

Itération de pliages de quadrilatères (II)

Yves Benoist & Dominique Hulin

ABSTRACT Iteration of quadrilateral foldings (II)

Starting with a quadrilateral $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ of \mathbb{R}^2 , one constructs a sequence of quadrilaterals $q_n = (A_{4n+1}, \dots, A_{4n+4})$ by iteration of foldings : $q_n = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(q_{n-1})$ where the folding φ_j replaces the vertex number j by its symmetric with respect to the opposite diagonal (see figure ??).

We have studied in [1] the dynamical behavior of this sequence. In particular, we have seen that the drift $v(q_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} q_n$ exists and, for Lebesgue almost all q_0 , the sequence $(q_n - nv(q_0))_{n \geq 1}$ is dense on a bounded analytic curve (see figures 1 to 2).

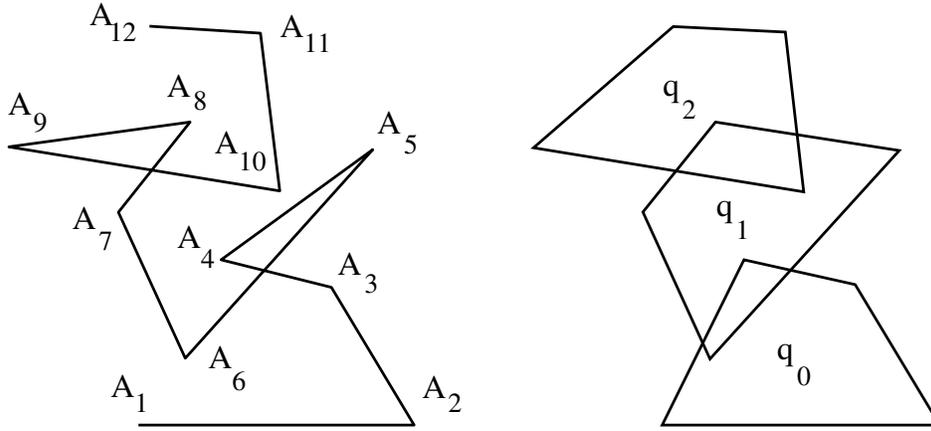
Here, we prove that, for Baire generic q_0 , the closure of the same sequence $(q_n - nv(q_0))_{n \geq 1}$ contains all the translates of q_0 .

1 Introduction

Dans [1], nous étudions le comportement dynamique d'une suite $q_n = \varphi^n(q_0)$ de quadrilatères du plan obtenus à partir d'un quadrilatère $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ par itération du pliage cyclique

$$\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$$

où, à chaque étape, le pliage φ_j associe à un quadrilatère $q = (B_1, \dots, B_4)$ le quadrilatère $\varphi_j(q)$ obtenu en remplaçant le sommet numéro j par son symétrique par rapport à la diagonale opposée. On notera $q_n = (A_{4n+1}, A_{4n+2}, A_{4n+3}, A_{4n+4})$. On a donc $A_5 = s_{A_2 A_4}(A_1)$ puis $A_6 = s_{A_3 A_5}(A_2)$, etc (voir figure ??).



Le pliage cyclique du quadrilatère $q_0 = (0, 10, 7 + 5i, 3 + 6i)$.

Remarquons que les longueurs des côtés de q_0 et de q_n sont les mêmes. Notons $a_j > 0$ ces longueurs. On supposera $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \neq 0$. Répondant à des conjectures de Charter et Rogers dans [2] basées sur des expérimentations numériques, on montre dans [1] l'existence d'une dérive

$$v(q_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} q_n \in \mathbb{R}^2$$

et on y donne un critère d'annulation de cette dérive : lorsque q_0 est de type non périodique (c'est-à-dire lorsque q_0 n'est isométrique à aucun des q_n avec $n \geq 1$), on a l'équivalence

$$v(q_0) = 0 \iff M + m \leq p,$$

où M est le plus grand côté, m le plus petit côté et p le demi-périmètre de q_0 . On y montre d'une part l'affirmation suivante qui est illustrée par les figures 1 et 2.

Pour presque tout q_0 , la suite $q_n - n v(q_0)$ est dense sur une courbe analytique bornée.

Par contraste, on y affirme aussi (prop 1.5.b de [1]) que

(A) *pour q_0 générique, la suite $q_n - n v(q_0)$ n'est pas bornée.*

La condition q_0 *générique* signifie que l'assertion est vraie pour q_0 dans une intersection dénombrable d'ouverts denses. Rappelons qu'une telle intersection est encore dense.

Le but principal de ce texte est de préciser cette assertion (A):

Théorème 1 *Pour q_0 générique, la suite $q_n - n v(q_0)$ admet dans son adhérence tous les translatés du quadrilatère q_0 .*

Autrement dit, génériquement, l'adhérence de cette suite est "la plus grosse possible".

Les figures 1 et 2, qui illustrent bien le comportement dynamique de *presque tout* quadrilatère, ne reflètent donc pas du tout le comportement dynamique d'un quadrilatère *générique*.

Voici le plan de cet article.

Nous commençons tout d'abord, dans la section 2, par rappeler les notations et la démarche de [1] qui interprète la transformation φ comme un système dynamique fibré au dessus d'une translation par un irrationnel $\rho_{\mathbf{a}}$ sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Nous calculons ensuite dans la section 3 les coefficients de Fourier d'une fonction cocycle $f_{\mathbf{a}}$ associée à ce système dynamique.

Nous montrons dans la section 4 que l'ensemble des translations qui envoient q_0 sur un quadrilatère de l'adhérence de l'orbite de q_0 est un semigroupe.

