# Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes II


Yves Benoist [a], Jean-François Quint [b]

[a] *CNRS - Université Paris-Sud 91405 Orsay*

[b] *CNRS - Université Paris-Nord 93430 Villetaneuse*



Reçu le *****; accepté après révision le +++++

Présenté par £££££



**Résumé**

Soient $G$ un groupe de Lie réel, $\Lambda$ un réseau de $G$, $H \subset G$ un sous-groupe semi-simple connexe sans facteur compact et $\Gamma$ un sous-semigroupe Zariski dense de $H$. On montre que toute adhérence de $\Gamma$-orbite dans le quotient $X = G/\Lambda$ est homogène. Soit $\mu$ une probabilité sur $H$ dont le support est compact et engendre un sous-semigroupe Zariski dense de $H$. On montre que toute probabilité $\mu$-stationnaire $\mu$-ergodique sur $X$ est homogène. *Pour citer cet article : A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

**Abstract**

**Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces II.** Let $G$ be a real Lie group, $\Lambda$ be a lattice of $G$, $H$ be a connected semisimple subgroup of $G$ with no compact factor and $\Gamma$ be a Zariski dense sub-semigroup of $H$. We prove that every $\Gamma$-orbit closure in the quotient space $X = G/\Lambda$ is homogeneous. Let $\mu$ be a probability measure on $G$ whose support is compact and spans $\Gamma$. We prove that every $\mu$-stationary $\mu$-ergodic probability measure on $X$ is $\Gamma$-invariant and homogeneous. *To cite this article: A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*


## Abridged English version

In this text we strengthen the "exponential drift" method that we introduced in [3] for studying stationary probability measures on homogeneous spaces. The strengthening of this method is based on new results for random walks on semisimple Lie groups in [5]. We use this strenghening to improve the main results of [3].


*Email addresses:* `yves.benoist@math.u-psud.fr` (Yves Benoist), `quint@math.univ-paris13.fr` (Jean-François Quint).

Let $G$ be a real Lie group, $\Lambda$ be a lattice in $G$ and $X = G/\Lambda$ and $\Gamma$ be a sub-semigroup of $G$. We want to understand the closure of the $\Gamma$-orbits in $X$.

Let $\mu$ be a Borel probability measure on $G$. The description of the closure of the $\Gamma$-orbits will follow from the one of the $\mu$-stationary probability measures $\nu$ on $X$. We recall that a probability measure $\nu$ on $X$ is said to be *$\mu$-stationary* if one has $\mu * \nu = \nu$. It is then said to be $\mu$-ergodic, if it is extremal among $\mu$-stationary probability measures.

A subset $F$ of $X$ is said to be $\Gamma$-invariant if $gF \subset F$ for all $g$ in $\Gamma$. A closed subset $F$ of $X$ is said to be a *finite volume orbit* if it is an orbit of its stabilizer $S_F := \{g \in G \mid gF = F\}$ and if $F$ carries a $S_F$-invariant probability measure. Note that the connected component of $S_F$ has only finitely many orbits in such a set $F$.

A probability measure $\nu$ on $X$ is said to be *homogeneous* if it is supported by a closed orbit of its stabilizer $S_\nu := \{g \in G \mid g_*\nu = \nu\}$. Such a probability measure is a finite average of probability measures which are *homogeneous* under the connected component of $S_\nu$.

If $H$ is a semisimple Lie group, a subset of $H$ is said to be Zariski dense if it is Zariski dense in the adjoint group of $H$.

