convexes (lemme 7.8 et corollaire 7.9).

Par rapport à la dimension 1, la difficulté nouvelle pour démontrer cette caractérisation est que le 2-plan affine contenant le quadruplet harmonique n'est pas forcément vertical. Il pourrait même être très proche d'un 2-plan tangent au graphe et donc couper le graphe en une toute petite courbe fermée. Pour surmonter cette difficulté, nous montrons un théorème des fonctions implicites pour les fonctions quasisymétriquement convexes (proposition 7.10 et corollaire 7.12) qui nous permet de contrôler la constante d'hyperbolicité du convexe délimité par cette petite courbe.

## 7.1 Définition et exemples

Soit  $H \geq 1$  et  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ . D'après la définition 5.1, une fonction  $C^1$  convexe  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe si et seulement si la restriction  $F_\gamma := F \circ \gamma$  de  $F$  à tout chemin affine  $t \mapsto \gamma(t) = x_0 + th_0$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe. Cette remarque permet d'étendre facilement à la dimension  $N$  certains énoncés que nous avons décrits en dimension 1. En voici deux exemples.

Nous dirons qu'une fonction convexe  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est à dérivées  $H$ -quasisymétriques si, pour tout  $x - h, x + h$  dans  $U$ , on a

$$F'(x + h).h - F'(x).h \leq H(F'(x).h - F'(x - h).h)$$

Ce qui signifie exactement que toutes les restrictions  $F_\gamma$  sont des fonctions à dérivées  $H$ -quasisymétriques.

**Lemme 7.1** Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ . Une fonction  $C^1$  convexe  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si la restriction de  $F$  à tout compact de  $U$  est à dérivées quasisymétriques.

**Démonstration** Cela résulte du lemme 5.3. □

**Lemme 7.2** Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ . Une fonction  $C^1$  convexe  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si  $F$  est localement quasisymétriquement convexe.

**Démonstration** Cela résulte du lemme précédent et du lemme 4.2. □

Voici quelques exemples de fonctions quasisymétriquement convexes.

★ **Exemple 1** Une fonction  $F \in C^2(U, \mathbb{R})$  à Hessian défini positif est quasisymétriquement convexe sur tout compact. Cela résulte de l'exemple 1 de 4.1.

★ **Exemple 2** Soient  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , deux fonctions  $H$ -quasisymétriquement convexes. Alors la fonction  $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto F_1(x_1) + F_2(x_2)$  est aussi  $H$ -quasisymétriquement convexe. En effet, on a  $D_{(x_1, x_2)}F(h_1, h_2) = D_{x_1}F_1(h_1) + D_{x_2}F_2(h_2)$ .

★ **Exemple 3** Soient  $1 < \alpha < \beta$ . La fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto |x|^\alpha + |y|^\beta$  est quasisymétriquement convexe. Cela résulte de l'exemple précédent et de l'exemple 3 de 4.1. Remarquons que dans cette exemple la différentielle  $F' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  n'est pas une application quasiconforme au voisinage de 0.

## 7.2 Fonctions analytiques convexes

Voici un autre exemple de fonctions quasisymétriquement convexes.

**Proposition 7.3** Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction analytique strictement convexe. Alors  $F$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact.

Nous utiliserons le lemme suivant.

**Lemme 7.4** Soient  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $\Phi : V \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \Phi(x, t)$  une fonction analytique telle que, pour tout  $x$  dans  $V$ , la fonction  $t \mapsto \Phi(x, t)$  est strictement convexe et vérifie  $\Phi(x, 0) = \partial_t \Phi(x, 0) = 0$ . Alors pour tout compact  $K$  de  $V \times ]-1, 1[$ , on a

$$\sup_{\{(x,t) \in K / t \neq 0\}} \frac{\partial_t \Phi(x, t)}{-\partial_t \Phi(x, -t)} < \infty . \quad (15)$$

**Remarques** a) En intégrant, on en déduit

$$\sup_{\{(x,t) \in K / t \neq 0\}} \frac{\Phi(x, t)}{\Phi(x, -t)} < \infty . \quad (16)$$

b) Pour tout  $x$  dans  $V$ , on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x, t)}{\Phi(x, -t)} = 1$ . Mais cette limite n'est pas toujours uniforme en  $x$ , comme le prouve l'exemple suivant avec  $V = \mathbb{R}$  :

$$\Phi(x, t) = x^2 t^2 + x t^3 + t^4 \text{ pour lequel on a } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\varepsilon, \varepsilon)}{\Phi(\varepsilon, -\varepsilon)} = 3 .$$

c) Il peut arriver que l'on ait

$$\sup_{\{(x,t) \in K / t \neq 0\}} \frac{\partial_t^2 \Phi(x, t)}{\partial_t^2 \Phi(x, -t)} = \infty ,$$

comme le prouve l'exemple suivant avec  $V = \mathbb{R}$  :

$$\Phi(x, t) = t^4 + 4xt^3 + 6(x^2 + 1)x^2 t^2 \text{ pour lequel on a } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial_t^2 \Phi(\varepsilon, \varepsilon)}{\partial_t^2 \Phi(\varepsilon, -\varepsilon)} = \infty .$$

### Démonstration de la proposition 7.3

Soient  $K$  un compact de  $U$  et  $\rho$  la distance de  $K$  à  $U^c$ . Appliquons l'inégalité (16) du lemme 7.4 à la fonction

$$\Phi : ((x, h_0), t) \mapsto D_x(th_0) = F(x + th_0) - F(x) - tF'(x) \cdot h_0$$

où  $x$  décrit un voisinage de  $K$  et  $h_0$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  de norme  $\frac{\rho}{2}$ . Il existe donc une constante  $H \geq 1$  telle que, pour tout  $x$  dans  $K$  et  $h$  dans  $\mathbb{R}^N$  avec  $\|h\| \leq \frac{\rho}{3}$ , on a

$$D_x(h) \leq H D_x(-h) .$$

Par le lemme 7.2,  $F$  est alors quasisymétriquement convexe sur tout compact.  $\square$

Pour démontrer le lemme 7.4, nous utiliserons le résultat suivant sur les ensembles semianalytiques. Rappelons qu'une partie de  $\mathbb{R}^N$  est dite semianalytique si, dans un voisinage  $U_x$  de tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^N$ , c'est une union finie de parties définies par des familles finies d'inégalités  $F > 0$  ou  $F \geq 0$  avec  $F$  analytique sur  $U_x$ .