Nous montrons dans la section 5 comment construire des droites entières de telles translations limites à partir de conditions diophantiennes sur le nombre de rotation $\rho_{\mathbf{a}}$ et de conditions de décroissance des coefficients de Fourier $c_n(f_{\mathbf{a}})$ du cocycle $f_{\mathbf{a}}$.

Nous vérifions dans la section 6 que ces conditions sont vérifiées pour q_0 générique ce qui prouvera le théorème 1.

Dans la section 7, nous signalons et corrigeons quelques erreurs et coquilles de [1].

2 Rappels sur le pliage cyclique

On note $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et $Q = Q_{\mathbf{a}}$ l'ensemble des quadrilatères de côtés a_1, a_2, a_3 et a_4 . On note $\dot{Q} = \dot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des translations et $\ddot{Q} = \ddot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des isométries positives de \mathbb{R}^2 . Pour tout quadrilatère q dans Q , on note \dot{q} et \ddot{q} ses images dans \dot{Q} et \ddot{Q} . On note $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$ (resp. $\dot{\varphi}_j$ et $\ddot{\varphi}_j$) les transformations de \dot{Q} et \ddot{Q} induites par φ (resp. φ_j).

La courbe \ddot{Q} est une courbe elliptique réelle et la transformation

$$\ddot{\varphi}_2 \circ \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_4 \circ \ddot{\varphi}_3$$

est une translation sur cette courbe elliptique. Cette courbe peut avoir une, ou deux composantes connexes ; on parlera alors de quadrilatère de type connexe, ou non connexe.

Il existe sur \dot{Q} une fonction $\dot{\varphi}$ -invariante h . En identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , elle est donnée par

$$h(\dot{q}_0) = r_1 r_2 r_3 / r_4,$$

où $r_j = \frac{1}{a_j}(A_{j+1} - A_j)$ pour $j = 1, 2$ ou 3 , et $r_4 = \frac{1}{a_4}(A_1 - A_4)$. On supposera désormais, ce qui n'est pas restrictif, que $h(\dot{q}_0) = -1$. On introduit alors $\dot{Q}_1 := \{\dot{q} / h(\dot{q}) = -1\}$; c'est une courbe elliptique réelle revêtement à deux feuillets de \ddot{Q} . On notera $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ la composante connexe de \dot{Q}_1 contenant \dot{q}_0 ; elle est préservée par $\dot{\varphi}$.

L'action de $\dot{\varphi}$ sur la courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est conjuguée à une translation $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow x + \rho_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dire que q_0 est de type non périodique, c'est dire que $\rho_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est irrationnel. C'est une condition générique que nous supposons désormais vérifiée. Au dessus de cette courbe, le pliage cyclique "recentré" $\varphi - v(q_0)$ est donc conjugué à un système dynamique $\varphi_{\mathbf{a}}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ donné par

$$\varphi_{\mathbf{a}}(x, v) = (x + \rho_{\mathbf{a}}, v + f_{\mathbf{a}}(x)), \quad (1)$$

où la fonction $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique explicite de moyenne nulle (voir le lemme 5.1 de [1]).

3 Coefficients de Fourier

Le but de cette partie est d'estimer les coefficients de Fourier $c_n(f_{\mathbf{a}})$. Pour cela nous aurons encore besoin de quelques rappels de [1].

Soient

$$a := a_1 a_3 \quad , \quad R := a_2 a_4 \quad , \quad r := \frac{1}{2} |a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2| \quad ,$$

$$k := \left(\frac{4aR}{(a+R)^2 - r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \in]0, 1[\cup]1, \infty[\quad ,$$

et cn , sn , dn les trois fonctions trigonométriques elliptiques associées à ce paramètre k .

Notons

$$4K\mathbb{Z} \oplus 4K'i\mathbb{Z} \quad ,$$

avec $K, K' > 0$, le réseau de \mathbb{C} formé des périodes communes à ces trois fonctions, et H la fonction

$$H(z) = \text{cn}(4Kz) + i \text{sn}(4Kz) \quad ,$$

qui est méromorphe 1-périodique sur \mathbb{C} . Le comportement de H diffère selon que $k < 1$ ou que $k > 1$. On a

$$H(z + \frac{1}{2}) = -H(z) \quad \text{pour } k < 1 \quad \text{et} \quad H(z + \frac{1}{2}) = H(-z) \quad \text{pour } k > 1. \quad (2)$$

Dans les deux cas, on a

$$H(-z) = \overline{H(\bar{z})} = 1/H(z) \quad \text{et} \quad H(z + i\frac{K'}{2K}) = -1/H(z). \quad (3)$$

Nous verrons ci-dessous que la fonction $f_{\mathbf{a}}$ s'exprime simplement en fonction de H . Comme nous souhaitons estimer ses coefficients de Fourier, nous commençons par ceux de H . Dans le rectangle $[0, 1/2[+ i[-\frac{K'}{2K}, \frac{K'}{2K}[$, la fonction H a un seul pôle $z_0 := -i\frac{K'}{4K}$; ce pôle est simple. On notera

$$w_0 := e^{\frac{\pi K'}{2K}} > 1.$$

Si l'on regarde $H(z)$ comme une fonction de $w := e^{2i\pi z}$, les seuls pôles de la fonction $w \rightarrow H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(H) w^n$ dans l'anneau $A := \{w / w_0^{-2} \leq |w| \leq w_0^2\}$ sont en w_0 et $-w_0$ lorsque $k < 1$, et en w_0 et $-w_0^{-1}$ lorsque $k > 1$. On en déduit les estimations suivantes, en notant $R_0 \neq 0$ le résidu de H en w_0 :

$$\begin{aligned} \text{pour } k < 1, \quad c_n(H) &= -2R_0 w_0^{-n-1} + O(w_0^{-2|n|}) \quad \text{si } n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ &= O(w_0^{-2|n|}) \quad \text{si } n < 0 \text{ ou } n \text{ pair,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pour } k > 1, \quad c_n(H) &= -R_0 w_0^{-n-1} + O(w_0^{-2|n|}) \quad \text{si } n > 0 \\ &= R_0 (-w_0)^{-|n|-1} + O(w_0^{-2|n|}) \quad \text{si } n < 0. \end{aligned}$$

