Intégration et Probabilités

Cours n° 5

12/03/2024

USTC

S. Nonnenmacher

- fonctions étagées $(E, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$
- Intégrale d'une fonction étagée positive (linéarité positive, positivité)

$\longrightarrow$ généralisation aux fonctions mesurables positives.

Notation: $\mathcal{E}_+ = \{$ fonctions étagées positives $\}$

invariant par combinaisons linéaires positives

$$f, g \in \mathcal{E}_+ \ , \ a, b \geq 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{E}_+ .$$

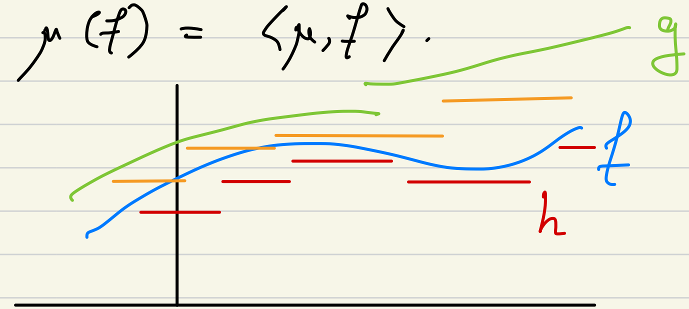
Def: une fonction $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable positive si elle est mesurable et si elle prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$

$$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ .$$

Déf° Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré. $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ fonction mesurable positive. Alors l'intégrale de f sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est définie par

$$\int f \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \sup_{\substack{h \in \mathcal{E}_+ ; \\ h \leq f}} \int h \, d\mu$$

Notations : $\underline{\int f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x)} = \mu(f) = \langle \mu, f \rangle$.



Pas de condition de convergence $h \to f$, encore moins de convergence uniforme.

<u>Propriétés de l'intégrale</u>

1. Si f est une fonction étagée ≥ 0, toute fonction $h \in \mathcal{E}_+$, telle que $h \leq f$, vérifie $\int h \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

$$\Rightarrow \sup_{\substack{h \in \mathcal{E}_+ \\ h \leq f}} \int h \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad (\text{on peut prendre } h = f).$$

2. Si $f \leq g$ sont mesurables ≥ 0, alors $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

$$\{h \in \mathcal{E}_+ ; h \leq f\} \subset \{h \in \mathcal{E}_+ ; h \leq g\}$$

$$\Rightarrow \sup \leq \sup .$$

$\rightarrow$ positivité de l'intégrale : respecte la relation d'ordre $f \leq g$.

3. Si f mesurable positive et si $\underbrace{\mu(\{x \in E ; f(x) > 0\})}_{\mu\text{-négligeable}} = 0$, alors $\int f \, d\mu = 0$.

$f^{-1}(]0,+\infty])$

f mesurable $\Rightarrow$ mesurable

En effet, $\forall h \in \mathcal{E}_+$ avec $h \leq f \Rightarrow \mu(\underbrace{\{x \in E ; h(x) > 0\}}_{A_2 \sqcup A_3 \sqcup \dots \sqcup A_J}) = 0$

$$h = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \qquad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2, \alpha_3, \dots \neq 0.$$

$$\Rightarrow \int h \, d\mu = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \, \mu(A_j) \qquad \mu(A_2) = \mu(A_3) = \dots = \mu(A_J) = 0$$

$$= 0 \times \mu(A_1) = 0.$$

Propriété : les valeurs prises par f sur un sous-ensemble $A \subset E$ μ-négligeables ne sont pas pertinentes dans le calcul de l'intégrale.

<u>Déf</u> : On rappelle que un ensemble $A \subset E$ est μ-négligeable si il existe $B \in \mathcal{A}$, tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout (<u>μ-p.p.</u>), ou <u>p.p.</u> lorsque μ est connue, si cette propriété est vraie en-dehors d'une μ-négligeable. On parle de propriété <u>presque sûre</u>.

→ pour la propriété 3, on dira que $f = 0$ μ- p.p.

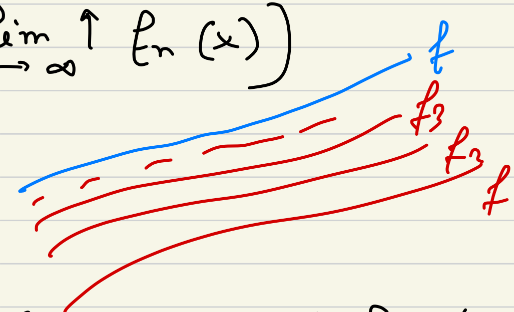
$f = 0$ p.p.