**Fait 7.5** Soient  $E \subset \mathbb{R}^{N+2}$  une partie semianalytique compacte. On suppose que la fonction  $t \rightarrow y(t) := \sup\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}^N, (x, y, t) \in E\}$  est bien définie et est finie sur un intervalle  $]0, \varepsilon[$  avec  $\varepsilon > 0$ .

Alors on peut trouver  $\varepsilon_0 > 0$  et une série de Puiseux  $x(t) = \sum_{\alpha \geq \alpha_0} x_\alpha t^\alpha$  convergente sur  $]0, \varepsilon_0[$  telle que, pour tout  $t$  dans  $]0, \varepsilon_0[$ , on a  $(x(t), y(t), t) \in E$ .

**Remarques** - Une série de Puiseux  $x(t)$  est une série de Laurent en la variable  $t^{\frac{1}{p}}$  pour un entier  $p \geq 1$ .

- La fonction  $y(t)$  admet aussi un développement de Puiseux. Le fait 7.5 affirme donc que la borne supérieure définissant  $y(t)$  est atteinte sur une courbe semianalytique.

**Démonstration du fait 7.5** C'est classique. Une bonne référence est [5]. D'après le théorème 6.1 de [5], le compact  $F := \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 / \exists x \in \mathbb{R}^N / (x, y, t) \in E\}$  est semianalytique. Donc la courbe  $C := \{(y(t), t) / t \in ]0, \varepsilon[\}$  puis l'ensemble  $E' := \{(x, y, t) \in E / (y, t) \in C\}$  sont semianalytiques. L'existence de la série de Puiseux  $x(t)$  résulte alors des lemmes 3.6 et 6.3 de [5].  $\square$

**Démonstration du lemme 7.4** Pour ramener notre étude à celle d'une fonction bornée, introduisons la fonction définie pour  $t \neq 0$  par

$$\Theta(x, t) := \frac{\partial_t \Phi(x, t)}{\partial_t \Phi(x, t) - \partial_t \Phi(x, -t)}.$$

Si le lemme 7.4 n'est pas vrai, quitte à changer  $t$  en  $-t$ , on peut trouver une boule fermée  $B(x_0, r)$  incluse dans  $V$  telle que la fonction

$$y(t) := \sup\{\Theta(x, t) / x \in B(x_0, r)\} \text{ vérifie } \sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} y(t) = 1. \quad (17)$$

L'idée principale de la démonstration consiste à se ramener à un problème en dimension 1 à l'aide du fait 7.5. Plus précisément, appliquons ce fait 7.5 au compact semianalytique

$$E := \{(x, y, t) \in B(x_0, r) \times [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] / (1 - y) \partial_t \Phi(x, t) = -y \partial_t \Phi(x, -t)\}.$$

Il existe donc une série de Puiseux  $x(t) = \sum_{\alpha \geq \alpha_0} x_\alpha t^\alpha$  convergente sur  $]0, \varepsilon_0[$  telle que, pour tout  $t$  dans  $]0, \varepsilon_0[$ , on a

$$y(t) = \Theta(x(t), t) \quad (18)$$

Cherchons maintenant des équivalents du numérateur et du dénominateur de  $y(t)$  qui contrediront l'égalité (17). Comme  $x(t)$  reste dans un compact  $K$ , on peut supposer  $\alpha_0 \geq 0$ . La fonction

$$\Psi(s, t) := \Phi(x(s), t)$$

admet un développement en série au voisinage de 0,

$$\Psi(s, t) = \sum_{(i,j) \in I} b_{ij} s^i t^j$$

où  $I = \{(i, j) / i \in \frac{1}{p}\mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \text{ et } b_{ij} \neq 0\}$ . En outre, comme  $\Psi(s, 0) = \partial_t \Psi(s, 0) = 0$ , pour tout  $(i, j)$  dans  $I$ , on a  $j \geq 2$ . Notons

$$m := \min\{i+j / (i, j) \in I\} \quad , \quad I_m := \{(i, j) \in I / i+j = m\} \quad \text{et} \quad \Psi_m(s, t) := \sum_{(i,j) \in I_m} b_{ij} s^i t^j .$$

On veut montrer que les numérateurs et dénominateurs de  $y(t)$  sont à une constante près équivalents à  $t^m$ . Pour cela, montrons l'assertion suivante :

$$\forall (s, t_0) \in ]0, \infty[ \times (\mathbb{R} - \{0\}) \quad \text{on a} \quad t_0 \partial_t \Psi_m(s, t_0) > 0 . \quad (19)$$

En effet, d'une part, on a la minoration, pour  $(s, t) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ ,

$$\partial_t^2 \Psi_m(s, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-m+2} \partial_t^2 \Psi(\varepsilon s, \varepsilon t) \geq 0 .$$

D'autre part, comme les coefficients  $b_{ij}$  sont non nuls, le polynôme  $t \mapsto \partial_t^2 \Psi_m(s, t)$  n'est pas identiquement nul, et en intégrant l'inégalité  $\partial_t^2 \Psi_m(s, t) \geq 0$  sur l'intervalle  $[0, t_0]$ , on obtient l'inégalité (19) cherchée.

On déduit alors de (18) et (19) que l'on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \frac{\partial_t \Psi_m(1, 1)}{\partial_t \Psi_m(1, 1) - \partial_t \Psi_m(1, -1)} < 1 .$$

Ce qui contredit (17). □

Il est probable que la réponse à la question suivante est positive.