Chaque $\check{\varphi}_j$ se relève à \dot{Q}_1 en une involution notée $\check{\psi}_j$ (lorsque $k > 1$, on pourrait supposer que $\check{\psi}_j$ préserve \dot{Q}_{q_0} , mais pas en général). Il résulte alors de la formule (36) de [1] qu'il existe des $\rho_j \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et des signes $\varepsilon_j = \pm 1$ ($1 \leq j \leq 4$), pour lesquels $\rho_1 = 0$, $\varepsilon_1 = -1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$f_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{1 \leq j \leq 4} \pm a_j H(\rho_j + \varepsilon_j x) - v(q_0). \quad (4)$$

On a des égalités

$$\rho_{\mathbf{a}} = \pm 2\rho_3 \quad \text{et} \quad 2\rho_4 = \pm 2\rho_2 \pm 2\rho_3.$$

En notant $u_j := e^{2i\pi\rho_j}$, on aura donc

$$u_4 = \pm u_2^{\pm 1} u_3^{\pm 1}.$$

Les signes qui interviennent dans ces expressions dépendent de \mathbf{a} mais sont indépendants de x ; nous n'aurons pas besoin de les préciser ici.

On peut donc exprimer les coefficients de Fourier de $f_{\mathbf{a}}$ en fonction de ceux de H . Lorsque $n \neq 0$ on obtient (avec encore $u_j := e^{2i\pi\rho_j}$) :

$$c_n(f_{\mathbf{a}}) = \sum_{1 \leq j \leq 4} \pm a_j u_j^{\varepsilon_j n} c_{\varepsilon_j n}(H). \quad (5)$$

On retiendra finalement les estimations suivantes.

- Lorsque le quadrilatère q_0 est de type non connexe, ou de façon équivalente $m+M < p$, ou $a \notin (R-r, R+r)$, ou encore $k < 1$, on a :

$$\text{si } n \in 2\mathbb{Z} + 1 : \quad c_n(f_{\mathbf{a}}) = \sum_{\{j / \varepsilon_j n > 0\}} \pm 2a_j u_j^{|n|} R_0 w_0^{-|n|-1} + O(w_0^{-2|n|}). \quad (6)$$

$$\text{si } n \in 2\mathbb{Z} : \quad c_n(f_{\mathbf{a}}) = O(w_0^{-2|n|}). \quad (7)$$

- Lorsque le quadrilatère q_0 est de type connexe, ou si $k > 1$, on a :

$$c_n(f_{\mathbf{a}}) = \sum_{1 \leq j \leq 4} \pm a_j u_j^{\varepsilon_j n} R_0 w_0^{-|n|-1} + O(w_0^{-2|n|}). \quad (8)$$

4 L'ensemble des translations limites

Avant de démontrer le théorème 1, commençons par étudier "l'ensemble E_x des translations limites".

Proposition 2 *Soient $\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un irrationnel et $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue à variation bornée de moyenne nulle. Soit φ_f le système dynamique sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$ donné par*

$$\varphi_f(x, v) = (x + \rho, v + f(x)), \quad \text{et} \quad (9)$$

$$E_x := \{v \in \mathbb{R}^N / \exists n_k \in \mathbb{Z} \text{ distincts tels que } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_f^{n_k}(x, 0) = (x, v)\} .$$

- a) Pour tout x dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , l'ensemble E_x est un sous-semigroupe fermé de \mathbb{R}^N .
b) Si $E_x = \mathbb{R}^N$, alors l'orbite $\{\varphi_f^n(x, 0) / n \geq 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$.

Démonstration Il est naturel d'introduire aussi les ensembles de translations limites pour les temps positifs ou négatifs:

$$E_x^\pm := \{v \in \mathbb{R}^N / \exists n_k \in \pm\mathbb{N} \text{ distincts tels que } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_f^{n_k}(x, 0) = (x, v)\} ,$$

de sorte que $E_x = E_x^+ \cup E_x^-$.

a) Montrons plus précisément les inclusions

$$E_x^+ + E_x^+ \subset E_x^+ , \quad E_x^- + E_x^- \subset E_x^- , \quad (10)$$

$$E_x^+ + E_x^- \subset E_x^+ , \quad E_x^+ + E_x^- \subset E_x^- . \quad (11)$$

Montrons par exemple la dernière inclusion. Soient v^+ dans E_x^+ et v^- dans E_x^- . Par hypothèse, il existe des suites positives strictement croissantes m_k et n_k telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_f^{m_k}(x, 0) = (x, v^+) \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_f^{-n_k}(x, 0) = (x, v^-) .$$

Par continuité des transformations $\varphi_f^{m_j}$, on peut alors trouver une suite k_j telle que la suite $n_{k_j} - m_j$ est positive, strictement croissante et

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_f^{m_j - n_{k_j}}(x, 0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_f^{m_j}(x, v^-) = (x, v^+ + v^-) .$$

Ce qui prouve bien l'inclusion $E_x^+ + E_x^- \subset E_x^-$. Les autres inclusions se prouvent de même. En particulier E_x est un sous-semigroupe de \mathbb{R}^N . Il est clairement fermé.

b) Montrons tout d'abord

$$E_x^+ \neq \emptyset \text{ et } E_x^- \neq \emptyset . \quad (12)$$

Montrons par exemple la première. Il suffit pour cela de trouver une suite S d'entiers $n \geq 1$ telle que $\lim_{n \in S} n\rho = 0$ et

$$\| \sum_{0 \leq k < n} f(x + k\rho) \| \leq \text{Var}(f) \quad (13)$$

où $\text{Var}(f)$ est la variation totale de f . Cette majoration (13) résulte du lemme de Koksma (lemme 4.13 de [1]). Nous en rappelons la démonstration car nous en reprendrons les idées dans la section 5.

