Convexes divisibles IV

Yves Benoist

ABSTRACT **Divisible convex sets IV**

Let Ω be an indecomposable properly convex open subset of the real projective 3-space which is *divisible* i.e. for which there exists a torsion free discrete group Γ of projective transformations preserving Ω such that the quotient $M := \Gamma\backslash\Omega$ is compact. We study the structure of M and of $\partial\Omega$, when Ω is not strictly convex:

The union of the properly embedded triangles in Ω projects in M onto an union of finitely many disjoint tori and Klein bottles which induces an atoroidal decomposition of M.

Every non extremal point of $\partial\Omega$ is on an edge of a unique properly embedded triangle in Ω and the set of vertices of these triangles is dense in the boundary of Ω (see Figs 1 to 4).

Moreover, we construct examples of such divisible convex open sets Ω.

1 Introduction

1.1 Présentation générale

Thématiquement, cet article fait suite aux articles Convexes divisibles I, II et III. Néanmoins ces quatre articles sont, pour l'essentiel, logiquement indépendants.

L'objectif de cette série est d'étudier les ouverts proprement convexes Ω de l'espace projectif réel de dimension m qui sont *divisibles*, c'est-à-dire pour lesquels il existe un groupe discret sans torsion Γ de transformations projectives préservant Ω tel que le quotient $M := \Gamma\backslash\Omega$ est compact. Dans [2], j'étudiais le cas où Ω est strictement[1] convexe: hyperbolicité de Γ, dynamique du flot géodésique sur M et régularité du bord $\partial\Omega$. Dans [3], je décrivais l'adhérence de Zariski des groupes Γ: si Ω n'est ni homogène ni décomposable, le groupe Γ est Zariski dense dans $\mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$. Dans [4], je montrais une propriété de fermeture de l'espace des déformations de ces convexes divisibles.

[1] *proprement* convexe, *strictement* convexe et convexe *décomposable* sont définis en 1.2

Le but de ce quatrième article est d'étudier ces ouverts en dimension $m = 3$.

Le résultat principal de cet article décrit la structure du bord $\partial\Omega$ et du quotient M, lorsque Ω est indécomposable :

Tout sous-groupe $\mathbb{Z}^2 \subset \Gamma$ stabilise un triangle proprement plongé dans Ω et, réciproquement, la réunion des triangles proprement plongés dans Ω se projette dans M sur une réunion finie de tores et de bouteilles de Klein disjoints.

Si Ω n'est pas strictement convexe, tout point non extrémal du bord $\partial\Omega$ est sur le bord d'un unique triangle proprement plongé dans Ω et les sommets de ces triangles forment une partie dense de $\partial\Omega$ (voir figures 1 à 4).

Le lecteur topologue aura reconnu dans le premier énoncé un analogue géométrique de la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson de M.

Comme conséquence du deuxième énoncé, l'ensemble des points extrémaux et l'ensemble des points non extrémaux de $\partial\Omega$ sont tous les deux denses dans $\partial\Omega$.

On sait, grâce à ([13], [15], [12] et [2]) qu'il existe de nombreux ouverts *strictement* convexes divisibles. Nous terminerons cet article par la construction d'ouverts proprement convexes, indécomposables et divisibles qui ne sont pas strictement convexes.

Je remercie M. Kapovich et F. Paulin pour d'intéressantes discussions sur ce sujet.

1.2 Définition des ouverts convexes divisibles

Précisons maintenant plus en détail nos définitions et nos résultats.

Notons $V := \mathbb{R}^{m+1}$, $\mathbb{S}^m = \mathbb{S}(\mathbb{R}^{m+1}) := \{\text{demidroites de } V\}$ la *sphère projective* de $\mathbb{R}^{m+1}$. C'est un revêtement à deux feuillets de l'espace projectif $\mathbb{P}^m$. Soit $\mathrm{SL}^{\pm}(m+1,\mathbb{R})$ le groupe des transformations projectives de $\mathbb{S}^m$: c'est aussi le quotient du groupe linéaire $\mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R})$ par le groupe des homothéties positives. Un ouvert Ω de $\mathbb{S}^m$ est dit *convexe* si son intersection avec tout grand cercle de $\mathbb{S}^m$ est connexe. Il est dit *proprement convexe* si, en outre, il existe une hypersphère projective de $\mathbb{S}^m$ qui ne rencontre pas l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω. Il est dit *strictement convexe* si le bord $\partial\Omega := \overline{\Omega} - \Omega$ ne contient pas de segments non triviaux. Un point de $\partial\Omega$ est dit *extrémal* s'il n'appartient à aucun segment ouvert inclus dans $\partial\Omega$.

On dit qu'un ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{S}^m$ est *décomposable* si, en notant C le cône de V d'image Ω, il existe une décomposition en somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ telle que $C = C_1 + C_2$ avec $C_1 \subset V_1$ et $C_2 \subset V_2$. Sinon, Ω est dit *indécomposable*.

On se donne un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}^{\pm}(m+1,\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^m$ et tel que le quotient $\Gamma\backslash\Omega$ est compact. On dit alors que Γ *divise* Ω et que Ω est *divisible*. Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer Γ sans torsion et $\Gamma \subset SL(m+1,\mathbb{R})$ ce que nous ferons implicitement dans tout cet article. Le quotient $M = \Gamma\backslash\Omega$ est alors une variété C^∞ orientée (sans bord) que l'on appelle *variété projective proprement convexe*.

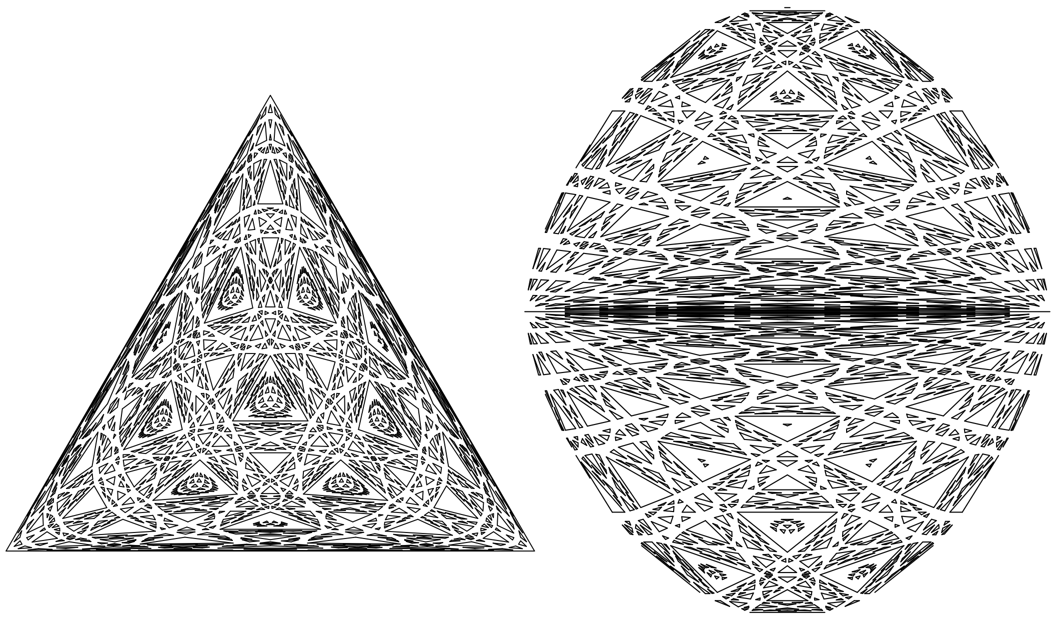

Figure 1: Le bord d'un convexe divisible Ω de dimension 3 non strictement convexe. Ce convexe est celui construit dans la proposition 4.2 avec $a = 2$ et $d = 3$. Il est vu de dessus et de face. Il admet une symétrie σ_5 par rapport au plan horizontal qu'il rencontre en un triangle T. Tous les bords des triangles dessinés sont dans le bord de Ω. Ils sont disjoints et denses d'après le théorème 1.1.b et 1.1.g.

Précisons encore quelques définitions bien classiques. Un *r-simplexe* ouvert $T \subset \mathbb{S}^m$ est l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de $r + 1$ points linéairement indépendants. Un *triangle* est un 2-simplexe. Un *tétraèdre* est un 3-simplexe. On dit qu'un r-simplexe $T \subset \Omega$ est *proprement plongé* si $\partial T \subset \partial\Omega$.

Dans la plupart des résultats de cet article, l'entier m sera égal à 3.

Terminons par quelques définitions relatives aux variétés de dimension 3.

Une variété à bord compacte connexe orientée N de dimension 3 est dite *irréductible*, si toute sphère $\mathbb{S}^2$ plongée dans N borde une boule. C'est le cas pour toute variété de dimension 3 dont le revêtement universel est difféomorphe à un convexe de $\mathbb{R}^3$, par exemple $M = \Gamma\backslash\Omega$. La variété N est dite *atoroïdale* si, en outre, tout sous-groupe $\mathbb{Z}^2 \subset \pi_1(N)$ est conjugué à un sous-groupe du π_1 d'une composante du bord ∂N, et si N n'est ni une boule, ni un fibré en intervalle sur le tore ou la bouteille de Klein, ni le produit du disque par le cercle.

1.3 Principaux résultats

Le théorème suivant résume les propositions 2.9, 3.1, 3.2, 3.7, 3.8 et 3.10.

Theorem 1.1 *Soient $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe et indécomposable $\Omega \subset \mathbb{S}^3$ et $M := \Gamma\backslash\Omega$. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles T proprement plongés dans Ω et, pour T dans $\mathcal{T}$, $\Gamma_T := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(T) = T\}$*

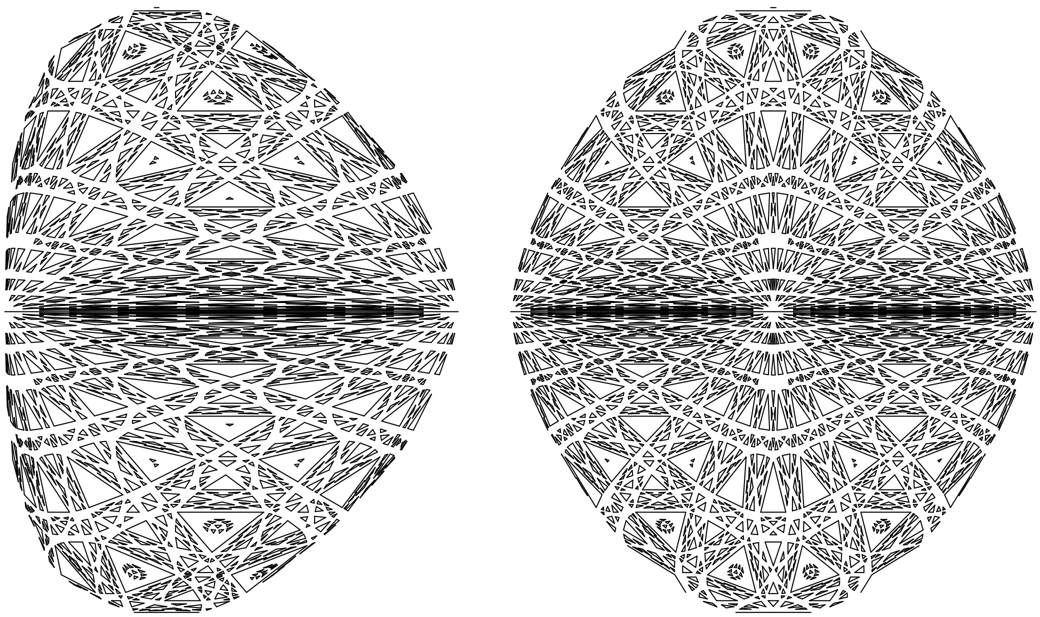

Figure 2: Le convexe Ω de la figure 1 vu de droite et de derrière. On aperçoit nettement l'action sur les triangles du groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ qui stabilise le triangle horizontal T. L'existence de ce groupe est assurée par le théorème 1.1.c. Les figures 1 à 4 ne représentent que les triangles dont l'aire vue est minorée par une constante $\varepsilon_0 > 0$. Il n'y a qu'un nombre fini de tels triangles: cela résulte du théorème 1.1.e.

le stabilisateur de T. Alors,
a) Tout sous-groupe Γ_0 de Γ isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ stabilise un unique triangle $T \in \mathcal{T}$.
b) Pour tout T_1, T_2 dans $\mathcal{T}$ avec $T_1 \neq T_2$, on a $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 = \emptyset$.
c) Pour tout T dans $\mathcal{T}$, le groupe Γ_T contient un sous-groupe d'indice 2 isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.
d) Le groupe Γ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $\mathcal{T}$.
e) L'image dans M de ces triangles est une réunion finie Σ de tores et de bouteilles de Klein disjoints. Si on découpe M le long de Σ, les composantes N obtenues sont atoroïdales.
f) Tout segment non trivial $\sigma \subset \partial\Omega$ est inclus dans le bord ∂T d'un triangle $T \in \mathcal{T}$.
g) Si Ω n'est pas strictement convexe, l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets des triangles T de $\mathcal{T}$ est dense dans $\partial\Omega$.