*Soit  $n \geq 2$ ,  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $F \in C^n(U, \mathbb{R})$  une fonction  $n$ -convexe. Alors  $F$  est-elle quasisymétriquement convexe sur tout compact?*

### 7.3 Rappels sur la régularité Hölder

Nous rappelons dans cette section l'inégalité de Nikolskii dont nous aurons besoin dans la section suivante. Cette inégalité (lemme 7.7) affirme qu'une fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\alpha$ -Hölder sur tout compact dès que sa restriction à chaque segment est  $\alpha$ -Hölder avec un contrôle uniforme sur la norme Hölder de ses restrictions. Une bonne référence pour plus de détail sur cette section est [12].

Commençons par un lemme en dimension 1. Soit  $\gamma \in ]0, 1[$ . Pour  $f$  dans  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ , on note

$$\|f\|_\gamma = \max\left( \|f\|_\infty, \sup_{x,h} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\gamma} \right) \quad \text{et}$$

$$\|f\|'_\gamma = \max( \|f\|_\infty, \sup_{x,h} \frac{|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|}{|h|^\gamma} ).$$

**Lemme 7.6 (voir [12])** On a  $\frac{1}{2}\|f\|'_\gamma \leq \|f\|_\gamma \leq C_1\|f\|'_\gamma$  où  $C_1 = \max(1, \frac{8}{(b-a)^\gamma} + \frac{1}{1-\gamma})$ .

**Remarque** Pour  $f : t \mapsto 2t - (b+a)$ , on a  $\|f\|_\gamma = (b-a)^{1-\gamma}$  et  $\|f\|'_\gamma = b-a$ .

**Démonstration** La première inégalité est évidente. Pour montrer la deuxième, posons  $g(h) = f(x+h) - f(x)$ . On veut majorer le quotient  $|g(h)|/|h|^\gamma$ . Sans perdre de généralité, on peut supposer que  $h > 0$ ,  $x \leq \frac{a+b}{2}$  et  $\|f\|'_\gamma = 1$ . Introduisons l'entier  $n := [\log_2 \frac{b-a}{h}] - 1$  de sorte que l'on ait  $\frac{b-a}{2^n h} \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ . On a alors, pour tout  $j = 0, \dots, n-1$ ,

$$|g(2^{j+1}h) - 2g(2^j h)| \leq (2^j h)^\gamma.$$

En sommant ces inégalités avec un facteur  $2^{n-j-1}$ , on obtient

$$|g(2^n h) - 2^n g(h)| \leq 2^{n-1} h^\gamma \sum_{0 \leq j \leq n-1} 2^{(\gamma-1)j} \leq \frac{2^n h^\gamma}{2(1-2^{\gamma-1})} \leq \frac{2^n}{1-\gamma} h^\gamma.$$

D'où  $\frac{|g(h)|}{|h|^\gamma} \leq \frac{|g(2^n h)|}{2^n |h|^\gamma} + (1-\gamma)^{-1} \leq C_1$ . □

Nous pouvons maintenant démontrer l'inégalité de Nikolskii. Soient  $\alpha \in ]1, 2[$ ,  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ ,  $F \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$  et  $V \subset U$ . On pose  $\|F\|_{V,\infty} := \sup_V |F|$ ,

$$\|F\|_{V,\alpha} = \max( \|F\|_{V,\infty}, \sup_{x,x+h \in V} \frac{\|F'(x+h) - F'(x)\|}{\|h\|^{\alpha-1}} ) \text{ et}$$

$$\|F\|'_{V,\alpha} = \max( \|F\|_{V,\infty}, \sup_{x,x+h \in V} \frac{|F'(x+h).h - F'(x).h|}{\|h\|^\alpha} ).$$

**Lemme 7.7 (voir [12])** Soit  $K$  un compact de  $U$  et  $\rho$  la distance de  $K$  à  $U^c$ . On a  $\|F\|'_{K,\alpha} \leq \|F\|_{K,\alpha} \leq C_2 \|F\|'_{U,\alpha}$  où  $C_2 = \max(4\rho^{1-\alpha}, 6(8 + (2-\alpha)^{-1})$ .

**Démonstration** La première inégalité est évidente. Pour montrer la deuxième, on peut supposer  $K$  convexe et  $\|F\|'_{U,\alpha} = 1$ . Soient  $x, x+h$  dans  $K$  et  $k$  dans  $\mathbb{R}^N$  avec  $\|h\| < \frac{\rho}{2}$  et  $\|k\| = \|h\|$ . Ecrivons l'inégalité suivante avec  $y = x-h$ ,  $x$  et  $x+h$

$$|F(y+k) - F(y) - F'(y).k| \leq \|k\|^\alpha.$$

Ecrivons aussi l'inégalité suivante avec  $z = x$  et  $x+k$

$$|F(z+h) - 2F(z) + F(z-h)| \leq \|h\|^\alpha.$$

En ajoutant ces inégalités, on obtient

$$|(F'(x+h) - 2F'(x) + F'(x-h)).k| \leq 2\|h\|^\alpha + 4\|k\|^\alpha = 6\|h\|^{\alpha-1}\|k\|.$$

On en déduit, en appliquant le lemme 7.6 aux fonctions  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}; t \rightarrow F'(x+th).k$  la majoration

$$\|F'(x+h) - F'(x)\| \leq 6(8 + (2-\alpha)^{-1})\|h\|^{\alpha-1}.$$

Lorsque  $\|h\| \geq \frac{\rho}{2}$ , on a la majoration évidente  $\|F'(x+h) - F'(x)\| \leq 4\rho^{1-\alpha}\|h\|^{\alpha-1}$ . □

## 7.4 Compacité des fonctions quasisymétriquement convexes

Montrons maintenant la régularité Hölder et les propriétés de compacité des fonctions quasisymétriquement convexes.

**Lemme 7.8 (Régularité Hölder et  $\beta$ -convexité)** *Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $H$ -quasisymétriquement convexe. Posons  $\alpha = 1 + \log_2(1 + (4H(H+1))^{-1}) \in ]1, 2[$  et  $\beta = 1 + \log_2(1 + 4H(H+1)) \in ]2, \infty[$ . Alors,*

a)  *$F$  est  $\alpha$ -Hölder sur tout compact  $K$  de  $U$  et on a la majoration  $\|F\|_{K,\alpha} \leq H_{10} \|F\|_\infty$  avec  $H_{10} = (\frac{10^3 H}{\min(1,\rho)})^2$  où  $\rho$  est la distance de  $K$  à  $U^c$ .*

b)  *$F$  est  $\beta$ -convexe sur tout compact.*

Munissons  $C^1(U, \mathbb{R})$  de la topologie de la convergence  $C^1$  sur tout compact.