Théorème de convergence monotone (TCM)

Théorème : Soit (f_n) suite croissante de fonctions mesurables positives, et on définit la fonction $f = \sup_n f_n = \lim_{n \to \infty} \uparrow f_n$

$\left(\forall x,\ f(x) = \sup_n f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \uparrow f_n(x) \right)$

Alors $\int f \, d\mu = \lim \uparrow \int f_n \, d\mu$.



Preuve : On sait que f est mesurable (comme $\sup_n$ de fonctions mesurables),

→ $\int f \, d\mu$ est bien définie.

. (f_n) suite $\uparrow$ $\Longrightarrow$ $\left(\int f_n \, d\mu\right)$ suite $\uparrow$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

$\Rightarrow$ admet une limite $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \uparrow \int f_n \, d\mu$.

$\forall n, \quad f \geq f_n \Rightarrow \int f \, d\mu \geq \int f_n \, d\mu$

$$\Rightarrow \int f \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n \, d\mu .$$

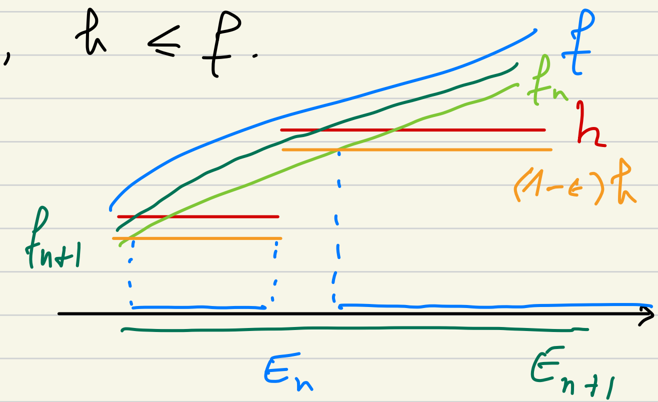
On veut montrer l'inégalité inverse.

On considère une fonction $h \in \mathcal{E}_+$, $h \leq f$.

On choisit $\varepsilon \in \,]0,1[$.

On considère l'ensemble

$$E_n = \{ x \in E ; \ (1-\epsilon) h(x) \leq f_n(x) \}$$



mesurable

La suite des ensembles (E_n) est croissante.

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x), \ \forall x$$

$\Rightarrow \forall x$, à partir d'un certain rang n, j'aurai $f_n(x) \geq (1-\epsilon)h(x)$

$\Rightarrow x \in E_n$.

preuve : - cas $f(x) = 0$ $\Rightarrow h(x) = 0$

$\Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n$ $\Rightarrow$ toujours $x \in E_n$.

- cas $f(x) > 0$, $\nearrow h(x) = 0 \Rightarrow$ on a toujours $x \in E_n$

$\searrow 0 < h(x) \leq f(x)$

$\Rightarrow (1-\epsilon)h(x) < f(x)$

$\Rightarrow$ à partir d'un certain rang, $f_n(x) > (1-\epsilon)h(x)$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \geq 0} E_n = E.$$

Par définition des E_n, on a $f_n(x) \geq (1-\epsilon)h(x)$ sur E_n

$$\int_E f \, d\mu \geq \int_{E_n} f \, d\mu = \int f \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \geq \int (1-\epsilon) h \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu$$

$$= (1-\epsilon) \int h \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu.$$

$h \in \mathcal{E}_+ \qquad h = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $\bigsqcup_{k=1}^{K} A_k = E$

$\alpha_k \geq 0.$

$$\Rightarrow h \times \mathbb{1}_{E_n} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k \cap E_n} + 0 \times \mathbb{1}_{E \setminus E_n}$$

$$\Rightarrow \int h \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \mu(A_k \cap E_n)$$

Comme E_n suite $\uparrow$ qui recouvre E $\Rightarrow \mu(A_k) = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mu(A_k \cap E_n)$

$$\int f_n \, d\mu \geq (1-\epsilon) \int h \mathbb{1}_{E_n} d\mu$$

$$\Big\downarrow \; n \to \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \uparrow \int f_n \, d\mu \geq (1-\epsilon) \int h \, d\mu$$

Vrai $\forall \epsilon \in]0,1[$.

$$\epsilon \searrow 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \uparrow \int f_n \, d\mu \geq \int h_\alpha \, d\mu$$

h était une fonction de $\mathcal{E}_+$, $h \leq f$, arbitraire

$$\int f \, d\mu = \sup_h \int h \, d\mu$$

$\Rightarrow$ on peut choisir une suite $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ de fonctions $h_\alpha \leq f$, $h_\alpha \in \mathcal{E}_+$

telle que $\lim_{\alpha \to \infty} \int h_\alpha \, d\mu = \int f \, d\mu$

$$\Rightarrow \quad \lim_n \uparrow \int f_n \, d\mu \geq \lim_{\alpha \to \infty} \int h_\alpha \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