Remarques - Pour une description des ouverts proprement convexes divisibles décomposables, voir la section 4.1.
- Lorsque Ω est strictement convexe, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ sont, bien sûr, vides. Le fait que $\mathcal{T}$ est non vide pour Ω non strictement convexe est dû à Benzecri (voir le fait 2.1.d). Il résulte du théorème 1.1.d que $\mathcal{T}$ est dénombrable.
- La décomposition du e) est donc (une version géométrique de) la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson de la 3-variété irréductible M (voir par exemple les surveys [20], [6] ou le paragraphe 1.7 de [14]). Les composantes N obtenues dans cette décomposition sont atoroïdales et ne sont donc pas des variétés de Seifert. Lorsque Ω n'est pas strictement, ces composantes N ont un bord non vide et sont donc Haken. D'après le théorème

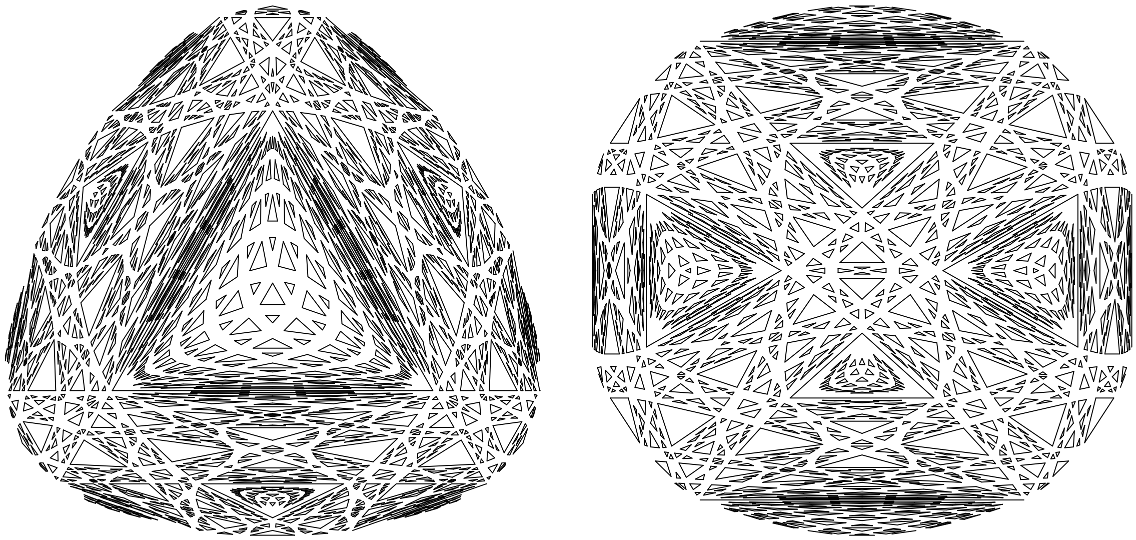

Figure 3: Le convexe Ω de la figure 1 vu de dessus et de face dans un autre repère projectif de $\mathbb{S}^3$. La symétrie par rapport au plan horizontal médian est la symétrie σ_4. Dans cette vue, le triangle T est aussi dans un plan horizontal. Cette vue met en évidence l'existence de 2-plans (verticaux ici) qui contiennent une infinité de côtés de triangles... ce phénomène est vérifié dès que Ω est engendré par des reflexions projectives.

d'hyperbolisation de Thurston ([21], [22], [23] ou le livre [14]), les intérieurs de ces variétés N sont difféomorphes à des quotients de volume fini de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.

Des points a) et c) du théorème 1.1, on déduit aussitôt :

Corollaire 1.2 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{S}^3$ *un ouvert proprement convexe,* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret sans torsion qui divise* Ω *et* $M := \Gamma \backslash \Omega$*. Alors, on a les équivalences,*

$$\Omega \text{ est strictement convexe} \iff \Gamma \text{ ne contient pas } \mathbb{Z}^2 \iff M \text{ est atoroïdale.}$$

Dans ce cas, la conjecture d'hyperbolisation de Thurston impliquerait que le groupe abstrait Γ est isomorphe à un réseau cocompact de $\mathrm{SO}(3,1)$.

En dimension 2, mis à part le triangle, tous les ouverts proprement convexes divisibles sont strictement convexes (voir [5] ou le corollaire 2.2 ci-dessous). En dimension 3, la situation est bien différente: la proposition suivante et sa démonstration prouvent qu'il existe beaucoup d'exemples auxquels s'appliquent le théorème 1.1.

Proposition 1.3 *Il existe des sous-groupes discrets Zariski denses* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ *qui divisent un ouvert proprement convexe mais non strictement convexe* Ω *de* $\mathbb{S}^3$

2 Sous groupes abéliens de Γ.

Le but de cette partie est de décrire les sous-groupes Γ_0 isomorphes à $\mathbb{Z}^2$ d'un groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ qui divise un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^3$ (proposition 2.9).

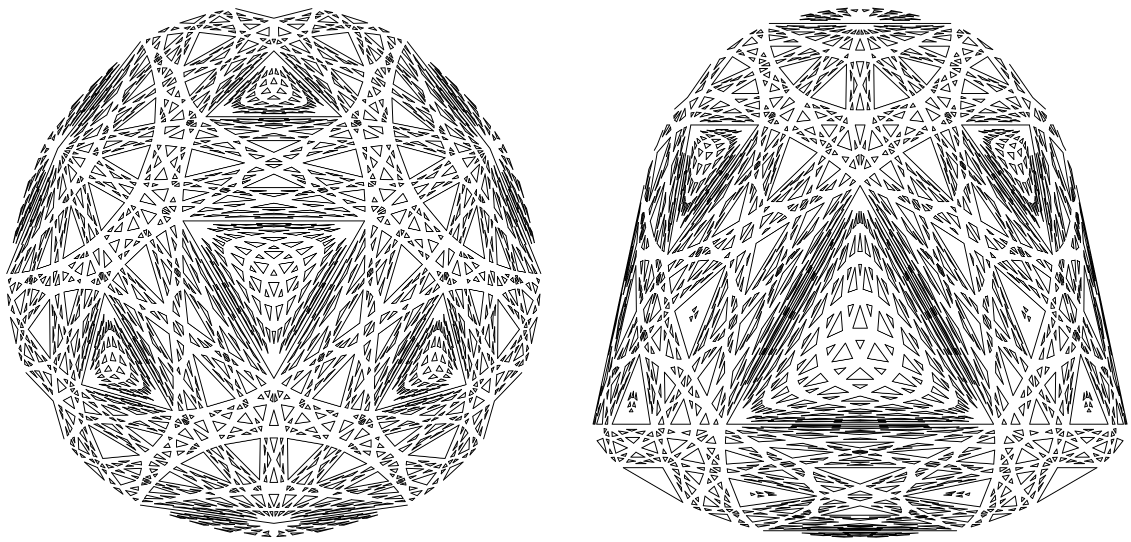

Figure 4: Le convexe Ω de la figure 1 vu de dessus et de face dans un troisième repère projectif de $\mathbb{S}^3$. Ces changements de repères projectifs permettent de zoomer sur des parties du bord de Ω. Ils illustrent bien le fait que tous les triangles jouent essentiellement le même rôle conformément au théorème 1.1.d qui affirme que le groupe Γ qui divise Ω échange ces triangles avec un nombre fini d'orbites (une seule dans cet exemple).

On commence pour cela à décrire tous les groupes discrets $\Gamma_0 \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ isomorphes à $\mathbb{Z}^2$ qui préservent un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^3$ (proposition 2.7).

2.1 Géométrie des convexes divisibles

Nous aurons besoin de quelques propriétés dues à Benzecri sur la géométrie du bord des convexes divisibles.

Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{S}^m$. Une *hypersphère d'appui* de $\overline{\Omega}$ est une hypersphère de $\mathbb{S}^m$ qui rencontre $\overline{\Omega}$ mais pas Ω.

On appelle *facette* de $\overline{\Omega}$ l'intérieur relatif F d'une partie extrémale de $\overline{\Omega}$ obtenue en prenant l'intersection de $\overline{\Omega}$ avec une sous-sphère projective. Ainsi, un point de $\overline{\Omega}$ est une facette si et seulement si il est extrémal. Les facettes forment donc une partition de $\overline{\Omega}$. Le *support* de la facette F est la plus petite sphère projective contenant F. La *dimension* de F est la dimension de son support. Une *arête* est une facette de dimension 1. Le *cosupport* de F est l'intersection des hypersphères d'appui de $\overline{\Omega}$ contenant F. Une facette F est dite *angulaire* si son support et son cosupport coïncident. Il est équivalent de dire que F est l'intérieur relatif d'une partie de $\overline{\Omega}$ obtenue en prenant l'intersection de $\overline{\Omega}$ avec une facette d'un simplexe S contenant Ω (voir figure 5). On note X_m l'espace des ouverts proprement convexes de $\mathbb{S}^m$ muni de la distance de Hausdorff et $X_{m,0} := \{(\Omega, x) \mid \Omega \in X_m\ ,\ x \in \Omega\}$. Ce sont des espaces localement compacts.

Fait 2.1 (Benzecri) *Soit Ω un ouvert proprement convexe divisible de $\mathbb{S}^m$.*
a) Le groupe $G_m := \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ agit proprement et avec quotient compact sur $X_{m,0}$.
b) L'orbite de Ω sous le groupe G_m est fermée dans X_m
c) Si Ω est indécomposable, alors $\overline{\Omega}$ ne contient pas de facettes angulaires.
d) Si Ω n'est pas strictement convexe, alors Ω contient un triangle proprement plongé.

Démonstration Voir [5] proposition V.3.3 et V.3.14. $\diamondsuit$

Réexplicitons le point c) pour des facettes de dimension $m-1$, $m-2$ et 0:

Corollaire 2.2 *Soit Ω un ouvert proprement convexe divisible indécomposable de $\mathbb{S}^m$.*
a) Le convexe $\overline{\Omega}$ ne contient pas de facette de dimension $m-1$.
b) Toute facette de dimension $m-2$ de $\overline{\Omega}$ est incluse dans un seul hyperplan d'appui à $\overline{\Omega}$.
c) Le bord $\partial\Omega$ ne contient pas de point extrémal angulaire.

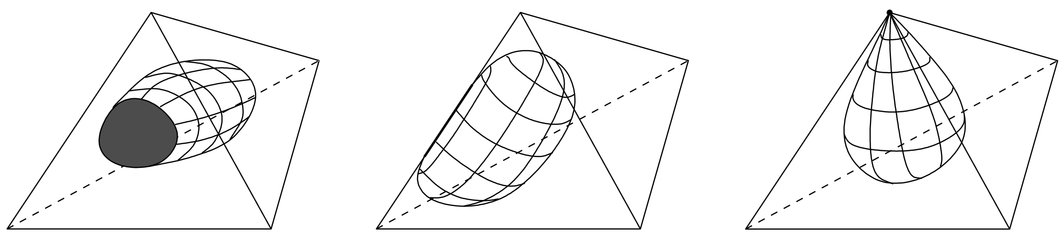

Figure 5: 2-facette, arête angulaire et point extrémal angulaire sont exclus par le corollaire 2.2

2.2 Éléments préservant Ω

Rassemblons dans cette partie quelques lemmes préparatoires qui nous seront utiles pour la démonstration de la proposition 2.7.