**Theorem 0.1** *Let $G$ be a real Lie group, $\Lambda$ be a lattice of $G$, $X = G/\Lambda$, $H$ be a connected semisimple subgroup of $G$ with no compact factor, $\Gamma$ be a Zariski dense sub-semigroup of $H$ and $\mu$ be a probability measure on $H$ whose support is compact and generates a Zariski dense subgroup of $H$. Then:*

*Every $\Gamma$-orbit closure $\overline{\Gamma x} \subset X$ is a finite volume orbit.*

*Every $\mu$-ergodic $\mu$-stationary probability measure $\nu$ on $X$ is $\Gamma$-invariant and homogeneous.*

**Corollary 0.2** *Let $G$ be a connected semisimple real Lie group with no compact factor, $\Lambda$ be an irreducible lattice of $G$, $X = G/\Lambda$, $\Gamma$ be a Zariski dense sub-semigroup of $G$, and $\mu$ be a probability measure on $G$ whose support is compact and generates a Zariski dense subgroup of $G$. Then:*

*Every infinite $\Gamma$-invariant subset $F$ of $X$ is dense in $X$.*

*Every atom-free $\mu$-stationary probability measure $\nu$ on $X$ is $G$-invariant.*

Under the stronger assumption that $H = G$ is simple, Corollary 0.2 is the first main result of [3]. As in [3], our approach is based on a study of the random walk on $X$ induced by products of independent identically distributed random elements of $G$ with law $\mu$. We still use an "exponential drift" argument based on the martingale convergence theorem. However, our strategy is different from the one followed in [3]: we do not use any suspension of some Bernoulli shift. We replace the tail $\sigma$-algebra of this suspension by the tail $\sigma$-algebra of a fibered dynamical system whose fiber has infinite volume. As a preliminary step, we prove in [4] a recurrence property for this random walk on $X$ which was conjectured by Eskin and Margulis in [11].

As a straightforward corollary one gets :

**Corollary 0.3** *Let $\Gamma$ be a sub-semigroup of $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ which is Zariski dense in a semisimple connected subgroup $H$ of $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ with no compact factor. Let $\mu$ be a probability measure on $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ whose support is finite and generates $\Gamma$. Then :*

*Every $\Gamma$-orbit closure on the torus $\mathbb{T}^d$ is a finite union of affine subtori.*

*Every $\mu$-ergodic $\mu$-stationary probability measure on $\mathbb{T}^d$ is a finite average of Lebesgue measures on affine subtori.*

This corollary extends Bourgain, Furman, Lindenstrauss and Mozes's results in [7] which supposes the existence of proximal elements in $\Gamma$ and the irreducibility of $\Gamma$ on $\mathbb{R}^d$. We note that the description of the $\Gamma$-orbit closures is due to Muchnik in [24] and Guivarc'h, Starkov in [17] when the action of $\Gamma$ on $\mathbb{R}^d$ is $\mathbb{Q}$-irreducible. We obtain a similar straightforward corollary for actions on compact nilmanifolds, thus giving partial answers to [21, Problems 3 and 4]

## 1. Introduction

Nous annonçons dans cette note de nouveaux développements dans la méthode de « dérive exponentielle » que nous avons introduite dans [3]. Ces développements sont basés sur des résultats nouveaux pour les marches aléatoires sur les groupes semi-simples dans [5]. Nous utilisons ces développements pour montrer le théorème suivant.

Soient $G$ un groupe de Lie réel, $\Lambda$ un réseau de $G$, $X = G/\Lambda$ et $\Gamma$ un sous-semigroupe de $G$. On veut décrire l'adhérence des $\Gamma$-orbites dans $X$. Soit $\mu$ une probabilité borélienne sur $G$. La description des adhérences de $\Gamma$-orbites sera conséquence de la classification des probabilités $\mu$-stationnaires $\nu$ sur $X$. Rappelons qu'une probabilité borélienne $\nu$ sur $X$ est dite $\mu$-stationnaire si on a $\mu * \nu = \nu$. Elle est alors dite $\mu$-ergodique si elle est extrémale parmi les probabilités $\mu$-stationnaires.

Un fermé $F$ de $X = G/\Lambda$ est appelé *orbite de volume fini* si c'est une orbite de son stabilisateur $S_F := \{g \in G \mid gF = F\}$ et si $F$ supporte une probabilité $S_F$-invariante.

Une probabilité $\nu$ sur $X$ est dite *homogène* si elle est supportée par une orbite fermée $F$ de son stabilisateur $G_\nu := \{g \in G \mid g_*\nu = \nu\}$.

