Intégration et Probabilités

Cours n° 7 + 8

19+21/03/2024

USTC

S. Nonnenmacher

Intégrales de fonctions dépendant d'1 paramètre

$(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré $(x \in E)$

U : espace métrique ($\Rightarrow$ espace topol.) ($u \in U$), qui représente un espace de paramètres).

$$f : U \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, x) \longmapsto f(u, x)$$

variable sur laquelle on va intégrer

paramètre (on n'intègre <u>pas</u> dessus).

Questions : comment l'intégrale

$$I(u) = \int_E f(u, x)\, d\mu(x)$$

dépend-elle du paramètre u ?

intégrale à paramètre.

Les variables x et u jouent ici des rôles différents !!

Thme $(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, (U, d) espace métrique.

On considère une fonction $f : U \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, et on fixe un point $u_0 \in U$. Hypothèses :

i) $\forall u \in U$, $x \longmapsto f(u,x)$ est mesurable

ii) pour μ-p.tout $x \in E$, l'application $u \longmapsto f(u,x)$ est continue en $u = u_0$.

iii) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1_+(E, \mathcal{A}, \mu)$ telle que, $\forall u \in U$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ pour μ p.tout $x \in E$.

[domination]

Alors la fonction $u \longmapsto I(u) = \int f(u,x)\, d\mu(x)$ est bien définie en tout $u \in U$, et est continue en $u = u_0$.

Remarque : si on prend $U = \overline{\mathbb{N}}$, avec distance standard, et considère $u_0 = +\infty$. $f(u,x) = f_n(x)$, si $n \in \mathbb{N}$, et $f(+\infty, x) = f_\infty(x)$.

ii) : pour p-tout $x \in E$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\infty(x)$

iii) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1_+$, $\forall n$, pour p-tout x, $|f_n(x)| \leq g(x)$

et $|f_\infty(x)| \leq g(x)$

Le TCD dit alors que

$$\int f_n(x)\,d\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f_\infty(x)\,d\mu(x).$$

$n \to \infty \iff u \to u_0$.

Preuve du théorème :

Hyp i) et iii) $\Rightarrow$ $\forall u \in U$, $f(u,\cdot) \in \mathcal{L}^1(E)$, donc

je peux écrire $\int f(u,x)\,d\mu(x)$.

Choisissons une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$.

Alors les hypothèses du thme (hyp. de continuité en u_0) montrent que les fonctions $f(u_n, \cdot)$ satisfont les hypothèses du TCD, avec comme fonction limite

$$f(u_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(u_0, x) \quad , \quad \mu(x)-p.p.$$

Alors le TCD dit que $\displaystyle\int f(u_n, x)\, d\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(u_0, x)\, d\mu(x)$

Vrai quelque soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ choisie

$\Rightarrow$ vrai pour l'ensemble des intégrales $I(u)$, lorsque $u \to u_0$. $\square$

<u>Exemple</u> μ-primitive d'une fonction intégrable.

$(E, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ avec μ une mesure <u>diffuse</u> : $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Paramètres : $U = \mathbb{R}$, avec la distance euclidienne.

Prenons $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu)$. On considère les intégrales

$$F_\mu(u) := \int_{]-\infty, u]} \varphi(x) \mu(dx) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi \mathbb{1}_{]-\infty, u]})(x)\, d\mu(x)$$

On va montrer que F_μ est continue sur $U = \mathbb{R}$.

Attention : F_μ ressemble à la primitive F de la fonction φ, qui vérifie $F'(u) = \varphi(u)$. Cette primitive peut s'écrire

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\, d\lambda(x)$$

$$= F_\lambda(u)$$, pour λ la mesure de Lebesgue.

Rem : λ est diffuse.

Montrons que F_μ est bien continue en tout $u \in \mathbb{R}$.