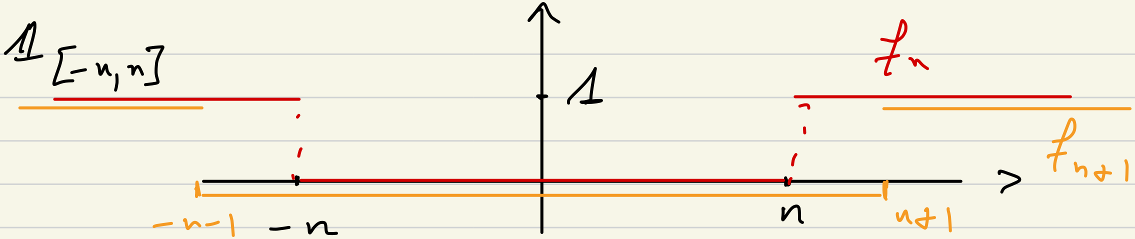
$\square$.

- Ex: si $f_n \downarrow f$ $\quad$ $f_n \downarrow$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f$, $\int f_n \, d\mu \not\to \int f \, d\mu$

$f = 0$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\quad$ f_n suite $\downarrow$.

$f_n = 1 - \mathbb{1}_{[-n,n]}$



(f_n) suite $\downarrow$

$\lim_{n\to\infty} \downarrow f_n(x) = 0 = f(x), \ \forall x$

$\mu = \lambda$ mesure de Lebesgue : $\int f_n \, d\lambda = +\infty$, $\forall n$.

$$\int f \, d\lambda = \int 0 . d\lambda = 0$$

• <u>Exemple d'aplication:</u>

$f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap I}$, qui n'avait pas d'intégrale de Riemann

On avait $f = \lim_{n\to\infty} F_n$, avec $F_n = \mathbb{1}_{\underbrace{\frac{1}{n!}\mathbb{N} \cap I}_{E_n}}$

$(F_n)_{n\geq 0}$ suite $\uparrow$, car $(E_n)_n$ suite $\uparrow$ de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \mathbb{Q} \cap I.$$

F_n est étagée p/r à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et E_n fini

$\Rightarrow$ E_n est négligeable p/r à λ_1.

$\Rightarrow \int F_n \, d\lambda_1 = 0$, $\forall n$.

TCM $\Rightarrow \int f \, d\lambda_1 = 0$.

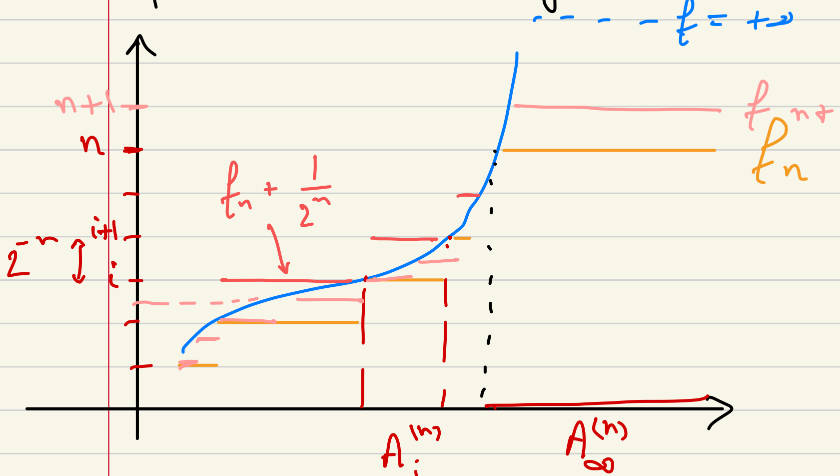
Autre preuve : $\{x \in I \,;\, f(x) > 0\} = \mathbb{Q} \cap I$, qui est λ_1-négligeable, car ensemble dénombrable de I.

$$\Rightarrow \lambda_1(\mathbb{Q} \cap I) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_1(\{r_j\})}_{=0} = 0.$$

<u>Théorème</u> [Approximation par des fonctions étagées]

Soit f fonction mesurable ≥ 0. Alors il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées ≥ 0, telles que $\lim_{n \to \infty} \uparrow f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$.

Preuve : Remarque : même si f peut prendre la valeur $+\infty$, chaque fonction étagée est bornée (ses valeurs sont finies).