Le lemme suivant est un exercice qui rassemble quelques propriétés des applications linéaires qui préservent un ouvert proprement convexe.

Lemme 2.3 *Soit $g \in \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ un élément qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^m$. Alors*
a) Le rayon spectral de g est valeur propre de g.
b) Si g est unipotent, alors l'entier $k_g := \max\{k \in \mathbb{N} \mid (g-1)^k \neq 0\}$ est pair.

Rappelons que le *rayon spectral* est le plus grand des modules des valeurs propres de g. Rappelons aussi qu'un élément g de $\mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ est *unipotent*, si $(g-1)^m = 0$.

Démonstration a) Voir le lemme 3.2 de [4].
b) Pour $x \in \Omega$ en dehors de $\mathrm{Ker}(g-1)^{k_g}$, si k_g est impair, le point $\lim_{n\to\infty} g^{-n}x = -\lim_{n\to\infty} g^n x$ est dans $\overline{\Omega} \cap -\overline{\Omega}$. $\diamondsuit$

Le point a) de ce lemme admet le corollaire suivant

Corollaire 2.4 *Soit $\Gamma_0 \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^3$. Alors les valeurs propres des éléments de Γ_0 sont réelles.*

Démonstration Supposons par l'absurde que Γ_0 contient un élément g_0 dont une valeur propre n'est pas réelle. Comme g_0 et g_0^{-1} vérifient le point a) du lemme 2.3, g_0 a deux valeurs propres réelles positives α_0, β_0 et deux valeurs propres non réelles λ_0, $\overline{\lambda_0}$ avec $\alpha_0 < |\lambda_0| < \beta_0$.

Le commutant de g_0 dans $\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}^*$. Le groupe Γ_0 s'identifie donc à un sous-groupe discret isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}^*$ formé de triplets $g = (\alpha, \beta, \lambda)$ tels que $\alpha\beta|\lambda|^2 = 1$ et tels que,

$$\lambda \notin \mathbb{R}^* \Longrightarrow (0 < \alpha < |\lambda| < \beta \ \text{ ou } \ 0 < \beta < |\lambda| < \alpha)$$

En appliquant cette hypothèse aux éléments g^n ou $g_0 g^n$ pour n grand, on en déduit que pour tout $g = (\alpha, \beta, \lambda)$ dans Γ_0, on a $\alpha\beta|\lambda|^2 = 1$ et $\max(\alpha, \beta) \geq 1$.

La projection de Γ_0 dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ devrait alors être discrète, cocompacte et formée de couples (α, β) tels que $\max(\alpha, \beta) \geq 1$. Contradiction. $\diamondsuit$

Le lemme suivant est une légère amélioration du lemme 2.3.b.

Lemme 2.5 *Soit $G \subset \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ un groupe abélien fermé et $\Gamma_0 \subset G$ un sous-groupe discret cocompact qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^m$. Alors, pour tout élément unipotent $g \in G$, l'entier $k_g := \max\{k \in \mathbb{N} \mid (g-1)^k \neq 0\}$ est pair.*

Démonstration C'est la même démonstration en utilisant le lemme suivant. $\diamondsuit$

Lemme 2.6 *Soient $G \subset \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ un groupe abélien fermé, $\Gamma_0 \subset G$ un sous-groupe discret cocompact, $x \in \mathbb{S}^m$ et $x_0 \in \overline{Gx}$.*

Si $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} g^n x$ avec $g \in G$, ou si x_0 est G-invariant, alors on a $x_0 \in \overline{\Gamma_0 x}$.

Démonstration Dans le premier cas, il existe une suite croissante $k_n \geq 0$ et une suite $\gamma_n \in \Gamma_0$ telle que $g^{k_n}\gamma_n^{-1} \to 1$. On a alors $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n x$.

Dans le deuxième cas, il existe une suite $g_n \in G$ telle que $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} g_n x$ et une suite $\gamma_n \in \Gamma_0$ telle que $g_n\gamma_n^{-1} \to h \in G$. On a alors $x_0 = hx_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n x$. $\diamondsuit$

2.3 Groupes abéliens préservant Ω

La proposition suivante n'est qu'une première étape vers la proposition 2.9.

Notons $e_1, \ldots, e_4$ la base standard de $\mathbb{R}^4$, $e_1^*, \ldots, e_4^*$ la base duale et E_{ij} les matrices de rang un $E_{ij} := e_i \otimes e_j^*$.

Proposition 2.7 *Soit* $\Gamma_0 \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret isomorphe à* $\mathbb{Z}^2$ *qui préserve un ouvert proprement convexe* Ω *de* $\mathbb{S}^3$*. Alors, à conjugaison près,* Γ_0 *est un sous-groupe cocompact dans un des groupes connexes* G *dont l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *fait partie de la liste suivante avec* $\beta \geq 0$ *et* $\varepsilon \geq 0$ *:*
$\mathfrak{g}_A = \mathbb{R}(E_{12} + E_{24}) \oplus \mathbb{R}(E_{13} + E_{34})$,
$\mathfrak{g}_B$ *est un hyperplan de* $\mathfrak{a} := \{X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum x_i = 0\}$,
$\mathfrak{g}_C = \{(x+z)E_{11} + (y+z)E_{22} + zE_{33} + zE_{44} + (x+\beta y)E_{34} \mid x, y, z \in \mathbb{R},\ x+y+4z = 0\}$,
$\mathfrak{g}_D = \mathbb{R}(-3E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44} + \varepsilon E_{24}) \oplus \mathbb{R}(E_{23} + E_{34})$.

Remarque Nous renvoyons le lecteur à la démonstration ci-dessous pour une présentation matricielle de ces algèbres de Lie $\mathfrak{g}$. Nous le renvoyons aux sections 2.4 et 2.5 pour une description au cas par cas de la géométrie de l'action de G sur la sphère $\mathbb{S}^3$. Nous y verrons en particulier que chacun des groupes G de cette liste préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^3$.

Démonstration Lorsqu'un groupe discret résoluble $\Gamma_0 \subset \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ est déployé, i.e. que tous les éléments de Γ_0 ont des valeurs propres réelles, il existe un unique groupe fermé résoluble connexe déployé $G \subset \mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ tel que $\Gamma_0 \cap G$ est d'indice fini dans Γ_0 et cocompact dans G. En outre, dans une base convenable, G est un groupe de matrices triangulaires supérieures. On peut appliquer, grace au corollaire 2.4, cette assertion à notre groupe Γ_0: le groupe G est alors isomorphe à $\mathbb{R}^2$. Supposons tout d'abord $\Gamma_0 \subset G$.

- Si G est unipotent, $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^2$ est une algèbre de Lie dont tous les éléments non nuls vérifient $X^2 \neq 0$ et $X^3 = 0$ (lemme 2.5). L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donc, dans une base convenable, l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}_A := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} . \tag{1}$$

- Si G est diagonalisable, on est dans le cas (B).

- Rappelons que tout sous-groupe nilpotent connexe déployé maximal de $\mathrm{SL}(m+1,\mathbb{R})$ est formé de blocs de groupes de matrices triangulaires à diagonales scalaires. Si le groupe $G \simeq \mathbb{R}^2$ n'est ni diagonalisable ni unipotent, la taille de ces blocs est $2+2$, $1+1+2$ ou $1+3$. Comme G ne contient pas d'élément unipotent g avec $k_g = 1$ (lemme 2.5), la taille $2+2$ est exclue et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est, dans une base convenable, une des algèbres de Lie suivantes, avec $\beta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{g}_C(\beta) := \left\{ \begin{pmatrix} x+z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y+z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & x+\beta y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \ ,\ x+y+4z = 0 \right\} , \tag{2}$$

$$\mathfrak{g}_D(\varepsilon) := \left\{ \begin{pmatrix} -3x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \varepsilon x \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} . \tag{3}$$

Il reste à vérifier que $\varepsilon \geq 0$ et $\beta \geq 0$. Sinon, on construit deux éléments g et h de G tels que, pour w dans un ouvert dense de $\mathbb{S}^m$, on a $\lim_{n\to\infty} g^n w = -\lim_{n\to\infty} h^n w$. Ces éléments g et h sont donnés par $(x, y, z) = (-4, 0, 1)$ et $(0, -4, 1)$ dans le premier cas et par $(x, y) = (1, 0)$ et $(0, 1)$ dans le deuxième cas. Ce qui contredit le lemme 2.6.

Lorsqu'on ne suppose pas $\Gamma_0 \subset G$, on applique le raisonnement ci-dessus à l'intersection $\Gamma_0 \cap G$ et on remarque que Γ_0 est inclus dans le centralisateur de G. Les conditions sur la positivité des valeurs propres des éléments de Γ_0 (lemme 2.3.b) assurent alors, dans chacun des cinq cas, que l'on a $\Gamma_0 \subset G$. $\diamondsuit$

2.4 Éléments unipotents

Le lemme suivant nous permettra d'éliminer le cas (A) dans la démonstration de la proposition 2.7.

Lemme 2.8 *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ un sous-groupe discret qui divise un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^3$. Alors $\Gamma \setminus \{1\}$ ne contient pas d'éléments unipotents.*

Pour montrer ce lemme, nous aurons besoin de quelques nouvelles définitions.

On notera $\dot{v} = [x_1, \ldots, x_{m+1}]$ l'image dans $\mathbb{S}^m$ d'un vecteur non nul $v = (x_1, \ldots, x_{m+1})$ de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Rappelons que tout ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{S}^m$ est muni d'une distance d_Ω appelée *distance de Hilbert* et définie par, pour tout x, y dans Ω, $d_\Omega(x, y) = |\log((a, b, x, y))|$ où a et b sont les deux points du bord de Ω tels que a, b, x et y sont alignés et où (a, b, x, y) est le birapport de ces quatre points. Les segments sont des géodésiques pour cette distance et toute transformation $g \in \mathrm{SL}(m+1, \mathbb{R})$ qui préserve Ω, est une isométrie pour d_Ω.

Démonstration du lemme 2.8 Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer Γ sans torsion. Introduisons le diamètre d'injectivité δ_M du quotient $M = \Gamma\backslash\Omega$ qui est défini par

$$\delta_M := \inf\{d_\Omega(x, gx) \mid x \in \Omega\ ,\ g \in \Gamma \setminus \{1\}\ \}.$$

Comme l'action de Γ sur Ω est propre, que Γ est sans torsion et que Γ a un domaine fondamental compact F dans Ω, cet infimum peut être pris sur F et est donc non nul: on a $\delta_M > 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un élément unipotent $g \neq 1$ dans Γ. Soit $k \leq 3$, le plus grand entier tel que $(g-1)^k \neq 0$. D'après le lemme 2.3, k est pair. On a donc

$k=2$. Choisissons encore un point $x_0 \in \Omega$ en dehors du noyau de $(g-1)^k$. Dans une base convenable de $\mathbb{R}^4$, on a $x_0 = [0,0,0,1]$ et $\log(g)$ est sous forme réduite de Jordan $g = Id + E_{23} + E_{34} + \frac{1}{2}E_{24}$ de sorte que, pour $n \in \mathbb{Z}$, les points $x_n = g^n x_0$ ont pour coordonnées homogènes $x_n = [0, n^2/2, n, 1]$. Le point limite $x_\infty := [0,1,0,0]$ est donc dans $\overline{\Omega}$ et le point $y_n := [0, (n^2-1)/2, 0, 1]$ est sur le segment $[x_0, x_\infty[$. Il est donc dans Ω.

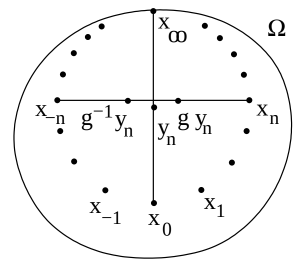

Figure 6: Cas (A): l'existence d'un élément unipotent est exclu par le lemme 2.8.

Les quatre points $x_{-n} = [0, n^2/2, -n, 1]$, $x_n = [0, n^2/2, n, 1]$, $g^{-1}y_n = [0, n^2/2, -1, 1]$ et $gy_n = [0, n^2/2, 1, 1]$ sont alignés et sont dans Ω. On a alors

$$\begin{aligned} \delta_M &\leq d_\Omega(y_n, g^2 y_n) = d_\Omega(g^{-1}y_n, gy_n) \\ &\leq \log((x_{-n}, x_n, g^{-1}y_n, gy_n)) = \log((-n, n, -1, 1)) \\ &= 2\log\frac{n+1}{n-1}. \end{aligned}$$

Pour n grand, ceci contredit l'inégalité $\delta_M > 0$. $\diamondsuit$

2.5 Sous-groupes abéliens de Γ

La proposition suivante est le but de cette partie. Elle précise le théorème 1.1.a.