D'après le principe des tiroirs de Dirichlet, on peut choisir une suite infinie $S \subset \mathbb{N}$ d'entiers positifs n pour lesquels il existe un entier m premier à n tel que

$$d(\rho, \frac{m}{n}) < \frac{1}{n^2} , \quad (14)$$

où, pour y, y' dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , $d(y, y')$ est la distance euclidienne de y à y' . Les n points $k\rho$, pour $0 \leq k < n$, se répartissent alors dans les n intervalles $I_i := (\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$, à raison d'un point par intervalle. Lorsque le point $k\rho$ est dans l'intervalle I_i , on a la majoration

$$\|f(x + k\rho) - n \int_{I_i} f(t)dt\| \leq \text{Var}_{I_i}(f) ,$$

où $\text{Var}_{I_i}(f)$ est la variation de f sur l'intervalle I_i .

En sommant ces n inégalités et en utilisant l'hypothèse $\int f(t)dt = 0$, on obtient la majoration (13) recherchée. On a donc $E_x^+ \neq \emptyset$. De même, on a $E_x^- \neq \emptyset$.

Utilisons maintenant les inclusions (10) et (11). Soient v_1^+ dans E_x^+ et v_1^- dans E_x^- de sorte que la somme $v_1 := v_1^+ + v_1^-$ est dans $E_x^+ \cap E_x^-$. Par hypothèse, on a l'égalité

$$\mathbb{R}^N = v_1 + E_x \subset E_x^+ \cap E_x^- .$$

On en déduit les égalités $E_x^+ = E_x^- = \mathbb{R}^N$. En particulier, l'adhérence F de l'orbite $\{\varphi_f^n(x, 0) / n \geq 0\}$ contient tous les points (x, v) avec v dans \mathbb{R}^N . Comme ρ est irrationnel, cette orbite est dense dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$. \square

5 Construction de translations limites

La proposition suivante permet de construire des droites de translations limites à partir de propriétés diophantiennes du nombre de rotation ρ et de propriétés de décroissance des coefficients de Fourier $c_n = c_n(f)$ du cocycle f .

On note $u_x := e^{2i\pi x}$.

Proposition 3 *Soient $\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un irrationnel, $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique de moyenne nulle et $c_n = c_n(f)$ ses coefficients de Fourier. Soit φ_f le système dynamique sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$ donné par*

$$\varphi_f(x, v) = (x + \rho, v + f(x)) .$$

Soit x dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On suppose qu'il existe des réels $w_0 > 1$, $A > 0$, un élément $v \in \mathbb{C}$ et une suite infinie $S \subset \mathbb{N}$ vérifiant les trois conditions suivantes:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n| \leq Aw_0^{-|n|} , \tag{15}$$

$$\lim_{n \in S} (c_n u_x^n + c_{-n} u_x^{-n}) w_0^n = v , \tag{16}$$

$$\text{pour tout } n \in S, \text{ il existe } m \text{ premier à } n \text{ tel que } d(\rho, \frac{m}{n}) \leq n^{-1} w_0^{-2n} . \tag{17}$$

Alors, si $v \neq 0$, la droite $\mathbb{R}v$ est incluse dans l'ensemble E_x des translations limites.