**Corollaire 7.9 (Compacité)** *Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $H \geq 1$ . L'ensemble  $P_H(U) := \{F : U \rightarrow \mathbb{R} / F \text{ est } H\text{-quasisymétriquement convexe et } \|F\|_\infty \leq 1\}$  est compact dans  $C^1(U, \mathbb{R})$ .*

**Démonstration du corollaire 7.9** En effet, il est fermé et l'ensemble des dérivées est équicontinu par le lemme 7.8. Notre assertion résulte alors du théorème d'Ascoli.  $\square$

**Remarque** Une autre démonstration du corollaire 7.9 consiste à vérifier à l'aide du corollaire 4.10 que  $P_H(U)$  est fermé dans  $C^0(U, \mathbb{R})$ . Puis d'utiliser le fait 5.9.

**Démonstration du lemme 7.8** a) On peut supposer que  $\|F\|_\infty = 1$ . Notons  $K'$  le  $(\frac{\rho}{2})$ -voisinage de  $K$ . Pour tout  $x$  dans  $K'$  et  $h$  dans  $\mathbb{R}^N$  avec  $\|h\| < \frac{\rho}{2}$ , la fonction  $\Phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto F(x + th)$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe. Par la remarque du lemme 5.3, la dérivée de  $\Phi$  est  $4H(H+1)$ -quasisymétrique sur l'intervalle  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  et donc, par les lemmes 4.8 et 4.9.a, on a

$$\|F\|'_{K',\alpha} \leq \frac{480}{\rho} (2H+1)^2 \leq \frac{10^4 H^2}{\rho}.$$

L'inégalité de Nikolskii 7.7 donne alors  $\|F\|_{K,\alpha} \leq H_{10}$ .

b) Cela résulte du lemme 4.9.b.  $\square$

## 7.5 Fonctions convexes implicites

Nous montrons dans cette section qu'une fonction convexe définie implicitement par une équation localement quasisymétriquement convexe est aussi localement quasisymétriquement convexe.

**Proposition 7.10 (Fonctions convexes implicites)** *Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quasisymétriquement convexe sur tout compact,  $V$  une partie convexe de  $\mathbb{R}^{N-1}$  et  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe telle que,*

$$\forall x \in V \text{ on a } (x, \varphi(x)) \in U, \quad F(x, \varphi(x)) = 0 \text{ et } \partial_{x_N} F(x, \varphi(x)) \neq 0.$$

*Alors  $\varphi$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact.*

**Démonstration** C'est une conséquence du lemme 7.11.b suivant qui est plus précis car il donne un contrôle sur la constante de quasisymétrie convexe: avec les notations de ce lemme, on se ramène au cas où  $V$  est compact, on prend pour  $K$  un voisinage compact du graphe de  $\varphi$  sur lequel  $\partial_{x_N}$  ne s'annule pas et on choisit  $N_0$  assez grand pour que la condition (iii') soit satisfaite.  $\square$

**Lemme 7.11** Soient  $H \geq 1$ ,  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $H$ -quasisymétriquement convexe et  $K$  un compact de  $U$  tel que

(i)  $\partial_{x_N} F$  ne s'annule pas sur  $K$ . On note  $M := \sup_K |\partial_{x_N} F|$  et  $m := \inf_K |\partial_{x_N} F|$ .

Soient  $V$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^{N-1}$  et  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe telle que,

(ii)  $\forall x \in V$ , on a  $(x, \varphi(x)) \in K$  et  $F(x, \varphi(x)) = 0$ .

a) On suppose que,

(iii)  $\forall x, x+h \in V$ , on a  $(x+h, \varphi(x) + \varphi'(x).h) \in K$ .

Alors  $\varphi$  est  $H_{11}$ -quasisymétriquement convexe avec  $H_{11} := \frac{MH}{m}$ .

b) Soit  $N_0 \geq 1$ . On suppose que,

(iii')  $\forall x, x+h \in V$ , on a  $(x + \frac{h}{N_0}, \varphi(x) + \varphi'(x).\frac{h}{N_0}) \in K$ .

Alors  $\varphi$  est  $H_{12}$ -quasisymétriquement convexe avec  $H_{12} := (\frac{4MH}{m})^{4+4\log_2 N_0}$ .

**Démonstration** Pour  $x, x+h$  dans  $V$ , notons  $D_x(h) = \varphi(x+h) - \varphi(x) - \varphi'(x).h$  et  $d_x(h) := F(x+h, \varphi(x) + \varphi'(x).h)$ . L'égalité  $F(x+h, \varphi(x+h)) = 0$  et le théorème des accroissements finis prouvent que

$$d_x(h) = -D_x(h) \partial_{x_N} F(z) .$$

où  $z$  est un point sur le segment  $[(x+h, \varphi(x) + \varphi'(x).h), (x+h, \varphi(x+h))]$ . D'après (iii) et la convexité de  $V$ , ce segment est entièrement inclus dans  $K$ . On a donc, par (i),

$$m D_x(h) \leq d_x(h) \leq M D_x(h) .$$

D'après (ii), on a  $F(x, \varphi(x)) = 0$  et  $F'(x, \varphi(x)).(h, \varphi'(x).h) = 0$ . Comme  $F$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe, on en déduit la majoration

$$d_x(h) \leq H d_x(-h) .$$

D'où l'inégalité cherchée

$$D_x(h) \leq \frac{MH}{m} D_x(-h) .$$

b) Cela résulte du a) et du corollaire 5.4.  $\square$

Le corollaire suivant est une variante du lemme 7.11. La différence principale est un contrôle de la constante de quasisymétrie convexe de  $\varphi$  qui ne dépend pas des dérivées de  $F$ .