Proposition 2.9 *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable Ω de $\mathbb{S}^3$ et $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Alors Γ_0 stabilise un unique triangle proprement plongé $T \subset \Omega$.*

Plus précisément, notons $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$ les trois sommets de T, notons H_{ij}, pour $1 \leq i < j \leq 3$, l'hypersphère d'appui à Ω contenant l'arête d'extrémités $\dot{e}_i$ et $\dot{e}_j$ et notons $\pm\dot{e}_4$ les deux points de l'intersection $H_{12} \cap H_{23} \cap H_{13}$ Alors, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ tels que, dans cette base $e_1, \ldots, e_4$, on ait

$$\Gamma_0 \subset \{g = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3}) \mid t_1, t_2, t_3 > 0 \text{ et } \det g = 1\}.$$

Remarques - Rappelons que chaque arête de T est incluse dans une unique hypersphère d'appui à Ω (corollaire 2.2.b).
- Le groupe Γ_0 est alors un sous-groupe d'indice fini du stabilisateur Γ_T de T dans Γ. La surface quotient $\Gamma_T \backslash T$ est un tore ou une bouteille de Klein selon que ce groupe Γ_T est abélien ou pas.

Démonstration D'après la proposition 2.7, le groupe Γ_0 est, après conjugaison, cocompact dans un groupe $G \simeq \mathbb{R}^2$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_A$, $\mathfrak{g}_B$, $\mathfrak{g}_C$ ou $\mathfrak{g}_D$.

Cas (A) Ce cas est exclu par le lemme 2.8.

Cas (B) Notons $\alpha_1 \dots \alpha_4$ des réels, dont au plus deux sont négatifs, tels que $\sum \alpha_i = 0$ et

$$\mathfrak{g}_B = \{X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum x_i = 0 \ , \ \sum \alpha_i x_i = 0\}.$$

On les ordonne de sorte que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$. On peut supposer que Ω rencontre le tétraèdre

$$\Omega_B := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1, x_2, x_3, x_4 > 0\} \ .$$

On note x un point de $\Omega \cap \Omega_B$ et on distingue plusieurs sous-cas (voir figure 6).

a) Lorsque $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0 > \alpha_3 \geq \alpha_4$, les quatre points $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$, $\dot{e}_4$ sont dans $\overline{Gx}$ et donc aussi, par le lemme 2.6 dans $\overline{\Gamma_0 x}$. On en déduit que $\Omega_B \subset \Omega$. Comme $\overline{\Omega}$ n'a pas de facette de dimension 2 (corollaire 2.2), Ω rencontre aussi les tétraèdres Ω'_B voisins de Ω_B. Par le même raisonnement, Ω contient aussi Ω'_B et Ω n'est pas proprement convexe. Contradiction.

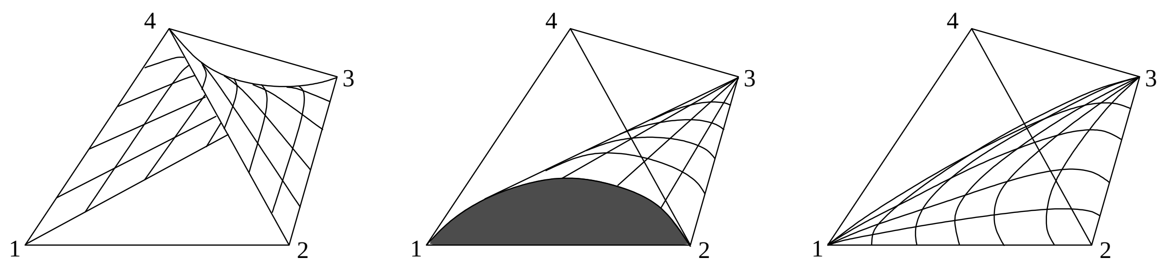

Figure 7: Les G-orbites dans le cas (B)

b) Lorsque $\alpha_2 = 0$ ou $\alpha_3 = 0$. On élimine ce cas de la même façon qu'en a).

c) Lorsque $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 > 0 > \alpha_4$. C'est exactement le cas qui est décrit dans la proposition 2.9. Dans ce cas, le bord de l'orbite $G.x$ est égal au bord du triangle T de sommets $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$. Pour les mêmes raisons qu'en a), le triangle T est inclus dans Ω et T est le seul triangle Γ_0-invariant qui rencontre Ω.

Cas (C) Dans ce cas $\mathfrak{g}_C$ est donné par (2). On peut supposer que Ω rencontre le convexe

$$\Omega_C := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 > 0 \ , \ x_2 > 0 \ , \ x_4 > 0\} \ .$$

On note x un point de $\Omega \cap \Omega_C$. Les trois points $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $-\dot{e}_3$ sont dans $\overline{Gx}$ (voir figure 8) et donc aussi, par le lemme 2.6 dans $\overline{\Gamma_0 x} \subset \overline{\Omega}$. Comme $\overline{\Omega}$ n'a pas de facette de dimension 2 (corollaire 2.2), Ω rencontre aussi le triangle de sommets $\dot{e}_1, \dot{e}_2, -\dot{e}_3$ et donc le convexe voisin: $\Omega'_C := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 > 0 \ , \ x_2 > 0 \ , \ x_4 < 0\}$. Par le même raisonnement, $\overline{\Omega}$ contient aussi le point $\dot{e}_3$ et Ω n'est pas proprement convexe. Contradiction.

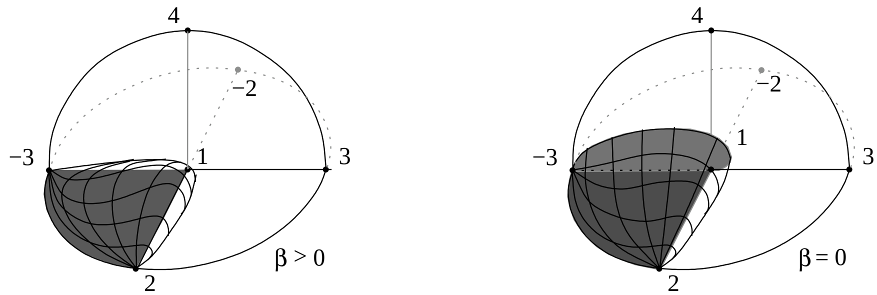

Figure 8: Les G-orbites dans le cas (C)

Cas (D) Dans ce cas $\mathfrak{g}_D$ est donné par (3). On note N le groupe isomorphe à $\mathbb{R}^3$ d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{n} = \mathbb{R}(-3E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44}) \oplus \mathbb{R}(E_{23} + E_{34}) \oplus \mathbb{R}E_{24},$$

de sorte que $N = e^{\mathbb{R}E_{24}}G$. Comme N agit transitivement sur le convexe

$$\Omega_D := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 > 0 \ , \ x_4 > 0\},$$

on peut supposer que Ω contient le point $x := [1, 0, 0, 1]$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note S_λ l'orbite $Ge^{\lambda E_{24}}x$ et $C_\lambda := \bigcup_{\mu \geq \lambda} S_\mu$ de sorte que C_λ est l'enveloppe convexe de S_λ. (voir figure 9)

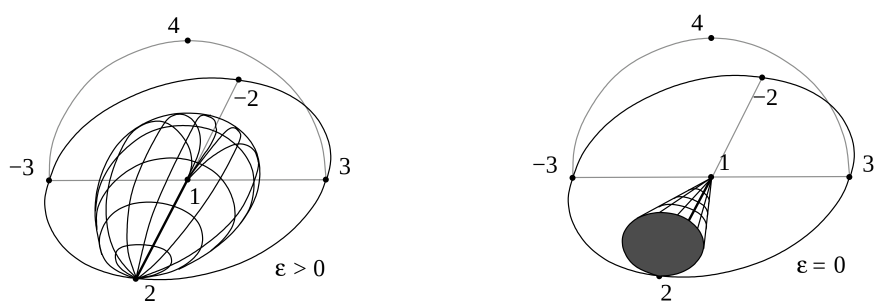

Figure 9: Les G-orbites dans le cas (D)

Montrons tout d'abord l'assertion suivante, en notant $\mathrm{Conv}(P)$ l'enveloppe convexe d'une partie P.

Il existe $\lambda_0 > 0$ *tel que,* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x' \in S_\lambda$, *on a* $C_{\lambda+\lambda_0} \subset \mathrm{Conv}(\Gamma_0 x')$ (4)

Comme N agit transitivement sur Ω_D, il suffit de montrer qu'il existe $x'' \in \Omega_D$ tel que $\mathrm{Conv}(\Gamma_0 x'')$ contient S_0. Comme l'action de Γ_0 sur S_0 est cocompacte, il suffit de montrer que, pour tout compact F de Ω_D, il existe $x'' \in \Omega_D$ tel que $\mathrm{Conv}(\Gamma_0 x'')$ contient F. Pour cela, remarquons tout d'abord, à l'aide du lemme 2.6 que $\mathrm{Conv}(\Gamma_0 x'')$ contient le point $\dot{e}_1$. On choisit alors x'' suffisamment proche d'un point x''' de la demi hypersphère $W \simeq \mathbb{R}^2$ donnée par $x_1 = 0, x_4 > 0$. Il suffit alors de montrer que, pour tout compact F'

de W, il existe $x''' \in W$ tel que $\mathrm{Conv}(\Gamma_0 x''')$ contient F'. On le vérifie aisément car, dans un système de coordonnées affines $s = x_2/x_4$, $t = x_3/x_4$, l'action de $G \simeq \mathbb{R}^2$ sur W est donnée par $(s,t) \to (s + yt + \varepsilon x, t + y)$. Ce qui termine la preuve de l'assertion (4).

L'ouvert Ω contient donc C_{λ_0}. On distingue alors deux cas.

a) Lorsque $\varepsilon = 0$. L'intersection $\overline{C}_{\lambda_0} \cap \partial\Omega_D$ est la réunion du segment d'extrémités $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$ et de la partie de W donnée par $2s \geq t^2 + \lambda_0$. Comme $\overline{\Omega}$ n'a pas de facette de dimension 2 (corollaire 2.2), Ω rencontre aussi le convexe $\Omega'_D := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 < 0\ ,\ x_4 > 0\}$, voisin de Ω_D. Par le même raisonnement, $\overline{\Omega}$ contient aussi le point $-\dot{e}_1$. Et Ω n'est pas proprement convexe. Contradiction.

b) Lorsque $\varepsilon > 0$. Comme Ω est proprement convexe, il résulte de l'assertion (4) qu'il existe des réels $\lambda_1 < \lambda_2$ tels que, $C_{\lambda_2} \subset \Omega \cap \Omega_D \subset C_{\lambda_1}$. Or, dans ce cas, l'intersection $\overline{C}_{\lambda_1} \cap \partial\Omega_D$ est réduite au segment d'extrémités $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$. On en déduit alors que $\Omega \subset \Omega_D$ et donc que

$$C_{\lambda_2} \subset \Omega \subset C_{\lambda_1}. \tag{5}$$

La fin de l'argument est basé sur une déformation du paramètre ε vers 0. Rappelons que, via la définition (3), le groupe $G = G(\varepsilon)$, les orbites $S_\lambda = S_\lambda(\varepsilon)$ et leur enveloppe convexe $C_\lambda = C_\lambda(\varepsilon)$ dépendent du paramètre $\varepsilon > 0$. On introduit la suite

$$h_n = \mathrm{diag}(e^{3n}, e^{-5n}, e^{-n}, e^{3n})$$

de sorte que

$$h_n G(\varepsilon) h_n^{-1} = G(e^{-8n}\varepsilon)\ \ ,\ \ h_n(S_\lambda(\varepsilon)) = S_{e^{-8n}\lambda}(e^{-8n}\varepsilon)\ \text{ et }\ h_n(C_\lambda(\varepsilon)) = C_{e^{-8n}\lambda}(e^{-8n}\varepsilon)\ .$$

On a donc, en utilisant (5),

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\overline{\Omega}) = \overline{C_0(0)}$$

Remarquons que le convexe limite $\overline{C_0(0)}$ est proprement convexe et d'intérieur non vide. Donc, d'après le fait 2.1.b, il existe $h \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ tel que $\overline{\Omega} = h(\overline{C_0(0)})$. Ceci contredit le corollaire 2.2.a, car on a vu en a) que $\overline{C_0(0)}$ contient une facette de dimension 2. $\diamondsuit$

3 Les triangles des ouverts convexes divisibles

Le but principal de cette partie est de montrer la réciproque de la proposition 2.9, c'est-à-dire que tout triangle $T \in \mathcal{T}$ est stabilisé par un sous-groupe Γ_0 de Γ isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ (proposition 3.7).