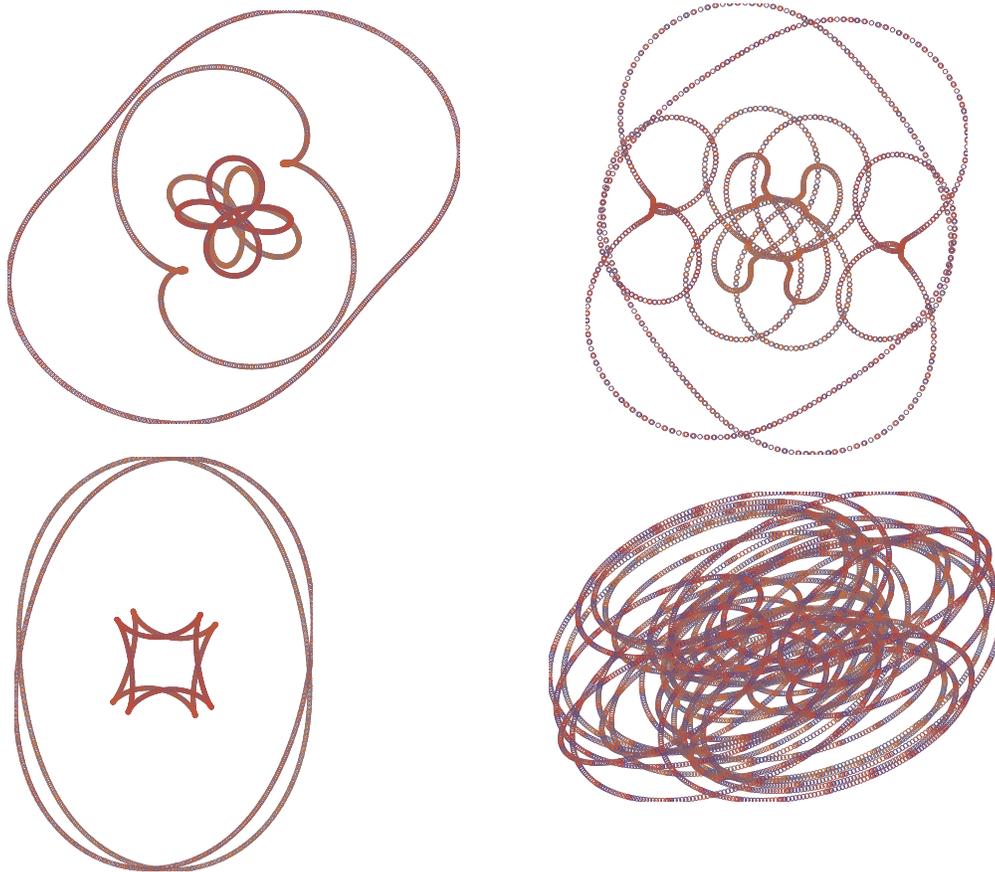


Figure 1: La suite $(A_n)_{n \leq 2500}$ pour des quadrilatères de type non connexe:
 $q_0 = (2, 12, 5 + 3i, 0)$, $(0, 10, 4 + i, 6 + i)$, $(1, 11, 4 + 20i, 20i)$ et $(0, 10, 3 + i, 9 + i)$.
 Pour presque tout q_0 , les sommets de q_n sont denses sur une courbe analytique.
 Néanmoins, pour q_0 générique, ces sommets sont denses dans le plan!

Remarque Cet énoncé n'est pas optimal: on peut remplacer \mathbb{C} par \mathbb{R}^N , la suite w_0^{-n} par une suite $a_n \dots$ mais il nous suffira.

Commençons par une estimation des sommes de Birkhoff qui nous sera utile lorsque le nombre de rotation ρ est très proche d'un rationnel $\frac{m}{n}$.

Lemme 4 Soient $\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique de moyenne nulle. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on note $c_n = c_n(f)$ les coefficients de Fourier et $S_n(f, x) = S_n(f, x, \rho)$ les sommes de Birkhoff:

$$S_n(f, x) = \sum_{0 \leq j < n} f(x + j\rho) \quad \text{si } n \geq 0,$$

$$S_n(f, x) = - \sum_{n \leq j < 0} f(x + j\rho) \quad \text{si } n < 0.$$

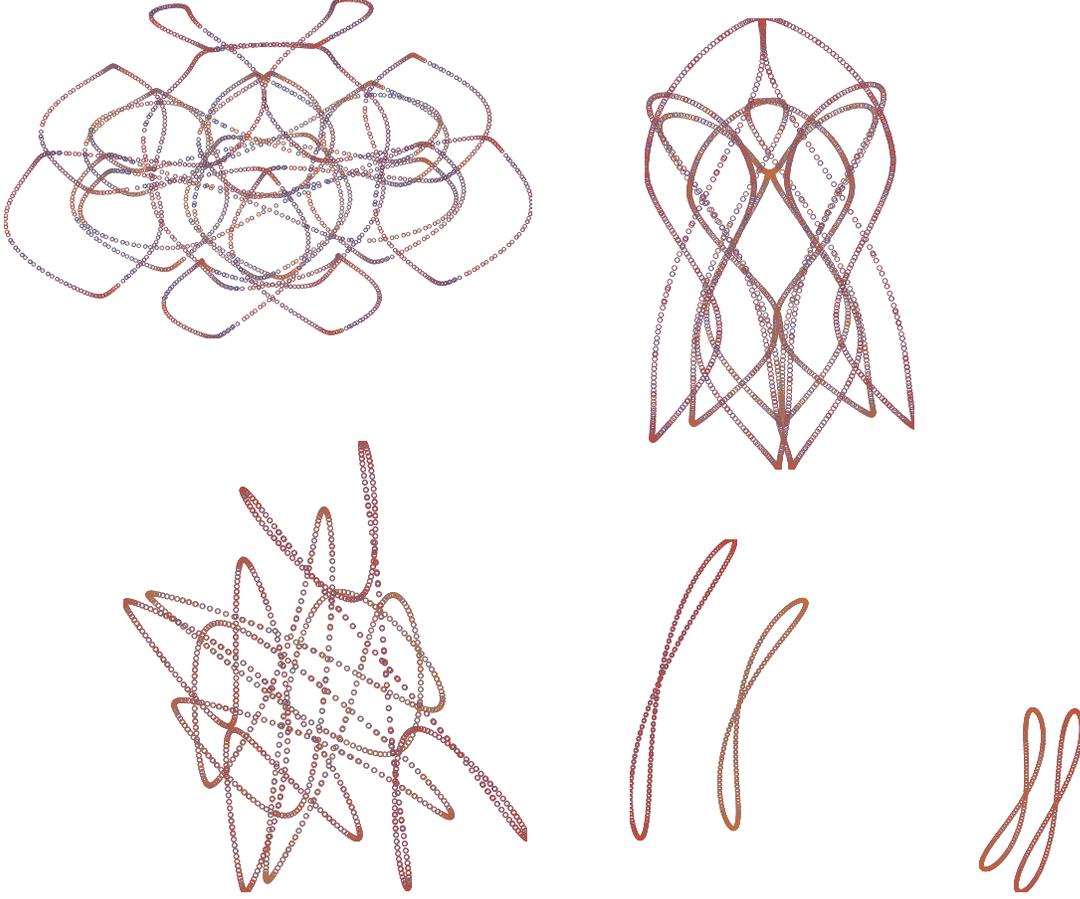


Figure 2: La suite $(A_n - \frac{n}{4} v(q_0))_{n \leq 2500}$ pour des quadrilatères de type connexe:
 $q_0 = (0, 10, 3, 8 + i)$, $(0, 10, 3, 9 + 2i)$, $(2i, 0, 1, 1 + i)$ et $(0, 10, 9, 2 + i)$.
 Pour presque tout q_0 , les sommets de $q_n - n v(q_0)$ sont denses sur une courbe analytique.
 Néanmoins, pour q_0 générique, ces sommets sont denses dans le plan!