Si $H$ est un groupe de Lie semi-simple, un sous-ensemble de $H$ est dit Zariski dense si son image dans le groupe adjoint de $H$ est Zariski dense.

**Théorème 1.1** *Soient $G$ un groupe de Lie réel, $\Lambda$ un réseau de $G$, $X = G/\Lambda$, $H \subset G$ un sous-groupe semi-simple connexe sans facteur compact et $\Gamma$ un sous-semigroupe Zariski dense de $H$. Soit $\mu$ une probabilité dont le support est compact et engendre $\Gamma$.*

*Toute probabilité $\mu$-stationnaire $\mu$-ergodique $\nu$ sur $X$ est homogène.*

*Pour tout $x$ dans $X$, l'ensemble $\overline{\Gamma x}$ est une orbite de volume fini.*

**Corollaire 1.2** *On suppose en outre que $H = G$ et que $\Lambda$ est un réseau irréductible de $G$. Alors :*

*Tout fermé infini $\Gamma$-invariant de $X$ est dense dans $X$.*

*Toute probabilité $\mu$-stationnaire sans atome sur $X$ est $G$-invariante.*

Ce théorème avec $G = \mathrm{SL}(d,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^d$ et $\Lambda = \mathrm{SL}(d,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^d$ généralise [17], [24], [7] et [3] :

**Corollaire 1.3** *Soit $\Gamma$ un sous-semigroupe de $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ qui est Zariski dense dans un sous-groupe connexe semi-simple sans facteur compact $H$ de $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$. Soit $\mu$ une probabilité sur $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ dont le support est fini et engendre $\Gamma$. Alors :*

*Toute adhérence de $\Gamma$-orbite sur le tore $\mathbb{T}^d$ est une réunion finie de sous-tores affines.*

*Toute probabilité $\mu$-stationnaire et $\mu$-ergodique sur le tore $\mathbb{T}^d$ est une moyenne finie de probabilités de Lebesgue sur des sous-tores affines.*

Le théorème 1.1 s'étend à des groupes $G$ produits finis de groupes linéaires réels et $p$-adiques. L'hypothèse de compacité du support de $\mu$ peut très probablement être assouplie en une hypothèse de moment. Le corollaire 1.3 s'étend à toutes les nilvariétés compactes, généralisant [18].

Expliquons uniquement les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1.

## 2. Récurrence

Nous vérifions tout d'abord que la marche aléatoire induite par $\mu$ sur $X$ – c'est-à-dire la chaîne de Markov de probabilités de transition $\mu * \delta_x$, $x \in X$ – est récurrente. Ce sujet a déjà été étudié par Eskin et Margulis dans [11]. Ils ont montré que, si aucun conjugué de la partie non compacte $H^{nc}$ de $H$ n'est inclus dans un sous-groupe parabolique $\Lambda$-rationnel propre de $G$, cette marche aléatoire est récurrente. Rappelons que, si $G$ est semi-simple, un sous-groupe parabolique $P \subset G$ est dit $\Lambda$-rationnel si le réseau $\Lambda$ rencontre le radical unipotent de $P$ en un réseau. Dans le cas général, $P$ est $\Lambda$-rationnel si le sous-groupe

$P/R$ du groupe semi-simple $G/R$ est $\Lambda R/R$ rationnel, où $R$ désigne le radical moyennable de $G$. Notons $x_0 := \Lambda$ le point base de $X$.

Dans [11, § 2.5], Eskin et Margulis ont conjecturé que la marche aléatoire induite par $\mu$ était toujours récurrente. Le théorème suivante répond positivement à leur conjecture.