3.1 Triangles proprement plongés

Rassemblons tout d'abord quelques propriétés des triangles proprement plongés dans un ouvert proprement convexe divisible.

Le point c) de la proposition suivante n'est autre que le théorème 1.1.b.

Proposition 3.1 *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable Ω de $\mathbb{S}^3$. Soient T, T_1 et T_2 des triangles proprement plongés dans Ω avec $T_1 \neq T_2$. Alors*
a) Le stabilisateur Γ_T contient un sous-groupe abélien d'indice 2.
b) Tout segment $\sigma \subset \partial\Omega$ qui rencontre ∂T est inclus dans ∂T.
c) Les adhérences dans $\overline{\Omega}$ sont disjointes: $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 = \emptyset$.
d) Les stabilisateurs sont disjoints: $\Gamma_{T_1} \cap \Gamma_{T_2} = \{1\}$.

Démonstration a) Tout élément γ de Γ_T permute les trois sommets de T. Comme γ n'a pas de points fixe dans T, cette permutation n'est pas une permutation circulaire. Donc l'élément γ^2 a quatre points fixes dans $\mathbb{S}^2$: les trois sommets $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$ et $\dot{e}_3$ de T et un point $\dot{e}_4$ à l'intersection des trois hypersphères d'appui à $\overline{\Omega}$ aux arêtes de $\overline{T}$. Notre assertion s'en déduit car le fixateur de ces quatres points est un groupe abélien.

b) Si σ rencontre une arête I de $\overline{T}$, l'hypersphère d'appui à $\overline{\Omega}$ qui contient σ contient alors aussi I. Donc l'enveloppe convexe de $I \cup \sigma$ est incluse dans $\partial\Omega$. Comme $\partial\Omega$ ne contient pas de 2-facette (corollaire 2.2.a), les segments σ et I sont alignées. Comme le triangles T est proprement plongé dans $\overline{\Omega}$, le segment σ est inclus dans $\overline{I}$.

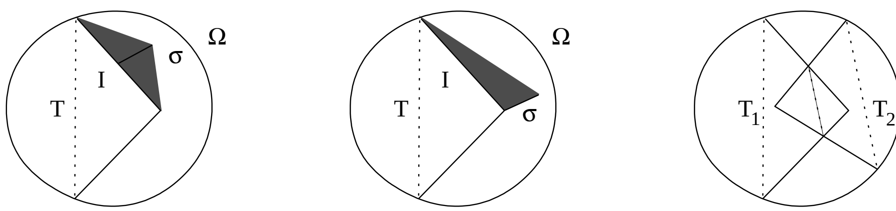

Figure 10: Triangles proprement plongés et segments du bord $\partial\Omega$: trois configurations exclues.

Si σ contient un sommet p de $\overline{T}$, Comme le point p n'est pas angulaire (corollaire 2.2.c), l'hypersphère d'appui à $\overline{\Omega}$ qui contient σ est égale à l'hypersphère d'appui en une des deux arêtes I de T issue de p. On conclut comme dans le premier cas que σ est inclus dans $\overline{I}$.

c) Si les adhérences $\overline{T}_1$ et $\overline{T}_2$ de ces triangles se rencontrent, les bords ∂T_1 et ∂T_2 se rencontrent aussi. En effet, comme Ω est de dimension 3 et que ces triangles sont proprement plongés dans Ω, lorsqu'elle est non vide, l'intersection $T_1 \cap T_2$ est un segment dont les extrémités sont dans $\partial\Omega$. Le point b) prouve alors l'égalité $\partial T_1 = \partial T_2$. Contradiction.

d) Si γ est dans $\Gamma_{T_1} \cap \Gamma_{T_2}$, il résulte du a) que γ^2 fixe les bases projectives associées à T_1 et T_2. Il résulte du b) que les points de cette seconde base sont en position générale par rapport à la première base. On a donc $\gamma^2 = 1$ et, comme Γ est sans torsion, $\gamma = 1$. $\diamondsuit$

3.2 Les feuilles compactes sont isolées

Etudions maintenant les triangles proprement plongés dont l'image dans M est compacte.

Notons $\mathcal{T}_c := \{T \in \mathcal{T} \mid \Gamma_T \backslash T \text{ est compact}\}$ et $\mathcal{T}_{nc} := \{T \in \mathcal{T} \mid \Gamma_T \backslash T \text{ est non compact}\}$. Notre objectif est maintenant de montrer que $\mathcal{T}_{nc}$ est vide. Pour cela, introduisons la réunion des triangles $\mathcal{L} = \mathcal{L}_c \cup \mathcal{L}_{nc}$ où

$$\mathcal{L} := \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T \ \ , \ \ \mathcal{L}_c := \bigcup_{T\in\mathcal{T}_c} T \ \text{ et } \ \mathcal{L}_{nc} := \bigcup_{T\in\mathcal{T}_{nc}} T \ .$$

Nous aurons encore besoin de deux définitions classiques en topologie de dimension 3.

Une variété irréductible orientée N est dite *à bord incompressible* si il n'existe pas de *disque de compression* (i.e. de plongement propre du disque $(D, \partial D) \hookrightarrow (N, \partial N)$ pour lequel ∂D ne serait pas homotopiquement trivial dans ∂N).

N est dite *acylindrique* si il n'existe pas *d'anneau essentiel* (i.e. de plongement propre de l'anneau $(A, \partial A) \hookrightarrow (N, \partial N)$ qui induit une injection entre les π_1 et qui n'est pas homotope relativement à ∂A à un plongement dans ∂N).

La proposition suivante nous donnera les points d) et e) du théorème 1.1 dès que l'on saura que $\mathcal{T}_{nc}$ est vide.

Proposition 3.2 *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable* Ω *de* $\mathbb{S}^3$ *et* $M := \Gamma\backslash\Omega$. *Alors,*
a) $\mathcal{L}$ *est fermé dans* Ω.
b) Tout triangle $T \in \mathcal{T}$ *tel que* $\Gamma_T \neq \{1\}$ *est isolé dans* $\mathcal{L}$.
c) Le sous-ensemble $\Sigma_c := \Gamma\backslash\mathcal{L}_c \subset M$ *est une réunion finie de tores ou de bouteilles de Klein disjoints.*
d) $\mathcal{L}_c$ *et* $\mathcal{L}_{nc}$ *sont fermés dans* Ω.
e) Les composantes N *de la variété à bord obtenue en découpant* M *le long de* Σ_c *sont irréductibles, à bord incompressible, atoroïdales et acylindriques.*

Remarque Le point e) de cette proposition nous sera utile dans la section 3.4.

Démonstration a) C'est clair. Si un point $x \in \Omega$ est limite de points x_n appartenant à des triangles $T_n \in \mathcal{T}$, cette suite T_n sous-converge vers un triangle $T_\infty \in \mathcal{T}$ contenant x.

b) Notons $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$ les sommets de $\overline{T}$, $\dot{e}_4$ une intersection des trois hypersphères d'appui à $\overline{\Omega}$ aux arêtes de $\overline{T}$, T^+ le tétraèdre de sommets $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$, $\dot{e}_4$ et $\partial\Omega^+ := \partial\Omega \cap T^+$. Notons $\Gamma_0 \subset \Gamma_T$ le sous-groupe abélien d'indice 1 ou 2 de Γ_T qui préserve T^+ et choisissons un élément $\gamma_0 \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$. En “regardant” T^+ depuis le point $\dot{e}_4$, on obtient une application projective $\psi : T^+ \to T$ qui est Γ_0-équivariante et qui induit une bijection $\psi : \partial\Omega^+ \simeq T$.

Supposons par l'absurde que T n'est pas isolé. Il existe alors une suite $T_n \in \mathcal{T}$, $T_n \neq T$, qui converge vers T. On peut supposer ces triangles T_n inclus dans le tétraèdre T^+. Les images $T'_n := \psi(T_n)$ sont des triangles inclus dans T dont les bords sont disjoints et qui convergent vers T. Choisissons n assez grand de sorte que les triangles T'_n et $\gamma_0 T'_n$ se rencontrent. Comme les bords sont disjoints, on a une inclusion, par exemple $\gamma_0 T'_n \subset T'_n$. Mais alors, γ_0 a un point fixe dans $T'_n \subset T'$. Contradiction.

c) D'après la proposition 3.1.a et 3.1.c, Σ_c est une réunion de tores et de bouteilles de Klein disjoints. Il reste à montrer que cette réunion est finie. On utilise pour cela le classique théorème de finitude de Kneser-Haken (voir [11] ou [1]), qui affirme que *dans une variété de dimension* 3 *compacte orientée* M, *toute famille de surfaces compactes*

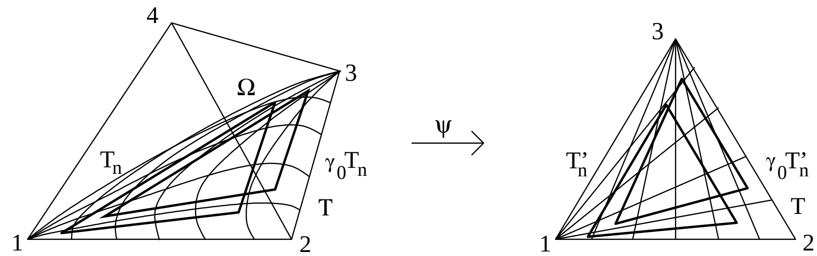

Figure 11: Un triangle T_n ne peut pas être proche d'un triangle T de stabilisateur non trivial

incompressibles $(\Sigma_i)_{i\in I}$ *deux à deux disjointes et non parallèles est finie, de cardinal borné par une constante* C_M. Rappelons que deux surfaces Σ_i et Σ_j sont dites parallèles si elles bordent une sous variété de M isomorphe à $\Sigma_i \times [0,1]$. La proposition 3.1.d assure que ce n'est jamais le cas pour les quotients $\Gamma_{T_i}\backslash T_i$ des triangles $T_i \in \mathcal{T}_c$.

d) Cela résulte du b) et du c).

e) La variété N est irréductible car M l'est.

La variété N est à bord incompressible car les π_1 des tores de ∂N sont des sous-groupes Γ_0 du groupe $\Gamma = \pi_1(M)$.

La variété N est atoroïdale à cause de la proposition 2.9 ; le cas d'un fibré en intervalles sur le tore ou la bouteille de Klein est exclu par la proposition 3.1.d et le cas d'un fibré en disques sur le cercle est exclu car N est à bord incompressible.

La variété N est acylindrique: aucun plongement propre d'un cylindre $(A, \partial A) \hookrightarrow (N, \partial N)$ n'est essentiel. En effet, comme N est à bord incompressible, il se relève en un plongement entre les revêtements universels, ce qui permet de construire, à l'aide de l'application ψ du b), une homotopie relative à ∂A entre ce plongement et une application $A \to \partial N$. $\diamondsuit$

3.3 Une lamination mesurée

Il résulte de la partie précédente que l'image $X := \Gamma\backslash\mathcal{L}_{nc}$ de $\mathcal{L}_{nc}$ dans M est une lamination dont les feuilles sont les images $F := \Gamma_T\backslash T$ des triangles $T \in \mathcal{T}_{nc}$. Le but de cette partie est de montrer, à l'aide du théorème de Plante, que cette lamination est *mesurée*.

Commençons par rappeler le théorème de Plante.