a) Pour tout x, x' dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , on a la majoration

$$|S_n(f, x) - S_n(f, x')| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) |n| d(x, x'). \quad (18)$$

b) Pour m entier premier à n , on a la majoration

$$|S_n(f, x) - (c_n u_x^n + c_{-n} u_x^{-n}) n| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) |n|^2 d(\rho, \frac{m}{n}) + \left(\sum_{|k| \geq 2n} |c_k| \right) |n|. \quad (19)$$

Démonstration du lemme 4 a) Cela résulte de la majoration, pour tout y, y' dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} ,

$$|f(y) - f(y')| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) d(y, y').$$

b) La même majoration avec $y = x + j\rho$ et $y' = x + j\frac{m}{n}$, prouve l'inégalité

$$|S_n(f, x, \rho) - S_n(f, x, \frac{m}{n})| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) |n|^2 d(\rho, \frac{m}{n}) .$$

On calcule alors

$$S_n(f, x, \frac{m}{n}) = \sum_{k \in n\mathbb{Z}} nc_k u_x^k .$$

On en déduit la majoration (19). □

Démonstration de la proposition 3 Soit $t \in \mathbb{R}$. On veut trouver une suite Σ d'entiers ℓ tels que

$$\lim_{\ell \in \Sigma} \ell\rho = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\ell \in \Sigma} S_\ell(f, x) = tv .$$

Notons $E(t)$ la partie entière de t . Montrons que la suite des entiers $\ell_n = nL_n$ avec n dans S et $L_n := E(tw_0^n/n)$ convient. Supposons tout d'abord $t > 0$.

On a, pour n dans S ,

$$d(\ell_n\rho, 0) \leq nL_n d(\rho, \frac{m}{n}) \leq tw_0^n d(\rho, \frac{m}{n}) .$$

Ce qui, grâce à l'hypothèse (17), prouve la première assertion: $\lim_{n \in S} \ell_n\rho = 0$.

Montrons la deuxième assertion. On a l'égalité

$$S_{\ell_n}(f, x) = \sum_{0 \leq j < L_n} S_n(f, x + nj\rho) . \tag{20}$$

D'après (18), on a la majoration

$$\begin{aligned} |S_{\ell_n}(f, x) - L_n S_n(f, x)| &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) L_n^2 n^2 d(\rho, \frac{m}{n}) \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) t^2 w_0^{2n} d(\rho, \frac{m}{n}) \end{aligned}$$

qui tend vers 0 pour n dans S d'après l'hypothèse (17). D'après (19), on a la majoration

$$\begin{aligned} L_n |S_n(f, x) - (c_n u_x^n + c_{-n} u_x^{-n}) n| \\ \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) n^2 L_n d(\rho, \frac{m}{n}) + \left(\sum_{|k| \geq 2n} |c_k| \right) n L_n \\ \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |kc_k| \right) t n w_0^n d(\rho, \frac{m}{n}) + \left(\sum_{|k| \geq 2n} |c_k| \right) t w_0^n \end{aligned}$$

Les deux termes de la somme tendent vers 0, pour n dans S . Le premier grâce à l'hypothèse (17) et le deuxième grâce à l'hypothèse (15). Enfin, d'après l'hypothèse (16), on a

$$\lim_{n \in S} (c_n u_x^n + c_{-n} u_x^{-n}) n L_n = tv .$$

On déduit alors des trois assertions ci-dessus l'égalité cherchée

$$\lim_{n \in S} S_{\ell_n}(f, x) = tv .$$

Un argument semblable permet de traiter le cas $t < 0$. □

6 Densité des orbites génériques

Le but de cette partie est de montrer le théorème 1.

Commençons par un lemme général. Notons $p : \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$ la projection et d la distance euclidienne sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$.

Lemme 5 Soient $r = (r_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs, $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$ et P une partie infinie de \mathbb{N} . L'ensemble

$$L_{r,t,P} := \left\{ y = (y_1, \dots, y_N) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N \mid \forall n_0 \geq 1, \exists n \in P, n \geq n_0 \right. \\ \left. \exists m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N \text{ avec } m_i \wedge n = 1 \text{ et } d(y, p(\frac{m+t}{n})) < r_n \right\}$$

est une partie générique de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$

Remarque L'ensemble $L_{r,t,P}$ est, grosso modo, formé des éléments dont certains multiples approchent "rapidement" $p(t)$.

Démonstration du lemme 5 On a l'égalité,

$$L_{r,t,P} = \bigcap_{n_0 \geq 1} \bigcup_{\substack{n \in P \\ n \geq n_0}} \left(\bigcup_{m_i \wedge n = 1} B(p(\frac{m+t}{n}), r_n) \right).$$

Il s'agit de réunions de boules ouvertes dont les centres forment une partie dense de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N$. Donc $L_{r,t,P}$ est bien une intersection dénombrable d'ouverts denses. \square

Nous appliquerons ce lemme sous la forme suivante. Rappelons qu'à chaque quadrilatère, nous avons associé dans les sections 2 et 3, un triplet $(\rho_3, \rho_2, x) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3$.