Pour chaque $n \geq 0$, on considère $A_\infty^{(n)} = f^{-1}([n, +\infty])$

$$A_i^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[\right), \; i = 0, .., n2^n - 1$$

Fonction étagée associée : $f_n = \sum_{i=1}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}} + n \mathbb{1}_{A_\infty^{(n)}}$

Clairement, $f_n \leq f$.

Découpage $(n) \longrightarrow$ découpage $(n+1)$

$\Rightarrow f_{n+1} \geq f_n$: suite croissante.

Sur $A^{(n)} = \bigsqcup_{i=1}^{n2^n-1} A_i^{(n)} = f^{-1}([0,n[)$, on a

par construction, $f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{1}{2^n}$ sur $A^{(n)}$

les $(A^{(n)})$ sont croissants, $\bigcup_{n\geq 0} A^{(n)} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$

Pour tout $x \in f^{-1}(\{+\infty\})$, on a $f_n(x) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Concl : sur $\bigcup_n A^{(n)}$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

sur $\bigcap_n A_\infty^{(n)} = f^{-1}(\{\infty\})$, $f_n(x) \longrightarrow +\infty = f(x)$.

$\Rightarrow \forall x \in E$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

$\square$

Prop° [linéarité positive de l'intégrale]

1. f, g mesurables positives, $a, b \geq 0$. Alors
$$\int (af + bg)\, d\mu = a\int f\, d\mu + b\int g\, d\mu.$$

2. Si (f_n) suite de fonctions mesurables positives, alors
$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\, d\mu$$

⚠ Vrai pour des fonctions positives seulement.

Preuve : difficile de montrer le 1. directement à partir de la définition de $\int \cdot\, d\mu$.

$\{h \in \mathcal{E} ;\ h \leq af + bg\}$ - - - $\{h \in \mathcal{E}_+ ;\ h \leq af\}$

comment les relier ? - - $\{h \in \mathcal{E}_+ ;\ h \leq bg\}$

. Th. d'approximation par fonctions étagées

$\Rightarrow \exists (f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{E}_+$, croissante, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$

$\exists (g_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{E}_+$ – – $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$.

$\Rightarrow (af_n + bg_n) \subset \mathcal{E}_+$, – – $af_n + bg_n \longrightarrow af + g$.

TCM $\Rightarrow$ $\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \, d\mu$

$\int g_n \, d\mu \longrightarrow \int g \, d\mu$

$$\int (af_n + bg_n) \, d\mu \longrightarrow \int (af + bg) \, d\mu$$

linéarité ≥ 0 des $\int$ de fonctions dans $\mathcal{E}_+$ $\rightsquigarrow$ $=$

$a\int f_n d\mu + b\int g_n d\mu$

$\downarrow$

$a\int f \, d\mu + b\int g \, d\mu$ $=$ $\int (af + bg) \, d\mu$

2. $F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$

Grâce au 1 : $\int F_N \, d\mu = \sum_{n=0}^{N} \int f_n \, d\mu$

(F_N) suite $\uparrow$ de fonctions, de limite $F_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mesurable ≥ 0

$$\Rightarrow \int F_\infty \, d\mu \overset{TCM}{=} \lim_{N\to\infty} \uparrow \int F_N \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \uparrow \sum_{n=0}^{N} \int f_n \, d\mu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu .$$

$\square$

<u>Exemple d'application :</u>

$(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ double suite de nombres positifs,

Alors on a égalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \right).$$

Déf : [Mesure modulée par une fonction densité]

Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$, et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, fonction mesurable ≥ 0. Alors on définit la mesure $\nu = f \cdot \mu$, comme suit :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu(A) := \int \mathbb{1}_A f \, d\mu = \int_A f \, d\mu .$$

Interprétation : la fonction f agit comme une <u>densité</u> qui vient moduler la mesure μ.

Ex d'interprétation : $\mu \hookrightarrow$ le nombre de particules par élément de volume.

f = masse de chaque particule.

$f\mu$ = masse totale par unité de volume.

Il faut vérifier que $\nu = f \cdot \mu$ est bien une mesure.

. Vérifier que la fonction $\underbrace{\underset{\text{mes.}}{f} \ \underset{\text{mes.}}{\mathbb{1}_A}}_{\text{mes.}}$ est bien mesurable positive.

$\nu(\emptyset) = 0$.

$(A_n)_{n \geq 0}$ suite disjointe d'ens. mesurables, alors

$$\nu\left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n\right) = \int f \, \mathbb{1}_{(\sqcup_n A_n)} \, d\mu = \int f \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right) d\mu$$

$$= \int \sum_{n=0}^{\infty} (f \, \mathbb{1}_{A_n}) \, d\mu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int f \, \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n) \quad \to \sigma\text{-additivité de } \nu.$$

$\square$.