La notion d'*espace feuilleté* $(X, \mathcal{F})$ (aussi appelée *lamination abstraite*) est une simple généralisation de la notion de *variété feuilletée* $(M, \mathcal{F})$ où la variété M est remplacée par un espace topologique X. Autrement dit X est recouvert par des cartes $U_\alpha \simeq X_\alpha \times Y_\alpha$, avec Y_α ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$ et, avec des changements de cartes continus $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x_\beta, y_\beta) = (\varphi_{\alpha,\beta}(x_\alpha), \psi_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\alpha))$ la dépendance en y_α étant C^1 à dérivées continues en (x_α, y_α) Les parties $\{x_\alpha\} \times Y_\alpha$ sont appelées *plaques*. Les parties X_α sont appelées *transverses*. Une *feuille* est une partie connexe maximale de X qui est une réunion de plaques. Le *pseudogroupe d'holonomie* est le pseudogroupe sur la réunion disjointe des transversales engendré par les $\varphi_{\alpha,\beta}$. Une *mesure transverse* μ sur un espace feuilleté $(X, \mathcal{F})$

est la donnée d'une famille de mesures positives sur les transverses à $\mathcal{F}$ qui soit invariante par le pseudo-groupe d'holonomie. Lorsque μ est non nul, on parle alors d'*espace feuilleté mesuré*. Une *lamination* $(X, \mathcal{F})$ d'une variété M est une partie fermée X de M munie d'une structure d'espace feuilleté dont les cartes sont des restrictions de cartes C^1 de M. Par exemple, l'adhérence d'une feuille dans une variété feuilletée est naturellement une lamination. (voir le chapitre 11 de [8] pour plus de détails).

Le fibré tangent aux feuilles d'un espace feuilleté peut être muni d'une métrique riemannienne continue. Celle-ci permet de définir la longueur des chemins tracés sur une feuille, la distance entre deux points sur une même feuille F, ainsi qu'une mesure de Radon sur chacune des feuilles. On peut donc considérer, pour $x_0 \in F$, la fonction $R \to V_R := \mathrm{vol}(B_F(x_0, R))$ volume de la boule de rayon R. La feuille F est dite *à croissance polynomiale* si cette fonction $R \to V_R$ est majorée par un polynôme. Elle est dite *à croissance sous-exponentielle* si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $R \to e^{-\alpha R} V_R$ est bornée. Ces définitions ne dépendent ni du choix de $x_0 \in F$, ni du choix de la métrique riemannienne continue.

Fait 3.3 (Plante) *Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace compact feuilleté ayant une feuille à croissance sous-exponentielle. Alors il admet une mesure transverse non nulle.*

La référence originale, pour les feuilletages, est [18]. La même démonstration est valable pour les espaces feuilletés (voir le th. 12.3.1 de [8]). L'idée principal de la preuve est que le pseudogroupe d'holonomie de la feuille est alors aussi à croissance sous-exponentielle et donc qu'il est moyennable.

Pour pouvoir appliquer le théorème de Plante à notre problème, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.4 *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable Ω de $\mathbb{S}^3$, $M := \Gamma \backslash \Omega$, $\mathcal{L} \subset \Omega$ la réunion des triangles proprement plongés dans Ω et $\Sigma := \Gamma \backslash \mathcal{L} \subset M$. Alors, toutes les feuilles de l'espace feuilleté Σ sont à croissance polynomiale.*

Démonstration La définition de la croissance polynomiale utilise une métrique riemannienne sur le fibré tangent aux feuilles, mais ne dépend pas de ce choix. On peut même remplacer dans la définition cette métrique riemannienne par une métrique finslérienne c'est-à-dire un champ continu de normes sur le fibré tangent aux feuilles. C'est ce que nous allons faire et prendre la métrique finslérienne dont la distance associée sur les feuilles est la distance de Hilbert.

Le revêtement universel de chaque feuille est alors isométrique à un triangle $T \subset \mathbb{S}^2$ muni de la distance de Hilbert. Mais, comme la composante connexe I du groupe des isométries de T est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ et agit simplement transitivement sur T, notre triangle T est isométrique à un espace vectoriel normé de dimension 2. Donc le volume V_R des boules de rayon R est un polynôme homogène de degré 2 en R. $\diamondsuit$

Corollaire 3.5 *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable* Ω *de* $\mathbb{S}^3$ *et* $M := \Gamma\backslash\Omega$. *Toute sous-lamination* Σ_0 *de* $\Sigma := \Gamma\backslash\mathcal{L} \subset M$ *admet une mesure transverse non nulle.*

Démonstration Cela résulte du fait 3.3 et du lemme 3.4. $\diamondsuit$

3.4 Une action libre sur un arbre réel

> Nous allons montrer maintenant, à l'aide du théorème de Morgan-Shalen que $\mathcal{T}_{nc}$ est vide, c'est-à-dire que tous les triangles proprement plongés de Ω ont une image compacte dans M.

Commençons par rappeler le théorème de Morgan-Shalen.

Un *arbre réel* est un espace métrique R dans lequel tout couple de points r_1, r_2 est joint par une unique géodésique $[r_1, r_2]$ et tel que, pour tout triplet de points r_1, r_2, r_3, les trois géodésiques $[r_i, r_j]$ ont un point commun, on dit alors qu'elles forment un *tripode*.

On dit qu'une action isométrique d'un groupe Γ sur R est *à stabilisateurs d'arêtes triviaux* si tout élément $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ a au plus un point fixe dans R. Dans ce contexte, *arête* est synonyme de *géodésique*.

Fait 3.6 (Morgan-Shalen) *Soit* N *une variété compacte (à bord) de dimension* 3 *et* $\Gamma_N := \pi_1(N)$. *On suppose* N *irréductible, à bord incompressible, atoroïdale et acylindrique. Toute action isométrique de* Γ_N *sur un arbre réel* R *à stabilisateurs d'arêtes triviaux admet un point fixe.*

Remarques - Il suffit en fait que les stabilisateurs des arêtes ne contiennent pas de groupe libre à deux générateurs.
- La référence originale est le corollaire de l'introduction de [16]. Depuis ce fait a été fortement généralisé par E.Rips : Tout groupe de type fini qui agit isométriquement sur un arbre réel avec des stabilisateurs d'arêtes triviaux peut se décomposer comme produit amalgamé $A *_C B$ ou comme une HNN-extension $A*_C$ au dessus d'un groupe abélien C. Les hypothèses sur N assurent que le groupe Γ_N n'admet pas de telle décomposition. (voir par exemple [17] ou le corollaire 12.88 de [14]).
- On ne suppose pas dans cet énoncé que l'arbre réel R est complet. En effet, l'existence d'un point fixe de Γ_N dans l'arbre réel complété de R implique l'existence d'un point fixe de Γ_N dans R car le groupe Γ_N est de type fini (voir [16] section IV).

La proposition suivante est une reformulation du théorème 1.1.c.

Proposition 3.7 *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable* Ω *de* $\mathbb{S}^3$, $M := \Gamma\backslash\Omega$. *Pour tout triangle proprement plongé* $T \subset \mathcal{T}$, *l'image* $\Gamma_T\backslash T$ *de* T *dans* M *est compacte.*

Démonstration Supposons par l'absurde que $\mathcal{T}_{nc}$ est non vide. Comme M est compact, la lamination $\Sigma_{nc} := \Gamma \backslash \mathcal{L}_{nc} \subset M$ contient une sous-lamination minimale Σ_0, c'est-à-dire une lamination dans laquelle toutes les feuilles sont denses. D'après le corollaire 3.5, la lamination X_0 admet une mesure transverse ν. Cette lamination est incluse dans l'intérieur $\mathring{N}$ d'une composante N de la variété à bord obtenue en découpant M le long de Σ_c. Notons $\Gamma_N := \pi_1(N)$ et $\Omega_N \subset \Omega$ l'adhérence d'une composante connexe de l'image inverse de $\mathring{N}$ dans Ω. Cette partie Ω_N est une partie convexe et fermée de Ω dont le bord dans Ω est une réunion de triangles proprement plongés dans Ω. Notons $(\mathcal{L}_0, \mu)$ la lamination mesurée Γ_N-invariante sur Ω_N qui relève la lamination mesurée (Σ_0, ν).

Suivant une construction classique due à Gillet et Shalen ([9]), nous allons associer à la lamination mesurée $(\mathcal{L}_0, \mu)$ un arbre réel R. La Γ_N-invariance de cette lamination mesurée donnera alors une action isométrique de Γ_N sur R.

Pour cela, on introduit la pseudodistance d_μ sur Ω_N,

$$d_\mu(x, y) := \mu([x, y]) \quad , \quad \forall x, y \in \Omega_N .$$

Cette formule a un sens lorsque x et y ne sont pas sur la même feuille car le segment

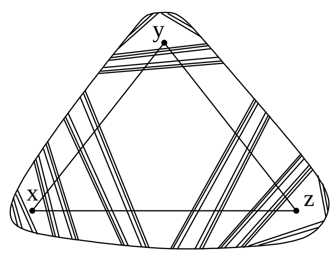

Figure 12: La distance d_μ associée à une lamination mesurée $(\mathcal{L}_0, \mu)$

$[x, y]$ est alors transverse à la lamination. On la prend égale à 0 lorsque x et y sont sur la même feuille. On vérifie aisément la symétrie $d_\mu(x, y) = d_\mu(y, x)$ et l'inégalité triangulaire $d_\mu(x, z) \le d_\mu(x, y) + d_\mu(y, z)$ car toute feuille qui rencontre le segment $[x, z]$ rencontre l'un des deux segments $[x, y]$ ou $[y, z]$. On note R l'espace métrique quotient de Ω_N obtenu en identifiant les points x, y tels que $d_\mu(x, y) = 0$. Il est clair que R est un arbre réel dont les arcs géodésiques sont les images des segments tracés dans Ω_N et que l'action de Γ_N sur R est isométrique. Vérifions que

L'action de Γ_N sur R est à stabilisateurs d'arêtes triviaux.

Pour cela il suffit de remarquer que, par minimalité, $\mathcal{L}_0$ est transversalement un Cantor et donc que toute arête non triviale de R contient un point dont l'image inverse dans Ω_N est un seul triangle T de $\mathcal{L}_0$. Si un élément $\gamma \in \Gamma_N$ fixe deux points distincts de R, il stabilise alors un tel triangle T. La proposition 3.2.b implique alors $\gamma = 1$.

La proposition 3.2.e nous permet alors d'appliquer le théorème de Morgan-Shalen (fait 3.6):

Le groupe Γ_N a un point fixe dans R.

Notons alors Ω_0 l'image inverse de ce point fixe dans Ω_N. L'ensemble Ω_0 est soit un triangle T de $\mathcal{L}_0$, soit l'adhérence d'une composante connexe de $\Omega_N \setminus \mathcal{L}_0$. Comme Ω_0 est Γ_N-invariant son image $N_0 = \Gamma_N \backslash \Omega_0$ dans N est compacte. Tout triangle $T \subset \mathcal{L}_0$ qui est dans le bord de Ω_0 a donc une image compacte dans N. Ceci contredit l'hypothèse $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_{nc}$. $\diamondsuit$

3.5 Les points extrémaux du bord

Nous allons montrer maintenant le théorème 1.1.f qui décrit les points extrémaux de $\partial\Omega$. Nous décrirons en même temps les points de $\partial\Omega$ qui sont sur une seule hypersphère d'appui à $\overline{\Omega}$.

Proposition 3.8 *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable Ω de $\mathbb{S}^3$.*
a) Pour tout segment non trivial $\sigma \subset \partial\Omega$, il existe un triangle $T \in \mathcal{T}$ tel que $\sigma \subset \partial T$.
b) Un point $x \in \partial\Omega$ est sur une seule hypersphère d'appui à $\overline{\Omega}$ si et seulement si $x \notin \mathcal{S}$.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour construire une suite $\gamma_n \in \Gamma$ tel que la suite de segments $\gamma_n\sigma$ converge vers un côté d'un triangle $T \in \mathcal{T}$.

Lemme 3.9 *Soit $\omega \subset \mathbb{S}^2$ un ouvert proprement convexe et non strictement convexe. Soient $\sigma = [a,b] \subset \omega$ un segment maximal du bord, c un point de la 1-facette $]a,b[$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Ω qui converge vers c.*

On note $(h_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ telle que les limites $\omega_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} h_n\omega \in X_2$ et $y_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} h_n x_n \in \omega_\infty$ existent

Alors ω_∞ est un triangle et la suite de segments $\sigma_n := h_n\sigma$ sous-converge vers un des côtés de $\partial\omega_\infty$.