On utilise la famille de fonctions $f(u,x) = \varphi(x) \mathbb{1}_{]-\infty,u]}(x)$

i) $\forall u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(u,x)$ est bien mesurable

iii) $\underset{\in \mathcal{L}^1_+}{g = |\varphi|} \Rightarrow \forall u \in \mathbb{R}, \quad |f(u,x)| \leq g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

domination OK.

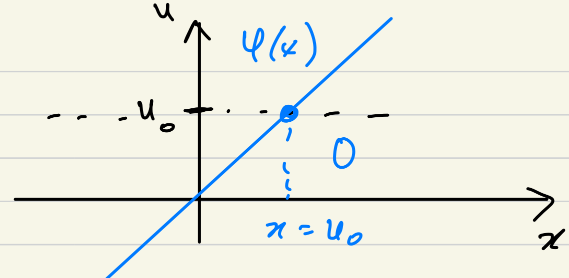
ii) $u \mapsto f(u,x) = \varphi(x) \mathbb{1}_{]-\infty,u]}(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } u > x \\ 0 \text{ si } u < x \end{cases}$

$\Rightarrow$ constante par morceaux, sauf si $u = x$.

Hyp. du th: fixons $u_0 \in \mathbb{R}$. A-t-on continuité de $f(u,x)$ en $u = u_0$, pour p.t. x ?

La fonction $f(u,x)$ est continue en $u = u_0$, sauf si $x = u_0$.

$\Rightarrow$ le seul point x pour lequel on n'a pas continuité en $u \to u_0$, est le point $x = u_0$.



Le singleton $\{u_0\}$ est μ-négligeable car μ est diffuse.

$\Rightarrow$ on a bien l'hypothèse : $f(u, x)$ est continue en u_0, $\mu(x)$-p.partout.

$\Rightarrow$ on peut appliquer le Thm de continuité p/r au paramètre

$\Rightarrow I(u) = F_\mu(u)$ est continue en u_0.

u_0 quelconque $\Rightarrow F_\mu$ est continue sur tout $U = \mathbb{R}$.

- Contrexemple avec une mesure non diffuse :

u_0, $\mu = \delta_{u_0}$ la mesure de Dirac en $x = u_0$.

Alors $F_\mu(u) = 0$ si $u < u_0$, et $F_\mu(u) = \varphi(u_0)$ si $u \geq u_0$.

$\Rightarrow F_\mu$ n'est pas continue au point u_0.

Remarque : si μ mesure de probabilité et $\varphi = 1$,
F_μ est appelée la <u>fonction de répartition</u> de la mesure μ.

$(\mu(\mathbb{R}) = 1, \Rightarrow$ la fonction constante $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu))$

<u>Ex :</u> a) Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$.

$\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \underline{\lambda})$.
$$\hat{\varphi}(u) = \int \underbrace{e^{-iux}\varphi(x)}_{f(u,x)} \, d\lambda(x)$$

La fonction $u \mapsto \hat{\varphi}(u)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) [Convolution]. $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \underline{\lambda})$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

Alors la fonction $u \mapsto (h * \varphi)(u) := \int \underbrace{h(u-x)\,\varphi(x)}_{f(u,x)}\, d\lambda(x)$

est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

On appelle $h * \varphi$ la convolution de h par φ (ou de φ par h)

$\forall u, \forall x,\quad |f(u,x)| \leq \underbrace{\sup|h| \times |\varphi(x)|}_{= g \,\in\, \mathcal{L}^1_+(\mathbb{R}, \lambda)}.$

Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Pour prendre la dérivée du I p/r à $u \in U \Rightarrow$ il faut que U ait une structure euclidienne : je prendrai ici $U = I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème $(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert.