**Corollaire 7.12 (Tranches d'un graphe quasisymétriquement convexe)**

Soient  $H \geq 1$ ,  $\tau \in ]0, 1[$  et  $\rho_0 > 0$ , il existe une constante  $H' \geq 1$  telle que :

Pour tout  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $H$ -quasisymétriquement convexe et strictement convexe,  $P = v + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$  un 2-plan affine de  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $I = [a, b]$  un intervalle et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe telle que la courbe  $T := \{v + s i + \varphi(s) j \mid s \in I\}$  est incluse dans le graphe  $\mathcal{G}_F$  de  $F$  (voir figure 13.A). On note  $C$  la projection de  $T$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $\rho$  la distance de  $C$  à  $U^c$ ,  $\text{diam}(C)$  le diamètre de  $C$  et on suppose que  $\rho \geq \rho_0 \text{diam}(C)$ .

Alors  $\varphi$  est  $H'$ -quasisymétriquement convexe sur l'intervalle  $I^\tau$ .

Rappelons que  $I^\tau$  est l'intervalle de centre  $\frac{a+b}{2}$  et de longueur  $(b-a)\tau$ .

**Démonstration** L'idée est de ramener le cas général à un cas simple pour lequel on pourra appliquer le lemme 7.11.a.

Remplaçons tout d'abord  $\mathbb{R}^N$  par la projection de  $P$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Ceci permet de supposer que  $N = 2$  (si le plan  $P$  était vertical, on pourrait prendre  $H' = H$ ). Le graphe  $\mathcal{G}_F$  est alors une surface convexe dans  $\mathbb{R}^3$ . On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Par invariance affine pour  $F$  et pour  $\varphi$ , on peut supposer que l'on a  $v = 0$ ,  $i = e_1$  et  $j = e_2$ . En particulier, la courbe  $C$  est dans l'intersection du graphe  $\mathcal{G}_F$  avec le plan horizontal  $x_3 = 0$ .

Montrons maintenant que si le corollaire est vrai avec  $\tau = 10^{-2}$  et  $\rho_0 = 10^2$ , alors il est vrai pour toutes les valeurs de  $\tau$  et  $\rho_0$ . Pour cela, considérons les sous-intervalles  $J'$  de  $I^\tau$  de longueur inférieure à  $10^{-5}(1-\tau)(b-a) \min(\rho_0, 1)$ . On peut écrire  $J' = J^{10^{-2}}$  où  $J$  est un sous-intervalle de  $I$ . On peut aussi écrire  $J = J_1^\sigma$  où  $\sigma = 10^{-3} \min(\rho_0, 1)$  et où  $J_1$  est encore un sous-intervalle de  $I$ . Notons alors  $C_J := \{(s, \varphi(s)) \mid s \in J\}$  et  $\rho_J$  la distance de  $C_J$  à  $U^c$ . Par convexité de  $\phi$  on a les majorations

$$\text{diam}(C_J) \leq 2\sigma \text{diam}(C_{J_1}) \leq 10^{-2}\rho_0 \text{diam}(C) \leq 10^{-2}\rho_J .$$

On peut donc appliquer notre corollaire à l'intervalle  $J$ . On trouve donc une constante  $H'$  qui ne dépend que de  $H$  et telle que la restriction de  $\varphi$  à tous ces intervalles  $J'$  est  $H'$ -quasisymétriquement convexe. On conclut alors à l'aide du corollaire 5.4.

On peut donc supposer que l'on a  $\tau = 10^{-2}$  et  $\rho_0 = 10^2$ . Notons  $E_C$  l'ellipsoïde de John de l'enveloppe convexe de  $C$ . Comme  $E_C$  est inclus dans une boule euclidienne de rayon  $\text{diam}(C)$  centrée en un point de  $C$ , on a l'inclusion  $10^2 E_C \subset U$ . Notre corollaire résulte alors du lemme technique suivant.  $\square$

**Lemme 7.13** Soient  $H \geq 1$ ,  $I = [a, b]$  un intervalle,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe,  $C$  la courbe plane  $C := \{(s, \varphi(s)) \mid s \in I\}$ ,  $E_C$  l'ellipsoïde de John de l'enveloppe convexe de  $C$ ,  $U := 10^2 E_C$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $H$ -quasisymétriquement convexe et strictement convexe telle que  $F(C) = 0$ . Alors  $\varphi$  est  $H_{13}$ -quasisymétriquement convexe sur l'intervalle  $I^{10^{-2}}$  avec  $H_{13} = (4H)^{15}$ .

**Démonstration** Par invariance affine, on peut supposer que l'ellipsoïde  $E_C$  est la boule euclidienne  $E_C = B(0, 1)$  et que l'on a  $F(0) = -1$ . Par le théorème de John, on a

l'inclusion  $C \subset B(0, 2)$ . On en déduit les inégalités  $-2 \leq a \leq -1$ ,  $1 \leq b \leq 2$ , puis  $\varphi(a) \leq \sqrt{3}$ ,  $\varphi(b) \leq \sqrt{3}$  et enfin, comme le segment joignant les extrémité de  $C$  ne traverse pas la boule unité,  $\varphi(a) \geq 0$ ,  $\varphi(b) \geq 0$  (voir figure 13.B). Comme le milieu de  $I$  est dans