**Théorème 2.1** *Soient $G$ un groupe de Lie réel linéaire connexe, $\Lambda$ un réseau de $G$, $X = G/\Lambda$, $H$ un sous-groupe semi-simple de $G$, et $\mu$ une probabilité sur $G$ dont le support engendre un sous-groupe Zariski dense de $H$ et ayant un moment exponentiel fini, i.e. il existe $\delta > 0$ tel que $\int_G \|\mathrm{Ad}g\|^\delta \mathrm{d}\,\mu(g) < \infty$.*
*a) Pour tous $\varepsilon > 0$ et $x$ dans $X$, il existe un compact $M = M_{\varepsilon,x} \subset X$ tel que, pour tout $n \geq 0$, on a $\mu^{*n} * \delta_x(M) \geq 1 - \varepsilon$.*
*b) Soit $X' := \{x = gx_0 \in X \mid g^{-1}H^{nc}g$ n'est pas inclus dans un sous-groupe parabolique $\Lambda$-rationnel propre de $G\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $M = M_\varepsilon \subset X$ tel que, pour tout $x$ dans $X'$, il existe $n_x \geq 0$ tel que, pour $n \geq n_x$, on a $\mu^{*n} * \delta_x(M) \geq 1 - \varepsilon$.*

Pour montrer ce théorème 2.1, on construit, un peu comme dans [11], des fonctions mesurables propres $f$ sur $X$ qui vérifient le « critère de récurrence géométrique de Foster » (voir [23, Chapitre 15]). L'idée nouvelle est de construire ces fonctions à l'aide de la théorie des représentations.

## 3. Loi des angles

Soit $P$ un sous-groupe parabolique minimal de $H$. Ecrivons $P = ZU$ où $U$ est le radical unipotent de $P$ et $Z$ est un sous-groupe réductif maximal de $P$. Choisissons une involution de Cartan de $H$ qui laisse stable $Z$, notons $K$ le sous-groupe compact maximal de $H$ formé des points fixes de cette involution de Cartan et $M = Z \cap K$. Soit $A$ le sous-espace de Cartan de $Z$ de sorte que $Z = MA$. Soient $\mathcal{P} := G/P$ et $s : \mathcal{P} \to K$ une section borélienne de la projection naturelle $p : K \to \mathcal{P}$. Soit $\sigma : H \times \mathcal{P} \to Z$ le cocycle borélien donné, pour $h \in H$ et $\eta \in \mathcal{P}$, par $h\,s(\eta) \in s(h\eta)\,\sigma(h,\eta)U$. Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie de $H$ et $G$, et $V_0$ le sous-groupe unipotent de $G$ dont l'algèbre de Lie est formée des éléments $U$-invariants du sous-espace $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$.

Soit $\nu_0$ l'unique probabilité borélienne $\mu$-stationnaire sur $\mathcal{P}$. On note $(B, \mathcal{B}, \beta, T)$ le système de Bernoulli unilatère d'alphabet $(H, \mu)$. C'est-à-dire que $B = H^{\mathbb{N}}$, que $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne complétée pour la probabilité produit $\beta := \mu^{\otimes\mathbb{N}}$ et que $T$ est le décalage à droite, donné par $(Tb)_i = b_{i+1}$ pour tous $b = (b_0, b_1, \ldots)$ dans $B$ et $i$ dans $\mathbb{N}$. Pour $\beta$-presque tout $b$, on note $\xi_b$ l'élément de $\mathcal{P}$ tel que $\lim\limits_{p\to\infty} (b_0 \cdots b_p)_* \nu_0 = \delta_{\xi_b}$.