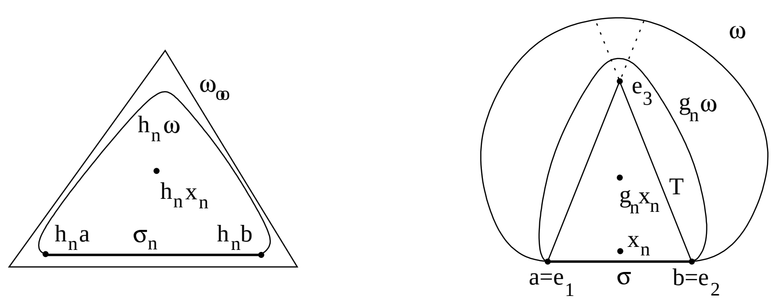

Figure 13: Construction d'une suite σ_n de segments convergeant vers un côté d'un triangle

Rappelons que *sous-converger* signifie qu'une sous-suite converge.

Démonstration du lemme 3.9 Remarquons que l'existence d'une telle suite h_n est assurée par la cocompacité de l'action du groupe $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ sur $X_{2,0}$ (fait 2.1.a). La preuve est basée sur la construction explicite d'une telle suite que nous appellerons g_n pour éviter les confusions.

Choisissons une base e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$ telle que $a = \dot{e}_1$, $b = \dot{e}_2$, $c = \overset{\cdot}{\overline{e_1 + e_2}}$ et $\dot{e}_3 \in \omega$ et notons $g_n := \mathrm{diag}(e^{-t_n}, e^{-t_n}, e^{2t_n})$. Pour toute suite $t_n \to \infty$, *la suite $g_n\omega$ converge dans X_2 vers le triangle T de sommets $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$*. En outre, on peut choisir cette suite t_n de sorte que la suite $g_n x_n$ converge vers le point $d := \overset{\cdot}{\overline{e_1 + e_2 + e_3}} \in T$.

Comme l'action de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ sur $X_{2,0}$ est propre (fait 2.1.a), après extraction, la suite $h_n g_n^{-1}$ converge vers un élément $k \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$. On a donc,

$$\omega_\infty = kT \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} [h_n a, h_n b] = [k\dot{e}_1, k\dot{e}_2]. \qquad \diamondsuit$$

Démonstration de la proposition 3.8 a) On suppose par l'absurde que σ n'est pas sur le bord d'un triangle proprement plongé dans Ω. On peut supposer que le segment $\sigma = [a, b] \subset \partial\Omega$ est maximal. Soient ω une 2-section de Ω telle que $\sigma \subset \partial\omega$ et x_n une suite de points de ω qui convergent vers un point c de la facette $]a, b[$.

Comme Γ divise Ω, après extraction, il existe une suite γ_n dans Γ telle que la suite de points $y_n := \gamma_n x_n$ converge vers un point $y_\infty \in \Omega$. Après extraction, la suite $\omega_n := \gamma_n\omega$ converge vers une 2-section ω_∞ de Ω qui contient le point y_∞.

Il résulte du lemme 3.9, que la limite ω_∞ est un triangle T et que, après extraction, la limite des segments $\sigma_n := \gamma_n\sigma \subset \partial\Omega$ est un des côtés du triangle $T = \omega_\infty$. Le lecteur attentif aura pris soin d'appliquer le lemme 3.9 non pas directement à la suite γ_n mais à une suite $h_n = r_n\gamma_n$ où r_n est une suite de rotations qui converge vers l'identité et telle que les convexes $r_n\omega_n$ et ω_∞ sont dans la même hypersphère.

La stratégie consiste à contredire la proposition 3.1.b en construisant

un segment non trivial $\tau \subset \partial\Omega$ qui rencontre ∂T mais n'est pas inclus dans ∂T.

Pour cela, réintroduisons les notations de la démonstration de la proposition 3.2: soient $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$ les sommets de $\overline{T}$, $\dot{e}_4$ une intersection des trois hypersphères d'appui à $\overline{\Omega}$ aux arêtes de $\overline{T}$, T^+ le tétraèdre de sommets $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$, $\dot{e}_4$ et $\partial\Omega^+ := \partial\Omega \cap T^+$. Notons $\Gamma_0 \subset \Gamma_T$ le sous-groupe abélien d'indice 1 ou 2 de Γ_T qui préserve T^+ et $\psi : \partial\Omega^+ \tilde{\to} T$ la bijection Γ_0-équivariante obtenue en "regardant" $\partial\Omega^+$ depuis le point $\dot{e}_4$.

On peut supposer les segments σ_n inclus dans le tétraèdre T^+. Les images $\sigma'_n := \psi(\sigma_n)$ sont des segments inclus dans T qui convergent vers un côté de T, par exemple le segment $[\dot{e}_1, \dot{e}_2]$. Notons $a_n := \gamma_n(a)$, $b_n := \gamma_n(b)$ les extrémités du segment σ_n et $a'_n := \psi(a_n)$, $b'_n := \psi(b_n)$ les extrémités du segment σ'_n. D'après la proposition 3.7, le groupe Γ_0 agit de façon cocompacte sur T. Il existe donc une suite $\gamma_{0,n}$ dans Γ_0 telle que, après extraction, la suite $c'_n := \gamma_{0,n}(a'_n)$ converge vers un point c'_∞ de T. Après extraction, la suite $d'_n := \gamma_{0,n}(b'_n)$ converge alors vers un point d'_∞ de $\overline{T}$. Comme σ'_n converge vers $[\dot{e}_1, \dot{e}_2]$, le point d'_∞ est dans ∂T. La suite $\gamma_{0,n}(\sigma_n)$ de segments de $\partial\Omega$, converge alors vers le segment $\tau = [c_\infty, d_\infty] \subset \partial\Omega$ avec $\psi(c_\infty) = c'_\infty$ et $d_\infty = d'_\infty$. C'est le segment τ de $\partial\Omega$ cherché qui rencontre ∂T sans être inclus dans ∂T. Contradiction.

b) Soit Ω^* l'ouvert convexe dual de Ω. Il est divisé par le groupe transposé ${}^t\Gamma$ (voir le lemme 2.8 de [3]). Notre assertion résulte alors du a) appliqué à Ω^*. $\diamondsuit$

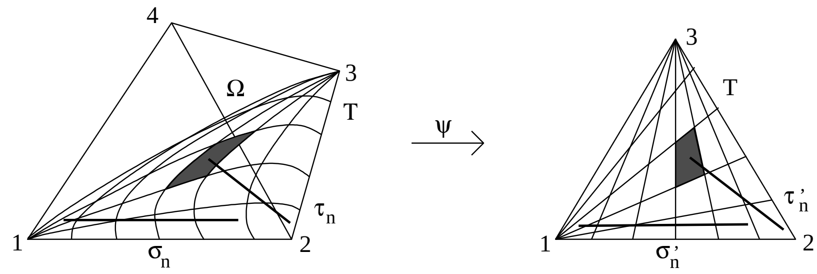

Figure 14: Construction d'un segment τ du bord $\partial\Omega$ rencontrant le bord d'un triangle T

3.6 L'ensemble limite

Montrons maintenant la dernière affirmation du théorème 1.1.

Proposition 3.10 *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ *un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable* Ω *de* $\mathbb{S}^3$*. Alors,*
a) l'action de Γ *sur* $\partial\Omega$ *est minimale.*
b) Si Ω *n'est pas strictement convexe, l'ensemble* $\mathcal{S}$ *des sommets des triangles proprement plongés dans* Ω *est dense dans* $\partial\Omega$*.*

Démonstration Cela résulte du lemme 3.11 ci-dessous vrai en dimension $m \geq 2$, car d'après la proposition 3.8, l'ensemble des points extrémaux est dense dans $\partial\Omega$ et l'adhérence de $\mathcal{S}$ est un fermé Γ-invariant de $\partial\Omega$. $\diamondsuit$

Lemme 3.11 *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{SL}(m+1, \mathbb{R})$ *un sous-groupe discret sans torsion qui divise un ouvert proprement convexe indécomposable* Ω *de* $\mathbb{S}^m$*. On note* F_Γ *l'adhérence de l'ensemble des points extrémaux de* $\partial\Omega$*. Alors, tout fermé* Γ*-invariant* F *de* $\partial\Omega$ *contient* F_Γ*. En particulier, l'action de* Γ *sur* F_Γ *est minimale.*

Démonstration L'hypothèse Ω indécomposable assure que la représentation de Γ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ est irréductible, d'après J.Vey ([24]). Il suffit alors d'appliquer l'assertion suivante, aussi due a J.Vey, à un point de l'intérieur de l'enveloppe convexe de F ([24]): *lorsqu'un groupe* Γ *divise un ouvert proprement convexe* Ω *de* $\mathbb{S}^m$*, pour tout* $x \in \Omega$*, on a* $\mathrm{Conv}(\Gamma x) = \Omega$*.* $\diamondsuit$

4 Exemples

Le but principal de cette partie est de construire des ouverts proprement convexes indécomposables divisibles de $\mathbb{S}^3$ qui ne sont pas strictement convexes (proposition 4.2).

Pour cela, on rappelle dans la section 4.2 le théorème de Tits-Vinberg qui décrit à quelles conditions des réflexions projectives σ_i par rapports aux faces d'un polyèdre convexe P engendrent un groupe discret Γ qui divise un ouvert proprement convexe Ω.

On montrera alors dans la section 4.3 comment un choix convenable de P et des σ_i permet d'obtenir pour Ω un ouvert non strictement convexe.

4.1 Ouverts convexes divisibles décomposables

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons tout d'abord la description des ouverts convexes divisibles de $\mathbb{S}^3$ qui sont décomposables.

Lorsque $m = 3$, un ouvert convexe décomposable Ω est un cône ouvert convexe, pour une identification convenable de $\mathbb{R}^3$ avec une demisphère projective ouverte. Notons alors ω l'image dans $\mathbb{S}^2$ de ce cône Ω de $\mathbb{R}^3$. Cet ouvert proprement convexe ω de $\mathbb{S}^2$ est divisible, si et seulement si Ω est divisible ([3]). Dans ce cas, l'adhérence de Zariski du sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ qui divise Ω est, à sous-groupe d'indice fini près et à conjugaison près,
- soit le groupe des matrices diagonales (lorsque ω est un triangle)
- soit le produit $\mathbb{R}^* \times \mathrm{SO}(2, 1)$ (lorsque ω est une ellipse)
- soit le produit $\mathbb{R}^* \times \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ (dans les autres cas).

Notons que, dans ces exemples, le quotient $M = \Gamma \backslash \Omega$ admet un revêtement fini de la forme $\mathbb{S}^1 \times \Sigma$ où Σ est une surface compacte. Ces exemples sont bien compris, grâce à la paramétrisation des surfaces projectives proprement convexes de Goldman ([10]).

Par contre d'après ([3]), lorsque Ω est indécomposable l'adhérence de Zariski du sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ qui divise Ω est, à conjugaison près,
- soit le groupe $\mathrm{SO}(3, 1)$ (lorsque Ω est un ellipsoïde)
- soit le groupe $\mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$ (dans les autres cas).

4.2 Groupes de reflexions projectives

Pour énoncer le théorème de Tits-Vinberg, nous aurons besoin de quelques rappels sur les groupes de Coxeter.

Un *système de Coxeter* (S, M) est un couple formé d'un ensemble S et d'une matrice $M = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ à coefficients diagonaux $m_{s,s} = 1$ et à coefficients non diagonaux $m_{s,t} \in \{2, 3, 4, \ldots, \infty\}$. Ces données déterminent un *groupe de Coxeter* W_S défini par des générateurs $(g_s)_{s \in S}$ et des relations $(g_s g_t)^{m_{s,t}} = 1$ pour $s, t \in S$ tels que $m_{s,t} \neq \infty$. Le *graphe de Coxeter* a pour sommets S, avec une arête entre deux points s et t lorsque $m_{s,t} \neq 2$.

