# Processus stochastiques: topologie, processus de Poisson et Processus de Lévy

Christophe Giraud

Université Paris-Sud et Ecole Polytechnique

Orsay, septembre-novembre 2012

# Convergence en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, E)$

L'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, E)$ muni de la norme uniforme $d_\infty$ n'est pas séparable donc non Polonais.

## Topologie compact-ouverte

Muni de la norme

$$D(f,g) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \sup_{0\leq t\leq n} d(f(t), g(t)) \wedge 1$$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, E)$ est un espace Polonais.

## Compacité

$\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, E)$ est relativement compacte

si et seulement si

$\mathcal{K}_{[0,N]} = \{f|_N : f \in \mathcal{K}\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,N], E)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

## Tension

Pour vérifier que les lois d'une suite de processus continus $(X^{(n)})_n$ sont tendues il suffit de vérifier que c'est la cas pour les lois de $(X^{(n)}|_{[0,N]})_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

On se ramène donc au cas $\mathcal{C}([0,1], E)$.

# Convergence en loi dans $\mathcal{D} = \mathcal{D}([0,1], \mathbb{R})$

**Référence :** P. Billingsley. Convergence of Probability Measures.

## Convergence en loi des processus dans $\mathcal{D}$

Soit $(X^{(n)})_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{D}$ et $X$ à valeurs dans $\mathcal{D}$. On a équivalence entre

1. $X^{(n)} \overset{\text{loi}}{\longrightarrow} X$
2. - $\left(\mathbb{P}^{X^{(n)}}\right)_n$ est tendue
   - $(X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_k}) \overset{\text{loi}}{\longrightarrow} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ pour tout $t_1, \ldots, t_k \notin \{t \in [0,1] : \mathbb{P}(\Delta X_t \neq 0) > 0\}$

Pour utiliser Prokhorov, il faut caractériser les compacts de $\mathcal{D}$.

## Module de "continuité" $\omega'$

Pour $f \in \mathcal{D}$ et $\delta > 0$ on note

$$\omega'(f,\delta) = \inf_{(t_i)\in T(\delta)} \max_{i=1,\dots,r-1} \sup_{t_i \le s,u < t_{i+1}} |f(s) - f(u)|$$

où $T(\delta)$ est l'ensemble des suites finies $(t_i)$ de $[0,1]$ vérifiant $t_{i+1} - t_i > \delta$.

## Remarque

$$f \in \mathcal{C} \iff \omega(f,\delta) \overset{\delta\to 0}{\to} 0$$
$$f \in \mathcal{D} \iff \omega'(f,\delta) \overset{\delta\to 0}{\to} 0$$

## Compacité dans $\mathcal{D}$

Un ensemble $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ est relativement compact

si et seulement si

1. $\sup_{f\in\mathcal{K}} \|f\|_\infty < +\infty$
2. $\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{f\in\mathcal{K}} \omega'(f,\delta) = 0$

## Tension dans $\mathcal{P}(\mathcal{D})$

La suite $\left(Loi(X^{(n)})\right)_n$ est tendue si et seulement si

1. la suite $\left(Loi(\|X^{(n)}\|_\infty)\right)_n$ est tendue
2. $\forall\, \varepsilon, \delta > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\omega'(X^{(n)},\eta) > \delta\right) \leq \varepsilon\,.$$

# Critère d'Aldous

Supposons que $(\sigma(X_s^{(n)} : s \leq t))_{t\in[0,1]}$ est une filtration continue à droite pour tout $n$ et notons $\mathcal{T}^{(n)}$ l'ensemble des temps d'arrêt dans cette filtration.

## Critère d'Aldous

Pour montrer que la suite $\left(Loi(X^{(n)})\right)_n$ est tendue, il suffit de vérifier que

- la suite $\left(Loi(\|X^{(n)}\|_\infty)\right)_n$ est tendue
- pour tout $\varepsilon, \delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\limsup_n \sup_{T,S\in\mathcal{T}^{(n)}:T\leq S\leq T+\eta} \mathbb{P}(|X_T^{(n)} - X_S^{(n)}| > \delta) < \varepsilon$$

# Représentation de Skorokhod

## Représentation de Skorokhod

Soit $Y_n, Y$ des variables aléatoires à valeurs dans un Polonais $E$ telles que $Y_n \stackrel{\text{loi}}{\to} Y$.

Alors, il existe $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et $Z_n, Z$ définies sur cet espace, telles que

1. Loi($Y_n$)=Loi($Z_n$) et Loi($Y$)=Loi($Z$)
2. $Z_n \stackrel{\text{p.s.}}{\to} Z$

Référence: le poly!