Corollaire 6 Soient α, θ dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} et $\delta = 0$ ou 1 . Alors, pour q_0 générique, il existe une suite infinie $S \subset 2\mathbb{N} + \delta$ tels que, pour tout n dans S , on peut trouver m premier à n tel que

$$d(\rho_3, \frac{m}{n}) \leq e^{-n^2}, \quad \lim_{n \in S} n\rho_2 = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{n \in S} nx = \theta.$$

Démonstration En effet, d'après le lemme 5, l'existence de cette suite S est une condition générique sur le triplet (ρ_3, ρ_2, x) . Pour prouver que cette condition est générique pour q_0 , il suffit alors de remarquer que l'application $q_0 \rightarrow (\rho_3, \rho_2, x)$ est analytique réelle et ouverte en dehors d'une hypersurface. On remarquera pour cela que ρ_3 ne dépend que de (a, R, r) et que ρ_2 ne dépend que de \mathbf{a} . \square

Démonstration du théorème 1 D'après les propositions 2 et 3, il suffit de montrer que pour q_0 générique on peut trouver, pour le système dynamique φ_f avec $f = f_{\mathbf{a}}$, suffisamment de suites S comme dans la proposition 3 pour que les vecteurs limites v donnés par la formule (16) engendrent \mathbb{C} .

Choisissons $\delta = 0$ ou 1 , et des couples (α, θ) dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Par exemple $(0, 0)$ et $(0, \frac{1}{4})$. Le corollaire 6 affirme que, pour q_0 générique, on peut choisir des suites S comme dans

ce corollaire 6. La formule (5) pour $c_n(f_{\mathbf{a}})$ prouve que ces suites conviennent. En effet, calculons le vecteur limite $v := v_{\alpha, \theta}$ de la formule (16).

Lorsque $k < 1$ on prend $\delta = 1$. Comme $c_{-n}(H) = 0$, on a

$$c_n(f_{\mathbf{a}})u_x^n + c_{-n}(f_{\mathbf{a}})u_x^{-n} = \sum_{1 \leq j \leq 4} \pm a_j u_j^n u_x^{\varepsilon_j n} c_n(H)$$

et donc,

$$v_{\alpha, \theta} = 2R_0 w_0^{-1} [\pm a_1 u_{\pm \theta} \pm a_2 u_{\pm \alpha \pm \theta} \pm a_3 u_{\pm \theta} \pm a_4 u_{\pm \alpha \pm \theta}].$$

Ces vecteurs $v_{\alpha, \theta}$ engendrent bien le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Lorsque $k > 1$, on a des formules analogues. Comme $c_{-n}(H) = (-1)^n c_n(H)$, on a

$$c_n(f_{\mathbf{a}})u_x^n + c_{-n}(f_{\mathbf{a}})u_x^{-n} = \sum_{1 \leq j \leq 4} \pm a_j (u_j^n u_x^{\varepsilon_j n} + (-1)^\delta u_j^{-n} u_x^{-\varepsilon_j n}) c_n(H)$$

et donc, si on choisit $\delta = 0$,

$$v_{\alpha, \theta} = 2R_0 w_0^{-1} [\pm a_1 \cos(\theta) \pm a_2 \cos(\theta \pm \alpha) \pm a_3 \cos(\theta) \pm a_4 \cos(\theta \pm \alpha)]$$

et, si on choisit $\delta = 1$,

$$v_{\alpha, \theta} = 2iR_0 w_0^{-1} [\pm a_1 \sin(\theta) \pm a_2 \sin(\theta \pm \alpha) \pm a_3 \sin(\theta) \pm a_4 \sin(\theta \pm \alpha)]$$

Ces vecteurs $v_{\alpha, \theta}$ engendrent encore le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . □

7 Complément

Nous expliquons et corrigeons dans cette partie la preuve de l'assertion (A) donnée dans [1] qui est inexacte suite à une erreur dans le lemme 5.6 de cet article. Ce lemme doit être remplacé par l'assertion (C) ci-dessous. Une seule autre assertion de [1] est basée sur ce lemme 5.6: l'assertion (D) ci-dessous. Nous verrons aussi comment sa démonstration peut être rectifiée. Nous terminerons en signalant quelques coquilles de [1].

7.1 Les orbites génériques ne sont pas bornées

Voici une preuve directe de l'assertion (A) qui n'utilise pas les sections 4 et 5.

Démonstration de l'assertion (A) D'après un lemme de Furstenberg (voir le lemme 5.7 de [1]), l'existence d'orbites bornées pour le système dynamique (1) équivaut à l'existence de solutions continues $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ pour l'équation homologique suivante :

$$g(x + \rho_{\mathbf{a}}) - g(x) = f_{\mathbf{a}}(x). \tag{21}$$

Pour montrer l'assertion (A), il suffit donc de montrer

(B) *Pour \mathbf{a} générique, l'équation homologique (21) n'a pas de solutions continues.*

Si une solution continue g existe, il est facile de calculer les coefficients de Fourier $c_n(g)$ de g à l'aide des coefficients de Fourier $c_n(f_{\mathbf{a}})$ de $f_{\mathbf{a}}$: pour $n \neq 0$, ils sont donnés par la formule

$$c_n(g) = \frac{c_n(f_{\mathbf{a}})}{e^{2i\pi n\rho_{\mathbf{a}}} - 1}. \quad (22)$$

Il suffit donc de montrer que, pour \mathbf{a} générique, la suite donnée par (22) n'est pas bornée. C'est ce que nous allons faire dans ce texte. Plus précisément, nous allons montrer l'assertion suivante qui implique l'assertion (B):

(C) *Pour \mathbf{a} générique, il existe une suite infinie $S \subset \mathbb{Z}$ telle que*

$$\inf_{n \in S} |c_n(f_{\mathbf{a}})|^{\frac{1}{n}} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \in S} d(n\rho_{\mathbf{a}}, 0)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

D'après le corollaire 6, pour \mathbf{a} générique, il existe une suite $S \subset -2\mathbb{N} + 1$ telle que

$$\lim_{n \in S} d(n\rho_3, 0)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \in S} n\rho_2 = 0.$$

D'après les formules (6) à (8), la suite $(w_0^{|n|} c_n(f_{\mathbf{a}}))_{n \in S}$ a alors une limite qui ne dépend que de \mathbf{a} et qui est non nulle pour \mathbf{a} générique.