Soit $P \subset \mathbb{S}^m$ un *polyèdre convexe fermé* de dimension m, i.e. l'image dans $\mathbb{S}^m$ d'un cône polyédral convexe fermé et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^{m+1}$. On appelle *k-face* de P, l'adhérence d'une facette de dimension k. Une *face* est une $(m-1)$-face. Soit S l'ensemble des faces de P. Pour chaque face s, on choisit une réflexion projective $\sigma_s = \mathrm{Id} - v_s \otimes \alpha_s$ avec $\alpha_s \in V^*$, $v_s \in V$ et $\alpha_s(v_s) = 2$ qui fixe s. Un choix convenable des signes permet de supposer que P est défini par les inégalités $(\alpha_s \leq 0)_{s \in S}$. Soit $a_{s,t} := \alpha_s(v_t)$, pour $s, t \in S$. Soit Γ le groupe engendré par ces réflexions σ_s.

Si on veut que les images $\gamma(P)$ pavent une partie de $\mathbb{S}^m$ (i.e. que les intérieurs $\gamma(\mathring{P})$ soient disjoints), une étude locale autour des facettes de codimension 2 prouve que les conditions suivantes sont nécessaires:
pour toutes faces $s, t \in S$ telles que $\dim(s \cap t) = m - 2$, on a

$$a_{s,t} \leq 0 \ \ et \ (\ a_{s,t} = 0 \Leftrightarrow a_{t,s} = 0 \ ) \tag{6}$$

$$a_{s,t}a_{t,s} \geq 4 \ \ ou \ \ a_{s,t}a_{t,s} = 4\cos^2(\tfrac{\pi}{m_{s,t}}) \ \ avec \ \ m_{s,t} \geq 2 \ \text{ entier} \tag{7}$$

Le fait suivant affirme que réciproquement ces conditions sont suffisantes. Soit (S, M) le système de Coxeter donné par ces entiers $m_{s,t}$ et complété par $m_{s,t} = \infty$ lorsque $s \cap t = \emptyset$, lorsque $\operatorname{codim}(s \cap t) \neq 2$ ou lorsque $a_{s,t}a_{t,s} \geq 4$. Pour tout sommet x de P, on note $S_x := \{s \in S | x \in s\}$.

Fait 4.1 (Tits, Vinberg) *Soit P un polyèdre proprement convexe de $\mathbb{S}^m$ et, pour chaque face s de P, soit $\sigma_s = Id - v_s \otimes \alpha_s$ une réflexion projective qui fixe cette face s. Supposons que les conditions (6) et (7) sont satisfaites pour chaque s, t tel que* $\operatorname{codim}(s \cap t) = 2$. *Soit Γ le groupe engendré par ces réflexions σ_s. Alors*
(a) Les polyèdres $\gamma(P)$, pour γ dans Γ, pavent un ensemble convexe Ω de $\mathbb{S}^m$.
(b) Le morphisme $\sigma : W_S \to \Gamma$ donné par $\sigma(s) = \sigma_s$ est un isomorphisme.
(c) Le groupe Γ est discret.
(d) Le convexe Ω est ouvert et Γ divise Ω si et seulement si,

$$\textit{pour tout sommet } x \textit{ de } P, \textit{ le groupe de Coxeter } W_{S_x} \textit{ est fini.} \tag{8}$$

(e) Lorsque le graphe de Coxeter est connexe, que W_S est infini et que les vecteurs v_s engendrent V, l'ouvert Ω est proprement convexe.

Pour la démonstration on renvoie à [7] et [25]. Seul le point (e) mérite un commentaire: l'hypothèse sur les v_s assure que la représentation σ est irréductible et donc que le convexe $\overline{\Omega} \cap -\overline{\Omega}$ est soit vide soit égal à $\mathbb{S}^m$; le second cas est exclu car W_S est infini.

4.3 Exemples

Décrivons maintenant les exemples précis auxquels nous allons appliquer le théorème de Tits-Vinberg.

On fixe $a > 1$ et $d = 3, 4$ ou 5 et on pose

$$\mu = \frac{4a}{(a-1)^2}\cos^2\frac{\pi}{d} \ \text{ et } \ \nu = 2 + 3\mu \ . \tag{9}$$

On choisit pour P le prisme triangulaire de $\mathbb{S}^3$:

$$P := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{S}^3 \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ax_1 \ , \ 0 \leq x_4 \leq x_1 + x_2 + x_3 \ \}$$

On choisit pour symétries projectives σ_i par rapport à chacune des cinq faces s_i de P, les symétries données par

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_1([x_1,x_2,x_3,x_4]) & = & [x_2,x_1,x_3,x_4] \\
\sigma_2([x_1,x_2,x_3,x_4]) & = & [x_1,x_3,x_2,x_4] \\
\sigma_3([x_1,x_2,x_3,x_4]) & = & [a^{-1}x_3,x_2,ax_1,x_4] \\
\sigma_4([x_1,x_2,x_3,x_4]) & = & [x_1-\mu x_5,x_2-\mu x_5,x_3-\mu x_5,x_4-\nu x_5] \\
\sigma_5([x_1,x_2,x_3,x_4]) & = & [x_1,x_2,x_3,-x_4]
\end{array}$$

où $x_5 = x_4 - x_3 - x_2 - x_1$.

La proposition suivante affirme que ces exemples sont bien ceux annoncés dans la proposition 1.3.

Proposition 4.2 *Soient $\Gamma \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$ le groupe engendré par les réflexions $\sigma_1,\dots,\sigma_5$, et Ω l'union des images γP pour $\gamma \in \Gamma$. Alors*
a) Cet ensemble Ω est un ouvert proprement convexe de $\mathbb{S}^3$ et le groupe Γ divise Ω.
b) Le groupe Γ est Zariski dense dans $\mathrm{SL}^{\pm}(4,\mathbb{R})$.
c) Cet ouvert Ω n'est pas strictement convexe.

Démonstration Le polyèdre P est donc défini par les cinq inégalités $\alpha_i \leq 0$, pour $1 \leq i \leq 5$, et les symétries sont données par $\sigma_i = Id - v_i \otimes \alpha_i$ où

$$\alpha_1 = e_1^* - e_2^*\ ,\ \ \alpha_2 = e_2^* - e_3^*\ ,\ \ \alpha_3 = a^{-1}e_3^* - e_1^*\ ,\ \ \alpha_4 = -e_1^* - e_2^* - e_3^* + e_4^*\ ,\ \ \alpha_5 = -e_4^*\ ,$$

$$v_1 = e_1 - e_2\ ,\ \ v_2 = e_2 - e_3\ ,\ \ v_3 = ae_3 - e_1\ ,\ \ v_4 = \mu e_1 + \mu e_2 + \mu e_3 + \nu e_4\ ,\ \ v_5 = -2e_4\ .$$

a) Il suffit de vérifier les hypothèses du fait 4.1: Nos choix de paramètres (9) assurent que, pour tout $1 \leq i,j \leq 5$, les équations (6) et (7) sont satisfaites avec la matrice $A = (\alpha_i(v_j))_{1\leq i,j\leq 5}$ et la matrice de Coxeter $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 5}$ données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 & 0 \\ -1 & -a^{-1} & 2 & \frac{\mu(1-a)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & d & 2 \\ 2 & 2 & d & 1 & \infty \\ 2 & 2 & 2 & \infty & 1 \end{pmatrix}$$

Le diagramme du groupe de Coxeter et le prisme avec la multiplicité des arêtes sont donnés dans la figure 15.

Les 6 diagrammes de Coxeter associés à chacun des 6 sommets du prisme P sont 4 fois de type $A_2 \times A_1$ et 2 fois de type A_3, B_3 ou H_3 selon que $d = 3$, 4 ou 5. Ils correspondent bien à des groupes de Coxeter finis (voir [26]).

b) Soient G l'adhérence de Zariski de Γ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Remarquons tout d'abord que l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de l'adhérence de Zariski du groupe Γ_T engendré par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ est

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1,x_2,x_3,0) \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}\ .$$

Figure 15: Le graphe et le domaine fondamental du groupe de Coxeter

Comme $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, pour $i \neq j$ la projection sur $E_{ij} = e_i \otimes e_j^*$ parallèlement aux autres E_{kl} laisse stable $\mathfrak{g}$.

Calculons alors l'élément $X := \sigma_4(E_{11} - E_{22})\sigma_4$ qui est dans $Ad(\sigma_4)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$. On a

$$\begin{aligned} X &= e_1 \otimes e_1^* - e_2 \otimes e_2^* - \mu(e_1 - e_2) \otimes \alpha_4 + v_4 \otimes (e_1^* - e_2^*) \\ &= (1 + 2\mu)(E_{11} - E_{22}) + \mu(E_{13} - E_{23} + E_{31} - E_{32} + E_{14} - E_{24}) + \nu(E_{41} - E_{42}) \end{aligned}$$

On en déduit que les matrices $E_{13}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{14}, E_{24}, E_{41}, E_{42}$ sont dans $\mathfrak{g}$ puis que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$.

c) Soit T le triangle de sommets $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$. Ce triangle T est inclus dans Ω, est préservé par le groupe Γ_T et le quotient $\Gamma_T \backslash T$ est compact. Donc T est proprement plongé dans Ω et Ω n'est pas strictement convexe. $\diamondsuit$

Remarques - D'après le corollaire 1.2, le groupe Γ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Il est facile dans cet exemple de trouver un tel sous-groupe Γ_0: celui de générateurs $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3$ et $\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2$.

- La construction des exemples de la proposition 4.2 peut se généraliser en dimension m avec à $3 \leq m \leq 6$.

Références

[1] D.Bachman - A note on Kneser-Haken finiteness, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2003) p.899-902.

[2] Y.Benoist - Convexes divisibles I, in Algebraic Groups and Arithmetics, Tata Inst. Fund. Res. Stud. in Math. 17, Narosa (2004) p.339-374.

[3] Y.Benoist - Convexes divisibles II, Duke Math. J. 120 (2003) p.97-120.

[4] Y.Benoist - Convexes divisibles III, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (to appear).

[5] J.P.Benzecri - Sur les variétés localement affines et localement projectives, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960) p.229-332.

[6] F.Bonahon - Geometric structures on 3-manifolds, in Handbook of geometric topology, North-Holland (2002) p.93-164.

[7] N.Bourbaki - Groupes et algèbres de Lie ch. 4,5 et 6, Masson (1981).

[8] A.Candel, L.Conlon - Foliations I, GSM 23 Amer. Math. Soc. 2000.

[9] H.Gillet, P.Shalen - Dendrology of groups in low $\mathbb{Q}$-ranks, Jour. Diff. Geom. 32 (1990) p.605-712.

[10] W.Goldman - Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) p.791-845.

[11] J.Hempel - 3-manifolds, Ann. Math. Stud. 86, Princ. Univ. Press (1976).

[12] D.Johnson, J.Millson - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." PM 67 Birkhaüser(1984) p.48-106.

[13] V.Kac, E.Vinberg - Quasihomogeneous cones, Math. Notes 1 (1967) p.231-235.
[14] M.Kapovich - Hyperbolic manifolds and discrete groups, PM 183 Birkhäuser (2001).
[15] J.L.Koszul - Déformation des connexions localement plates, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) p.103-114.
[16] J.Morgan, P.Shalen - Degenerations of hyperbolic structures III, Ann. of Math. 127 (1988) p.457-519.
[17] F.Paulin - Actions de groupes sur les arbres, Sém. Bourbaki 808, Astérisque 241 (1997) p.97-137.
[18] J.F.Plante - Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math. 102 (1975) p.327-361.
[19] M.Raghunathan - Discrete subgroups of Lie groups, Springer (1972).
[20] P.Scott - The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc. 15 (1983) p.401-487.
[21] W.Thurston - Geometry and topology of 3-manifolds, lecture notes (1978-81) available at www.msri.org/publications/books/gt3m.
[22] W.Thurston - Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. AMS 6 (1982) p.357-381.
[23] W.Thurston - Three dimensional geometry and topology, Princeton Math. Ser. 35 Princ. Univ. Press (1997).
[24] J.Vey - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 24 (1970) p.641-665.
[25] E.Vinberg - Discrete linear groups that are generated by reflections, Izv. Akad. Nauk SSSR 35 (1971) p.1072-1112.
[26] E.Vinberg - Geometry II, Encyclopedia of Math. Sc. 29 Springer (1993).

Ecole Normale Supérieure-CNRS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris
benoist@dma.ens.fr www.dma.ens.fr/~benoist