Soit $\theta : B \to Z$ la fonction $\mathcal{B}$-mesurable donnée, pour $\beta$-presque tout $b$ dans $B$, par $\theta(b) := \sigma(b_0, \xi_{Tb})$. Soit $(B^\theta, \mathcal{B}^\theta, \beta^\theta, T^\theta)$ le système dynamique fibré associé à ce cocycle : l'espace $B^\theta$ est le produit $B \times Z$, la tribu $\mathcal{B}^\theta$ est la tribu produit, la mesure $\beta^\theta$ est le produit de $\beta$ avec une mesure de Haar $\lambda_Z$ de $Z$ et la transformation $T^\theta$ est donnée, pour $(b,z) \in B^\theta$, par $T^\theta(b,z) = (Tb, \theta(b)^{-1}z)$. L'étude de ce système dynamique nécessite un soin particulier car la mesure invariante $\beta^\theta$ est de volume infini. C'est pourquoi nous introduisons un ouvert $U \subset Z$ de volume fini, produit de $M$ par une boule ouverte de $A$. Soit $\beta^U$ la restriction normalisée de $\beta$ à $B^U := B \times U$. Soient $\mathcal{Q}_n^\theta := (T^\theta)^{-n}(\mathcal{B}^\theta)$, $\mathcal{Q}_n^U$ la tribu restriction de $\mathcal{Q}_n^\theta$ à $B^U$ et, pour $\beta^U$-presque tout $c$ dans $B^U$, soit $\beta_{n,c}^U$ la probabilité conditionnelle de $\beta^U$ en $c$ le long de $\mathcal{Q}_n^U$.

L'un des outils clefs pour contrôler la dérive est la loi des angles. Pour tout élément $h \in H$, la décomposition de Cartan permet d'écrire $h = k_{h,1}a_h k_{h,2}$ avec $k_{h,1}$, $k_{h,2}$ dans $K$ et $a_h$ dans la chambre de Weyl positive $A^+ \subset A$ associée à $P$. On pose $\xi_h^m := p(k_{h,2}^{-1}) \in \mathcal{P}$. On note $\check{\mu} \in \mathcal{P}(G)$ l'image de $\mu$ par l'inversion $g \mapsto g^{-1}$ et on note $\nu_0^*$ l'unique probabilité borélienne $\check{\mu}$-stationnaire sur $\mathcal{P}$

**Proposition 3.1 (Loi des angles)** *Pour $\beta^U$-presque tout $c = (b,z)$ dans $B^U$, pour toute fonction continue $\varphi$ sur $\mathcal{P}$ et tout cylindre $E \subset B$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E\times U} \varphi(\xi^m_{b'_0\cdots b'_{n-1}}) \mathrm{d}\,\beta^U_{n,c}(b',z') = \beta(E) \int\limits_{\mathcal{P}} \varphi(\zeta) \mathrm{d}\,\nu^*_0(\zeta).$$

Pour montrer cette loi des angles, on combinera astucieusement un théorème local limite pour les écarts modérés, une loi du logarithme itéré et une estimation de grandes déviations que nous avons démontrés dans ce but dans [5] en nous appuyant sur des idées de [13], [20], [15], [6], [1], [2], [8], [25], [16], [14]. Ces arguments permettent aussi de décrire la tribu queue $\mathcal{Q}^\theta_\infty$ intersection des $\mathcal{Q}^\theta_n$, $n \in \mathbb{N}$.

## 4. Mesures conditionnelles le long du flot horocyclique

Introduisons tout d'abord le système dynamique fibré $(B^X, \mathcal{B}^X, \beta^X, T^X)$ de fibre $X$ et de base $B$. Pour $\beta$-presque tout $b$ dans $B$, on note $\nu_b$ la probabilité borélienne sur $X$ obtenue comme limite $\nu_b := \lim\limits_{p\to\infty} (b_0 \dots b_p)_* \nu$. La transformation $T^X$ de $B^X := B \times X$ est définie par $T^X(b,x) = (Tb, b_0^{-1}x)$. La probabilité borélienne $\beta^X$ sur $B^X$ est définie par $\beta^X = \int_B \delta_b \otimes \nu_b \,\mathrm{d}\beta(b)$. Cette probabilité $\beta^X$ est invariante par la transformation $T^X$. La tribu $\mathcal{B}^X$ est la tribu complétée de la tribu borélienne.