$\mu \rightsquigarrow \nu = f \cdot \mu$. La mesure μ vérifie la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \text{ si } \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Reste vrai même si $f = +\infty$ sur A ! $\big((+\infty) \times 0 = 0\big)$.

Prop^o Soit f fonction mesurable ≥ 0 sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

1. $\forall$ réel $a > 0$,

$$\mu\left(\{x \in E\,;\ f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int f \, d\mu.$$

En théorie des probabilités : <u>inégalité de Markov</u>.

2. Si $\int f \, d\mu < \infty \Rightarrow f(x) < +\infty$ μ-p.p.

3. Si $\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0$ μ-p.p.

4. Si g mesurable ≥ 0, alors si $g = f$ μ-p.p $\Rightarrow \int g \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Preuve : 1. Notons $A_a = f^{-1}([a,+\infty[) = \{x \in E \,;\, f(x) \geq a\}$.

Inégalité évidente : $f \geq a \mathbb{1}_{A_a}$

$$\Rightarrow \int f \, d\mu \geq \int a \mathbb{1}_{A_a} \, d\mu = a \int \mathbb{1}_{A_a} \, d\mu$$
$$= a \, \mu(A_a).$$

2. $\forall n \geq 0$, on prend $A_n = f^{-1}([n,+\infty])$

$A_\infty = f^{-1}(\{+\infty\})$

$(A_n)_{n \geq 0}$ suite $\downarrow$, avec $\bigcap_{n \geq 0} A_n = A_\infty$.

Markov : $\mu(A_1) \leq \int f \, d\mu < \infty$

$\Rightarrow \mu(A_1) < \infty$

$$\mu(A_\infty) \overset{\Rightarrow}{=} \mu\Big(\bigcap_{n \geq 0} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \downarrow \mu(A_n) = 0$$

Markov pour A_n : $\mu(A_n) \leq \underbrace{\frac{1}{n}\int f\,d\mu}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$.

$\Rightarrow A_\infty$ est μ-négligeable.

Si si $f = 0$ μ-p.p $\Rightarrow \int f\,d\mu = 0$.

Montrons $\Leftarrow$

Prenons $B_n = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]\right)$.

(B_n) suite $\uparrow$ d'ensembles, avec $\bigcup\limits_{n\geq 0} B_n = f^{-1}(\,]0,+\infty]\,)$

Markov : $\mu(B_n) \leq n \underbrace{\int f\,d\mu}_{=0} = 0 \Rightarrow B_n$ négligeable

$\mu\left(f^{-1}(\,]0,+\infty]\,)\right) = \mu\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\uparrow \mu(B_n) = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-p.p.

4 $h = f - g \Rightarrow h = 0$ μ-p.p.

Problème : h n'est pas forcément ≥ 0.

Je ne sais pas encore calculer l'intégrale d'une fonction qui prend des valeurs négatives.

→ faire autrement : n'utiliser que des fonctions ≥ 0.

On définit $f \vee g := \max(f, g)$ mesurable ≥ 0

$f \wedge g := \min(f, g)$ " " "

On a : $f \vee g \geq f \wedge g \Rightarrow \underbrace{f \vee g - f \wedge g}_{\text{mesurable et } \geq 0} \geq 0$

$\Rightarrow \int (f \vee g - f \wedge g) \, d\mu$ existe, et est ≥ 0.

$f = g$ μ-p.p. $\Rightarrow f \vee g = f \wedge g$ μ-p.p.

$\Leftrightarrow f \vee g - f \wedge g = 0$ μ-p.p.

3. $\Rightarrow \int (f \vee g - f \wedge g)\, d\mu = 0$

$$\int (f \vee g)\, d\mu = \int \left[(f \vee g - f \wedge g) + (f \wedge g) \right] d\mu$$

$$= \underbrace{\int (f \vee g - f \wedge g)\, d\mu}_{=0} + \int (f \wedge g)\, d\mu$$

$$\Rightarrow \int (f \vee g)\, d\mu = \int (f \wedge g)\, d\mu .$$

On a : $\quad f \wedge g \leq \underset{g}{f} \leq f \vee g$

$$\Rightarrow \int f \wedge g\, d\mu \underset{=}{\leq} \int \underset{g}{f}\, d\mu \underset{=}{\leq} \int f \vee g\, d\mu$$

$$\Rightarrow \int f\, d\mu = \int g\, d\mu \qquad \square .$$