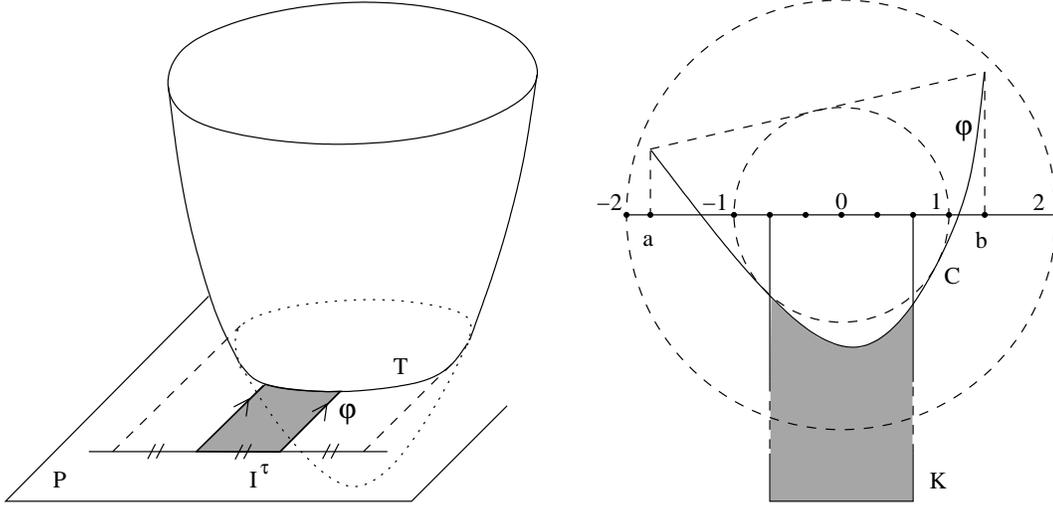


Figure 13:

A. Tranche d'un graphe  
quasisymétriquement convexe

B. La tranche est aussi  
quasisymétriquement convexe.

l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , il suffit de montrer que  $\varphi$  est  $H_{13}$ -quasisymétriquement convexe sur l'intervalle  $J := [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ . Pour cela, on va lui appliquer le lemme 7.11.a avec le compact

$$K := \{(s, t) / -\frac{2}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \text{ et } -10 \leq t \leq \varphi(s)\}.$$

Vérifions tout d'abord que l'hypothèse (iii) du lemme 7.11.a est satisfaite. Cela résulte simplement des inégalités, pour tout  $s$  dans  $J$ ,  $\varphi(s) \geq -2$  et  $|\varphi'(s)| \leq 6$ .

Il reste maintenant à majorer le quotient  $\frac{MH}{m}$  où  $M := \sup_K |\partial_t F|$  et  $m := \inf_K |\partial_t F|$ . Pour cela, étudions les fonctions  $F_s : [-10, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto F_s(t) := F(s, t)$  avec  $s$  dans  $J$ . Ce sont des fonctions convexes qui vérifient les propriétés suivantes

- ( $\alpha$ )  $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $F_s(t) \leq 0$  (par convexité de  $F$  sur l'enveloppe convexe de  $C$ )
- ( $\beta$ )  $-\frac{5}{3} \leq F_s(0) \leq -\frac{1}{3}$  (par convexité de  $F$  sur le segment  $[-2, 2] \times \{0\}$ )
- ( $\gamma$ )  $\exists t_s \in [-2, -\frac{1}{2}]$ ,  $F_s(t_s) = 0$  (c'est le réel  $t_s = \varphi(s)$ )
- ( $\delta$ )  $F'_s$  est  $4H(H+1)$ -quasisymétrique sur  $[-10, \frac{1}{2}]$  (cf. lemme 5.3.b et sa remarque).

Nous allons déduire de ces quatre propriétés l'encadrement, pour tout  $(s, t)$  dans  $K$ ,

$$\frac{1}{6} \leq -F'_s(t) \leq 7(3H)^{14}. \quad (20)$$

La première inégalité résulte de ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ). Montrons la deuxième. D'après ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ), pour tout  $t$  dans  $[-\frac{1}{2}, 0]$ , on a  $F_s(t) \geq -\frac{10}{3}$ . D'après ( $\alpha$ ) et ( $\gamma$ ), on a donc, pour tout  $t$  dans  $[-\frac{1}{2}, 0]$ ,  $|F'_s(t)| \leq \frac{20}{3}$ . Le lemme 4.4 avec  $\varepsilon = \frac{1}{20}$  donne alors, pour tout  $t$  dans  $[-10, 0]$ , la majoration  $|F'_s(t)| \leq \frac{20}{3}(2H+1)^{14} \leq 7(3H)^{14}$ .

On déduit de (20) la majoration cherchée  $\frac{MH}{m} \leq 42(3H)^{14} H \leq H_{13}$ .  $\square$

## 7.6 Invariance Projective

Nous pouvons maintenant généraliser en toute dimension les résultats de la section 5.5. C'est-à-dire démontrer la proposition 1.9 et en déduire l'invariance projective des graphes des fonctions localement quasisymétriquement convexes.

La proposition 1.9 résulte de la proposition suivante pour un compact  $\mathcal{E}$  formé d'une seule fonction. Cette proposition généralise la proposition 5.15 en toute dimension.

**Proposition 7.14 (Borne sur les birapports)** *Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{E}$  un compact de  $C^1(U, \mathbb{R})$  formé de fonctions strictement convexes. Alors, on a l'équivalence:*

$\forall K$  compact de  $U$ ,  $\exists H \geq 1$  tel que  $\forall F \in \mathcal{E}$ ,  $F|_K$  est  $H$ -quasisymétriquement convexe  
 $\iff \forall K$  compact de  $U$ , on a  $\sup_{F \in \mathcal{E}} \Delta_{F|_K} < \infty$ .

**Démonstration**  $\implies$  Nous utiliserons les deux affirmations suivantes qui résultent du corollaire 7.12 et de la proposition 6.6. Fixons  $\tau \in ]0, 1[$  et  $K$  un compact de  $U$ .

