Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

MAP 311 - PC 2 - 18 mai 2009

Stéphanie Allassonnière, Christophe Giraud, Caroline Hillairet

Borel Cantelli

EXERCICE 1 -
A un jeu de pile ou face on perd ou on gagne un euro selon la face apparue. On suppose que les tirages successifs forment une suite indépendante et qu'à chaque tirage la probabilité de voir pile est $0 < p < 1$. Soit A_n l'événement "le montant cumulé des gains est nul juste après le tirage n". Trouver une condition sur p pour que $\mathsf{P}(\limsup_n A_n) = 0$, et interpréter ce résultat. Pour $p = \frac{1}{2}$ on pourra utiliser la formule de Stirling.

Variables aléatoires discrètes

EXERCICE 2 -
Soient E et F des ensembles finis. Montrez qu'il est équivalent de supposer que X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois uniformes sur E et F, ou de supposer que le couple (X, Y) est de loi uniforme sur $E \times F$.

EXERCICE 3 -
Soient X et Y deux variables définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ne pouvant prendre que deux valeurs distinctes. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $E(XY) = E(X)E(Y)$. Montrer que ce résultat est faux si X, Y prennent plus de deux valeurs.

EXERCICE 4 -
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et uniformes sur l'espace discret $\{0, 1\}$. Soit $Z = X + Y$ modulo 2. Quelle est la loi de Z ? X et Z sont elles indépendantes ? Y et Z sont elles indépendantes ? X, Y et Z sont elles indépendantes ?

EXERCICE 5 -
Soit X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$.
1) Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2) Calculer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Reconnaître cette loi.
3) Calculer $\mathsf{E}(X_1 | X_1 + X_2)$.

EXERCICE 6 -
Un vendeur de glaces installé dans la rue voit passer un nombre N de passants dans la journée. On suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On appelle G_i le nombre de glaces achetées par le i-ème passant. On fait l'hypothèse que les $N, G_1, G_2, \ldots$ sont indépendantes et que chaque passant achète une glace avec probabilité p et aucune glace avec probabilité $1 - p$. Quelle est la loi du nombre X de glaces vendues pendant une journée ?

EXERCICE 7 -
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires I.I.D. (indépendantes et identiquement distribuées) suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et $S = X_1 + \ldots + X_n$ leur somme. Pour $s \in \{0, \ldots, n\}$, donner la loi conditionnelle de X_1 sachant $S = s$ et calculer $\mathsf{E}(X_1|S)$.

EXERCICE 8 -
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \geq 1$, on définit par récurrence, $T_n = \inf\{k > T_{n-1} \,;\, X_k = 1\}$ si cet infimum est fini, $T_n = \infty$ sinon, et $T_0 = 0$.
1) Démontrer que les variables aléatoires T_1, $T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}, \ldots$ sont indépendantes et de même loi.
2) Calculer la loi de T_1 et sa fonction génératrice. En déduire la loi de T_n.

EXERCICE 9 -
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $\nu = \inf\{n \geq 1, S_n = m\}$. Donner la loi de ν, puis sa fonction génératrice et sa variance.

EXERCICE 10 -
1) Soit X une v.a. de loi concentrée sur $\{1, \ldots, k\}$;

$$P(X = j) = p_j, 1 \leq j \leq k.$$

Soit $Z^j = \mathbf{1}_{(X=j)}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}_+^k$. Calculer :

$$\mathsf{E}\left[s_1^{Z^1} s_2^{Z^2} \cdots s_k^{Z^k}\right].$$

2) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi précédente (n variables indépendantes de même loi), et

$$N^j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_i=j)}.$$

Calculer :

$$\mathsf{E}\left[s_1^{N^1} s_2^{N^2} \cdots s_k^{N^k}\right].$$

En déduire, pour $a_1, \ldots, a_k$ entiers de somme n :

$$P(N^1 = a_1, \ldots, N^k = a_k) = \frac{n!}{a_1! \ldots a_k!} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}.$$

C'est la loi multinomiale de paramètre $(p_1, \ldots, p_k)$ et d'ordre n.

EXERCICE 11 -
Trois joueurs A, B, C jouent une suite de parties suivant la règle suivante : chaque partie oppose deux joueurs et le perdant de la partie s'efface à la partie suivante au profit des deux autres joueurs. Les parties sont indépendantes entre elles et chaque participant y a la même probabilité $1/2$ de gagner ; les joueurs A et B commencent. Le jeu s'arrête la première fois qu'un joueur a gagné deux fois de suite ; ce joueur est le gagnant du jeu.
1) Quelle est la probabilité de chacun de gagner ?
2) Soit T la durée du jeu. Calculer la loi de T, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance. Montrer que $\mathsf{P}(T < \infty) = 1$.