Nous appliquerons la dérive exponentielle au système dynamique fibré $(B^{\theta,X}, \mathcal{B}^{\theta,X}, \beta^{\theta,X}, T^{\theta,X})$ de fibre $Z$ au dessus de $B^X$. La transformation $T^{\theta,X}$ de $B^{\theta,X} := B^\theta \times X$ est définie par $T^{\theta,X}(b,z,x) = (Tb, \theta(b)^{-1}z, b_0^{-1}x)$. La mesure est définie par $\beta^{\theta,X} = \int_{B^\theta} \delta_{(b,z)} \otimes \nu_b \,\mathrm{d}\beta^\theta(b,z)$. Nous introduisons les sous-tribus $\mathcal{Q}^{\theta,X}_n = (T^{\theta,X})^{-n}\mathcal{B}^{\theta,X}$, $n \in \mathbb{N}$, dont l'intersection est la tribu queue $\mathcal{Q}^{\theta,X}_\infty$. Comme ce système dynamique est de volume infini, nous travaillerons avec les tribus $\mathcal{Q}^{U,X}_n$ restriction de $\mathcal{Q}^{\theta,X}_n$ au sous espace $B^{U,X} := B^U \times X$. Ces tribus jouent un rôle central dans notre approche.

Ce système dynamique est muni d'une action $\Phi$ de $V_0$ appelée *flot horocyclique* donnée par, pour tout $v$ dans $V_0$, $\beta^\theta$-presque tout $c = (b,z)$ dans $B^\theta$ et tout $x$ dans $X$, $\Phi_v(c,x) = (c, v^{s(\xi_b)z}\, x)$ où $v^{s(\xi_b)z}$ est l'élément de $G$ image de $v$ par conjugaison par l'élément $s(\xi_b)z \in G$. Notons $\mathcal{M}_1(V_0)$ l'espace des mesures de Radon non nulles sur $V_0$ modulo normalisation. Pour $\beta^{\theta,X}$-presque tout $(c,x)$ dans $B^{\theta,X}$, on note $\sigma(c,x) \in \mathcal{M}_1(V_0)$ la mesure conditionnelle en $(c,x)$ de $\beta^{\theta,X}$ pour l'action du flot horocyclique (voir [19], [10] et [3, Section 4.2]). Cette fonction $\sigma : B^{\theta,X} \to \mathcal{M}_1(V_0)$ est $T^{\theta,X}$-invariante.

On démontrera par récurrence que $\nu$ est homogène à l'aide de la proposition suivante et de la théorie des flots unipotents (voir [26], [27], [28], [22], [12]). Remarquons que $V_0$ agit par translations à droite sur $\mathcal{M}_1(V_0)$.

**Proposition 4.1** *Soit $L$ le centralisateur de $H$ dans $G$. On suppose que, pour tout $x \in X$, on a $\nu(Lx) = 0$. Alors, pour $\beta^{\theta,X}$-presque tout $(c,x)$ dans $B^{\theta,X}$, le stabilisateur dans $V_0$ de $\sigma(c,x)$ n'est pas discret.*

Pour montrer la proposition 4.1, on applique la proposition suivante à la fonction $f = \sigma$.

**Proposition 4.2** *On suppose que, pour tout $x$ dans $X$, on a $\nu(Lx) = 0$. Soient $(Y, \mathcal{Y})$ un espace borélien standard, $f : B^{\theta,X} \to Y$ une application $\mathcal{Q}^{\theta,X}_\infty$-mesurable et $E \subset B^{\theta,X}$, un ensemble $\mathcal{B}^{\theta,X}$-mesurable avec $\beta^{\theta,X}(E^c) = 0$. Alors, pour $\beta^{\theta,X}$-presque tout $(c,x)$ dans $B^{\theta,X}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $v$ non nul de $V_0$ de norme au plus $\varepsilon$ et un élément $(c',x')$ de $E \cap (B \times U \times X)$ tels que $\Phi_v(c',x')$ est aussi dans $E$ et tels que*

$$f(\Phi_v(c',x')) = f(c',x') = f(c,x).$$

On vérifie tout d'abord que, pour $\beta^X$-presque tout $(b,x) \in B^X$, on a $\nu_b(Lx) = 0$. La démonstration utilise alors une formule très simple pour l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\varphi \mid \mathcal{Q}^{U,X}_n)$ d'une fonction mesurable $\varphi$ sur $B^{U,X}$, elle utilise aussi l'argument de « dérive exponentielle » de [3] reposant sur le théorème de convergence des martingales, elle utilise enfin la loi des angles ci-dessus pour contrôler la dérive en norme et en direction. Ces arguments permettent aussi de décrire la tribu queue $\mathcal{Q}^{\theta,X}_\infty$.