$f : I \times E \to \mathbb{R}$, et on choisit $u_0 \in I$. Hypothèses :

i) $\forall u \in I$, $x \mapsto f(u, x)$ est dans $\mathcal{L}^1(E, \mu)$.

ii) Pour μ-p-tout $x \in E$, $u \mapsto f(u, x)$ est dérivable en u_0, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$.

iii) $\exists\ g \in \mathcal{L}^1_+(E, \mu)$ t.q., $\forall u \in I$,

$$|f(u,x) - f(u_0, x)| \leq g(x)\, |u - u_0|, \quad \mu(dx)\text{-p.p.}$$

La domination agit sur le taux de variation $\left|\frac{f(u,x) - f(u_0,x)}{u - u_0}\right|$

Alors la fonction $F(u) = \int f(u,x)\, d\mu(x)$ est continue et dérivable au point $u = u_0$, et sa dérivée en u_0 vaut :

$$\frac{d}{du} F(u_0) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\, d\mu(x).$$

La dérivée $\underbrace{\ }_{\text{p/r } u}$ de l'intégrale = l'intégrale de la dérivée $\underbrace{\ }_{\text{p/r à } u}$.

<u>Preuve :</u> Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ suite dans $I \setminus \{u_0\}$, avec $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$.

$$\varphi_n(x) := \frac{f(u_n, x) - f(u_0, x)}{u_n - u_0}$$ mesurables et intégrables

Pour μ-tout x, $|\varphi_n(x)| \leq g(x)$, $\forall n \geq 1$.

$\Rightarrow$ on définit : $\varphi_\infty(x) := \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ est mesurable $\forall x \in E$

$\Rightarrow$ pour μ-tout $x \in E$, $|\varphi_\infty(x)| \leq g(x)$

$\Rightarrow \varphi_\infty \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$.

D'après ii) : pour μ-tout $x \in E$,

$$\varphi_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$$

TCD appliqué à la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$:

$$\Rightarrow \int \varphi_\infty(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)\,d\mu(x)$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(u_n,x)-f(u_0,x)}{u_n-u_0}\,d\mu(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{u_n-u_0}\big(F(u_n)-F(u_0)\big)}_{\text{taux de variation de } F \text{ au point } u_0.}$$

Vrai $\forall$ suite (u_n) choisie

$\Rightarrow$ F dérivable en u_0, de dérivée $F'(u_0) = \int \frac{\partial f}{\partial u}\,d\mu$.

$\square$.

Remarques : on peut remplacer ii) et iii) par

ii)' Pour μ-p.-tout $x \in E$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur tout $u \in I$.

iii)' $\exists\, g \in \mathcal{L}^1_+(E,\mu)$, t.q. pour μ-p-tout $x \in E$,

$$\forall u \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x).$$

Facile : ii)' et iii)' impliquent les hypothèses du théorème.

Si $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$

$$\Rightarrow \quad |f(u_n,x) - f(u_0,x)| = \left|\int_{u_0}^{u_n} \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\, du\right| \leq \left|\int_{u_0}^{u_n} \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| du\right|$$

(théorème des accroissements finis).

$$\leq \left|\int_{u_0}^{u_n} g(x)\, du\right|$$

$$\leq g(x)\,|u_n - u_0|$$

Ex : a) $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\lambda)$, tel que

$x \mapsto x\varphi(x)$ est aussi dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\lambda)$.

Alors on montre que $\hat{\varphi}(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée donnée par

$$\frac{d}{du}\hat{\varphi}(u) = -i\int \underbrace{e^{-ixu}\, x\, \varphi(x)}_{\in \mathcal{L}^1} d\lambda(x)$$

b) $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans $C_b^1(\mathbb{R})$: h et h' sont bornées et continues.

Alors la convolution $h * \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

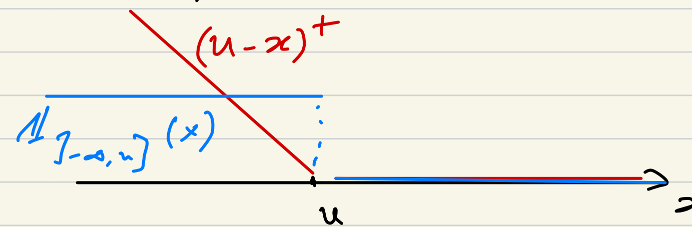
$$\frac{d}{du}(h * \varphi)(u) = \underbrace{(h' * \varphi)}_{\in C_b^0}(u).$$

c) μ mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu)$, telle que $x \mapsto x\varphi(x)$ est aussi dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu)$.