(a) *Il existe une constante  $H' \leq 1$  telle que, pour tout  $F$  dans  $\mathcal{E}$ , tout 2-plan  $P$  de  $\mathbb{R}^{N+1}$  et toute courbe plane  $T$  incluse dans  $P \cap \mathcal{G}_{F|_K}$  qui s'identifie dans un système de coordonnées affines de  $P$  au graphe d'une fonction convexe  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , la restriction de  $\varphi$  à  $I^\tau$  est  $H'$ -quasisymétriquement convexe.*

(b) *Il existe une constante  $\delta > 0$  telle que, pour tout  $F$  dans  $\mathcal{E}$  et tout 2-plan  $P$  de  $\mathbb{R}^{N+1}$ , si l'intersection  $P \cap \mathcal{G}_{F|_K}$  est le bord d'un ouvert convexe borné  $\Omega$  de  $P$ , alors cet ouvert convexe  $\Omega$  est  $\delta$ -hyperbolique.*

Supposons par l'absurde qu'il existe un compact  $K$  de  $U$ , une suite de fonctions  $F_n$  de  $\mathcal{E}$  et une suite  $(a_n, b_n, c_n, d_n)$  de quadruplets harmoniques dans  $\mathcal{G}_{F_n|_K}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n) = \infty. \quad (21)$$

Après extraction, notons  $F_\infty$  la limite dans  $\mathcal{E}$  de  $F_n$ , notons  $a_\infty, b_\infty, c_\infty$  et  $d_\infty$  les points limites de  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$  et notons  $P_\infty$  le 2-plan affine limite des 2-plans affines  $P_n$  contenant  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$ . On peut supposer que la projection sur  $\mathbb{R}^N$  de ces points limites sont dans l'intérieur de  $K$ .

Par hypothèse,  $F_\infty$  est strictement convexe. Donc, si le 2-plan  $P_\infty$  est tangent à  $\mathcal{G}_{F_\infty}$ , pour  $n$  grand, la courbe  $P_n \cap \mathcal{G}_{F_n|_K}$  est le bord d'un ouvert convexe borné  $\Omega_n$  de  $P_n$ . Le point (b) et la proposition 3.2 prouvent alors que la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est bornée. Contradiction.

On peut donc supposer que le 2-plan  $P_\infty$  est transverse à  $\mathcal{G}_{F_\infty}$ . Il existe alors un arc de courbe  $T_\infty$  dans  $P_\infty \cap \mathcal{G}_{F_\infty|_K}$  qui s'identifie, dans un système de coordonnées affines  $(v_\infty, i_\infty, j_\infty)$  du 2-plan  $P_\infty$ , au graphe d'une fonction strictement convexe  $\varphi_\infty : I_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  et tel que le point  $b_\infty$  est l'image du milieu de  $I_\infty$ . Cet arc de courbe  $T_\infty$  est limite d'ars

de courbes  $T_n$  dans  $P_n \cap \mathcal{G}_{F_n}$  qui s'identifient dans un système de coordonnées affines  $(v_n, i_n, j_n)$  du 2-plan  $P_n$  au graphe d'une fonction convexe  $\varphi_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Les suites  $v_n, i_n, j_n, I_n$  et  $\varphi_n$  convergeant vers  $v_\infty, i_\infty, j_\infty, I_\infty$  et  $\varphi_\infty$ . Quitte à réduire  $T_\infty$ , on peut s'arranger pour que ces arcs  $T_n$  soient inclus dans  $\mathcal{G}_{F_n|_K}$  et que tous les intervalles  $I_n$  et  $I_\infty$  sont égaux à  $I := ]0, 1[$ . Le point (a) et le lemme 5.6 prouvent que la restriction de  $\varphi_n$  à  $I_n^\tau$  a une dérivée  $H''$ -quasisymétrique, pour une constante  $H'' \geq 1$  indépendante de  $n$ . La proposition 5.15 appliquée au compact  $\mathcal{E}$  formé des fonctions  $\varphi_n$  et  $\varphi_\infty$  prouve alors que l'on a

$$\sup_{n \geq 1} \Delta_{\varphi_n|_{I^\tau}} < \infty .$$

Autrement dit, si les quatre points  $a_n, b_n, c_n, d_n$  étaient sur le graphe de  $\varphi_n|_{I^\tau}$  la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  serait bornée, ce qui fournirait la contradiction cherchée.

On se ramène à cette situation par la même méthode qu'en dimension 1 en distinguant quatre cas.

**1<sup>er</sup> cas :** *Les quatre points  $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$  sont distincts.*

Le quadruplet  $(a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty)$  est harmonique et la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  converge vers  $\psi_{F_\infty}(a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty)$ . Contradiction.

**2<sup>ème</sup> cas :**  *$a_\infty = b_\infty = c_\infty \neq d_\infty$  (ou  $c_\infty = d_\infty = a_\infty \neq b_\infty$ ).*

Pour  $n$  grand, les trois points  $a_n, b_n, c_n$  sont sur le graphe de  $\varphi_n|_{I^\tau}$ . On construit alors une suite de quadruplets harmoniques  $(a_n, b_n, c'_n, d'_n)$  sur ce graphe tels que la suite  $d'_n$  converge vers un point  $d'_\infty \neq b_\infty$  (voir figure 12.A). Le lemme 5.12 prouve alors que la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est bornée. Contradiction.

**3<sup>ème</sup> cas :**  *$b_\infty = c_\infty = d_\infty \neq a_\infty$  (ou  $d_\infty = a_\infty = b_\infty \neq c_\infty$ ).*

Pour  $n$  grand, les trois points  $b_n, c_n, d_n$  sont sur le graphe de  $\varphi_n|_{I^\tau}$ . On construit alors une suite de quadruplets harmoniques  $(a'_n, b_n, c'_n, d_n)$  sur ce graphe tels que la suite  $a'_n$  converge vers un point  $a'_\infty \neq b_\infty$  (voir figure 12.B). Les lemmes 5.13 prouvent alors que la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est bornée. Contradiction.

**4<sup>ème</sup> cas :**  *$a_\infty = b_\infty = c_\infty = d_\infty$ .*

Pour  $n$  grand, les quatre points  $a_n, b_n, c_n, d_n$  sont sur le graphe de la restriction de  $\varphi_n$  à  $I_n^\tau$  et la suite  $\psi_{F_n}(a_n, b_n, c_n, d_n)$  est bornée. Contradiction.

Ceci termine la démonstration de l'implication  $\implies$ .