Les détails seront publiés ailleurs.

## Références


[1] Y. Benoist Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), 1-47.

[2] Y. Benoist Propriétés asymptotiques des groupes linéaires II, *Adv. Stud. Pure Math.* **26** (2000), 33-48.

[3] Y. Benoist, J.-F. Quint Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes, *CRAS* (2008) et preprint (2009).

[4] Y. Benoist, J.-F. Quint, Random walks on finite volume homogeneous spaces, preprint 21p.

[5] Y. Benoist, J.-F. Quint, Random walks on semisimple groups, en préparation.

[6] P. Bougerol, J. Lacroix, Products of random matrices with applications to Schrödinger operators, *Birkhäuser* (1985).

[7] J. Bourgain, A. Furman, E. Lindenstrauss, S. Mozes, Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus, *J. Amer. Math. Soc.*, à paraître.

[8] E. Breuillard, Distributions diophantiennes et théorème limite local sur $\mathbb{R}^d$, *Proba. Th. Rel. Fields*, **132** (2005) 39-73.

[9] A. Bufetov, Convergence of spherical averages for actions of free groups, *Ann. of Math.* **155** (2002), 929-944.

[10] M. Einsiedler, A. Katok, E. Lindenstrauss, Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture, *Ann. of Math.* **164** (2006), 513-560.

[11] A. Eskin, G. Margulis, Recurrence properties of random walks on finite volume homogeneous manifolds, *in Random walks and geometry* , W. de Gruiter (2004), 431-444.

[12] A. Eskin, S. Mozes, N. Shah, Unipotent flows and counting lattice points on homogeneous varieties, *Ann. of Math.* **143** (1996), 253-299.

[13] H. Furstenberg, Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc* **108** (1963), 377-428.

[14] Y. Guivarc'h, On the spectrum of a large subgroup of a semisimple group, *J. Mod. Dyn.* **2** (2008), 15-42.

[15] Y. Guivarc'h, A. Raugi, Frontière de Furstenberg, propriété de contraction et théorèmes de convergence, *Zeit. Wahrsch. verw. Gebiete* **69** (1985), 187-242.

[16] Y. Guivarc'h, A. Raugi, Actions of large semigroups and random walks on isometric extensions of boundaries, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **40** (2007), 209-249.

[17] Y. Guivarc'h, A. Starkov, Orbits of linear group actions, random walks on homogeneous spaces and toral automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (2004), 767-802.

[18] J.-R. Heu, Dynamical properties of group of automorphisms on Heisenberg nilmanifolds, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 89-101.

[19] A. Katok, R. Spatzier, Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions, *Ergodic Th. Dynam. Systems* **16** (1996), 751-778.

[20] E. Le Page, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, *LN in Math.* **928** (1982), 258-303.

[21] G. Margulis, Problems and conjectures in rigidity theory, *in Mathematics : frontiers and perspectives,* Amer. Math. Soc. (2000), 161-174.

[22] G. Margulis, G. Tomanov, Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces, *Invent. Math.* **116** (1994), 347-392.

[23] S. Meyn, R. Tweedie, Markov chain and stochastic stability, Springer (1993).

[24] R. Muchnik, Semigroup actions on $\mathbb{T}^n$, *Geom. Dedicata* **110** (2005), 1-47.

[25] J.-F. Quint, Groupes de Schottky et comptage, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), 373-429.

[26] M. Ratner, On Raghunathan's measure conjecture, *Ann. of Math.* **134** (1991), 545-607.

[27] M. Ratner, Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, *Duke Math. J.* **63** (1991), 235-280.

[28] M. Ratner, Ragunathan's conjectures for Cartesian products of real and $\wp$-adic Lie groups, *Duke Math. J.* **77** (1995), 275-382.