Ce qui termine la preuve de l'assertion (C) et donc de l'assertion (A). \square

7.2 Les orbites denses sur une courbe C^0 non C^1

Le lemme 5.9 de [1] affirme que

(D) *Pour un ensemble dense de quadrilatères q_0 , la suite $q_n - n v(q_0)$ est bornée et son adhérence est une courbe C^0 nulle part C^1 .*

La démonstration de cette assertion (D) donnée dans [1] est aussi basée sur le même lemme 5.6 qui est inexact. Elle doit donc être modifiée comme pour l'assertion (A).

Démonstration de l'assertion (D) Donnons juste les grandes lignes: il suffit de montrer que, pour une famille dense de \mathbf{a} , l'équation homologique (21) a une solution C^0 nulle part dérivable. Il suffit pour cela de montrer que

(E) *pour \mathbf{a} dense, on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|c_n(f_{\mathbf{a}})|}{d(n\rho_{\mathbf{a}}, 0)} < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |n| \frac{|c_n(f_{\mathbf{a}})|}{d(n\rho_{\mathbf{a}}, 0)} = \infty.$$

En effet, pour un tel \mathbf{a} , l'équation homologique (21) a une solution g continue mais non Lipschitzienne car $\sum |c_n(g)| < \infty$ et $\sup |n c_n(g)| = \infty$. L'irrationalité de $\rho_{\mathbf{a}}$ assure alors que g est nulle part dérivable.

Remarquons que, pour tout $w_0 > 1$ l'ensemble

$$DL_{w_0} := \left\{ \rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} / \sum_{n \geq 1} \frac{w_0^{-n}}{d(n\rho, 0)} < \infty \text{ et } \sup_{n \in 2\mathbb{N}+1} n \frac{w_0^{-n}}{d(n\rho, 0)} = \infty \right\}$$

est dense dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} (voir par exemple la preuve du lemme 5.9 de [1]).

Les formules explicites (6) à (8) pour les coefficients $c_n(f_{\mathbf{a}})$ prouvent que l'on a $c_n(f_{\mathbf{a}}) = O(w_0^{-|n|})$ et que, pour \mathbf{a} dans un ouvert dense, si $d(n\rho_{\mathbf{a}}, 0)$ est petit, et donc u_3^n proche de ± 1 , alors, pour n positif impair, $w_0^{-n} = O(c_n(f_{\mathbf{a}}))$. Ce qui prouve l'assertion (E). \square

Voici maintenant une liste de quelques coquilles de [1]:

- Dans le lemme 2.4 échanger NCI et NCII.
- A la fin de 2.4.2, lire: $\text{am}(z + 2K) = -\text{am}(z)$ lorsque $k > 1$.
- Dans le lemme 2.9, remplacer la formule définissant $\gamma_-(z)$ par $\gamma_-(z) := \gamma_+(z + 2iK')$.
- Dans la démonstration du lemme 2.9.b, l'équivalence n'est vraie que pour $k < 1$.
- Dans la démonstration du corollaire 2.10, ôter la dernière ligne.
- Dans le lemme 3.4, préciser que $\dot{\sigma}_0$ est donné par la formule (24).
- Dans la deuxième remarque du lemme 4.8, les deux valeurs de $j \in \{1, \dots, 4\}$ sont celles pour lesquelles le sommet A_j est extrémité du plus petit côté du quadrilatère.
- La formule (36) n'est vraie que pour $k > 1$. Pour $k < 1$, remplacer $(-1)^j$ par un signe $\varepsilon_j = \pm 1$.
- La proposition 5.3.b n'est valable que pour $f = f_{\mathbf{a}}$ avec \mathbf{a} générique.
- Le lemme 5.6 et la formule (39) ne sont valables que pour $f = f_{\mathbf{a}}$ avec \mathbf{a} générique (cf. l'assertion (C)).

Terminons cet article sur une note interrogative qui contraste avec le théorème 1: il est probable que

Pour un ensemble dense de quadrilatères q_0 , la suite $q_n - n v(q_0)$ n'est pas bornée mais son adhérence ne contient pas les translatés de q_0 .

Nous tenons à remercier M.Berger et F.Pécaut qui nous ont signalé que, 125 ans avant nous, donnant ainsi à notre travail des antécédents historiques prestigieux, G. Darboux avait étudié l'itération des pliages de quadrilatères dans [3] et [4] et découvert son lien avec les fonctions elliptiques, i.e. le fait que, avec nos notations, l'application $\tilde{\varphi}$ est une translation sur une courbe elliptique. Une présentation récente de ce théorème de Darboux et son lien avec le théorème de Poncelet sont bien détaillés dans [5].

Références

- [1] Y.BENOIST, D.HULIN - Itération de pliages de quadrilatères, *Inv. Math.* 157 (2004) p.147-194.
- [2] K.CHARTER, T.ROGERS - The dynamics of quadrilateral folding, *Experimental Mathematics* 2 (1993) p.209-222.
- [3] G.DARBOUX - Sur l'emploi des fonctions elliptiques dans l'étude du quadrilatère plan, *CRAS* (1879) p.1183-1185 et p.1252-1255.
- [4] G.DARBOUX - De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan, *Bulletin des Sciences Math.* (1879) p.109-128.
- [5] F.PÉCAUT - Quadrilatères articulés et zigzag, preprints (1997) disponibles à www.math.univ-avignon.fr/FPecaut.

Ecole Normale Supérieure-CNRS
Yves.Benoist@ens.fr

Université Paris-Sud
Dominique.Hulin@math.u-psud.fr