$\impliedby$  C'est exactement la même démonstration qu'en dimension 1 (proposition 5.15).  $\square$

**Corollaire 7.15 (Les tranches bornées sont hyperboliques)** *Soient  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quasisymétriquement convexe et  $\Omega$  un ouvert convexe borné d'un sous-espace affine  $P$  de  $\mathbb{R}^{N+1}$  dont le bord  $\partial\Omega$  est inclus dans le graphe  $\mathcal{G}_F$ . Alors ce convexe  $\Omega$  est hyperbolique.*

**Démonstration** cela résulte du point (b) de la démonstration ci-dessus. On peut aussi voir ce corollaire comme une conséquence des propositions 1.8 et 7.14.  $\square$

Le corollaire suivant généralise le corollaire 5.17 en toute dimension.

**Corollaire 7.16 (Invariance projective)** *Soient  $U$  et  $U'$  deux ouverts convexes de  $\mathbb{R}^{m-1}$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G : U' \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions  $C^1$  strictement convexes. On suppose qu'il existe une transformation projective  $\Phi$  de  $\mathbb{P}^m$  qui envoie le graphe de  $F$  sur celui de  $G$ . Alors,  $F$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact si et seulement si  $G$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact.*

**Démonstration** Cela résulte de la proposition 1.9 et de l'invariance par transformation projective des quadruplets harmoniques et de leur birapport.  $\square$

## 8 Convexes hyperboliques

Nous généralisons dans cette partie les résultats de la partie 6 en toute dimension. Le but principal est la démonstration du théorème 1.4 et du corollaire 1.5.

### 8.1 Ouverts quasisymétriquement convexes

Comme en dimension 2, on a le lemme suivant qui affirme que, dans la définition 1.3, le choix du recouvrement ouvert et des systèmes de coordonnées projectives importe peu.

**Lemme 8.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert quasisymétriquement convexe de  $\mathbb{P}^m$ . Alors, chaque fois que, dans un système de coordonnées projectives, un ouvert de  $\partial\Omega$  est le graphe d'une fonction convexe  $F$ , cette fonction  $F$  est quasisymétriquement convexe sur tout compact.*

**Démonstration** Cela résulte du lemme 7.2 et du corollaire 7.16.  $\square$

Le lemme suivant généralise le lemme 6.4 en dimension supérieure.

**Lemme 8.2** *Pour tout  $\tau \in ]0, 1[$  et tout ouvert quasisymétriquement convexe et borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$ , il existe  $H \geq 1$  tel que  $\Omega$  est  $(H, \tau)$ -quasisymétriquement convexe. En particulier, on a  $H_\Omega < \infty$ .*

**Démonstration** C'est la même qu'en dimension 2 en remplaçant le lemme 6.2 par le lemme 8.1.  $\square$

## 8.2 Hyperbolicité et quasisymétrie convexité

Le théorème 1.4 est une conséquence de la proposition plus précise suivante qui généralise la proposition 6.6.

**Proposition 8.3** Fixons  $\tau \in ]0, 1[$  et  $m \geq 2$ . On a

- a)  $\forall \delta > 0, \exists H \geq 1, \forall \Omega$  ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^m$ ,  
( $\Omega$  est  $\delta$ -hyperbolique)  $\implies$  ( $\Omega$  est  $(H, \tau)$ -quasisymétriquement convexe).  
b)  $\forall H \geq 1, \exists \delta > 0, \forall \Omega$  ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^m$ ,  
( $\Omega$  est  $(H, \tau)$ -quasisymétriquement convexe)  $\implies$  ( $\Omega$  est  $\delta$ -hyperbolique).

Comme en dimension 2, on en déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 8.4** Fixons  $\tau, \tau' \in ]0, 1[$  et  $m \geq 2$ . Alors  $\forall H \geq 1, \exists H' \geq 1, \forall \Omega, \Omega'$  ouverts convexes bornés de  $\mathbb{R}^m$  qui sont projectivement équivalents, on a l'implication:

$$(\Omega \text{ est } (H, \tau)\text{-quasisymétriquement convexe}) \implies (\Omega' \text{ est } (H', \tau')\text{-quasisymétriquement convexe}).$$

**Démonstration de la proposition 8.3** a) C'est la même qu'en dimension 2.

b) C'est la même qu'en dimension 2 en remplaçant le corollaire 4.10 par le corollaire 7.9 et la proposition 5.15 par la proposition 7.14.  $\square$

**Démonstration du corollaire 1.5** Cela résulte du théorème 1.4 avec le lemme 7.8 pour les points a) & b) et avec la proposition 7.3 pour le point c). On remarquera qu'un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}^m$  à bord analytique réel est toujours strictement convexe.  $\square$

## Références

- [1] L.AHLFORS - Lectures on quasiconformal mappings, Wadthworth (1966).
- [2] L.AHLFORS, A.BEURLING - The boundary correspondance under quasiconformal mappings, Acta Math. 96 (1956) p.125-142.
- [3] Y.BENOIST - Convexes divisibles I, preprint (2001) et Comp. Rend. Ac. Sc. 332 (2001) p.387-390.
- [4] J.P.BENZECRI - Sur les variétés localement affines et localement projectives, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960) p.229-332.
- [5] E.BIERSTONE, P.MILMAN - Semianalytic and subanalytic sets, Publ. IHES 67 (1988) p.5-42.
- [6] J.FARAUT, A.KORANYI - Analysis on symmetric cones, Oxford Math. Mono. (1994).
- [7] E.GHYS, P. DE LA HARPE - Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, PM 83 Birkhäuser(1990).
- [8] W.GOLDMAN - Projective Geometry, Notes de cours a Maryland (1988).
- [9] M.GROMOV - Hyperbolic groups, in "Essays in group theory" MSRI Publ. 8 (1987) p.75-263.
- [10] F.JOHN - Extremum problem with inequalities as subsidiary conditions, Courant anniversary volume (1948) p.187-204.
- [11] A.KARLSSON, G.NOSKOV - The Hilbert metric and Gromov hyperbolicity, l'Ens. Math 48 (2002) p.73-89.
- [12] S.KRANTZ - Lipschitz spaces, smoothness of functions, and approximation theory, Exposition. Math. 1 (1983) p.193-260.

Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris

benoist@dma.ens.fr, www.dma.ens.fr/~benoist