$\forall u \in \mathbb{R}$, on pose $F(u) = \int (u-x)^+ \varphi(x)\, d\mu(x)$

On montre alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$F'(u) = \int_{]-\infty, u]} \varphi(x)\, \mu(dx) = F_\mu(x).$$



<u>Construction de la mesure de Lebesgue</u>

λ : L'<u>unique</u> mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\forall\ a<b$,

$$\lambda(]a,b[) = b-a.$$

- On va <u>construire</u> λ, donc montrer qu'elle existe.
- On va montrer qu'elle est définie sur une tribu plus grande que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: la tribu de Lebesgue.

Stratégie : 1. on commence par construire une <u>mesure extérieure</u>, objet plus général qu'une mesure.

↳ λ^*, définie sur tout $\mathcal{P}(E)$. Mais pas σ-additive.

2. à partir de λ^*, on définit une tribu $\mathcal{M}(\lambda^*)$, et on montre que la restriction de λ^* à $\mathcal{M}(\lambda^*)$ est une (vraie) mesure. $\rightarrow$ définit la mesure de Lebesgue λ.

On montre que $\underbrace{\mathcal{M}(\lambda^*)}$ contient tous les boréliens.

↳ tribu de Lebesgue

. On vérifie que $\lambda(]a,b[) = b-a \Rightarrow \lambda$ est bien la mesure qu'on voulait. •

. Mesures extérieures générales

Def : E ensemble. $\mu^* : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0,\infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$ est appelée une mesure extérieure (ou mesure σ-sous-additive) si :

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

ii) μ^* est croissante : si $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

iii) μ^* est σ-sous-additive : $\forall (A_k)_{k\geq 0}$ suite de parties de E,

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

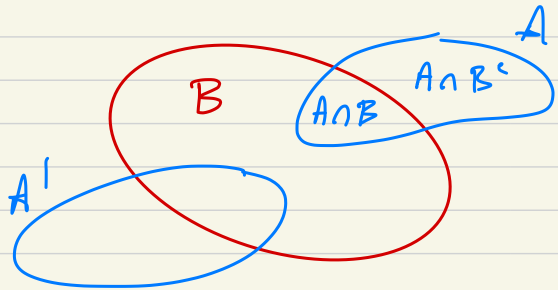
Comparaison avec axiomes d'1 mesure :

- μ^* est définie sur toute partie $A \subset E$.
- Si μ est définie sur la suite (A_k), elle vérifie automatiquement la σ-sous-additivité.
- Si A, B sont dans la tribu d'1 mesure μ, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$.
- Une mesure μ vérifie la propriété + forte de <u>σ-additivité</u> ((A_k) suite disjointe $\Rightarrow \mu(\sqcup A_k) = \sum_k \mu(A_k)$).

- On suppose qu'on a une mesure extérieure, on va fabriquer une mesure μ définie sur une certaine tribu $\mathcal{M}(\mu^*)$.

Déf. Une partie $B \subset E$ est dite μ^*-mesurable si :

$$\forall A \subset E, \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$



$\Rightarrow$ on veut l'additivité de μ^* p/r à la partition $E = B \sqcup B^c$.

On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ la famille des parties de E μ^*-mesurables.

Rem : l'axiome iii) de σ-sous-additivité impose aussi une sous-addivité pour des unions finies (prendre $A_k = \emptyset$ pour $k \geq N$)

$A_1 = A \cap B \quad , A_2 = A \cap B^c$

$$\Rightarrow \mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Vrai pour tous A, B.

$\Rightarrow$ pour montrer que B est μ^*- mesurable, il faut montrer

$$(*) \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \quad , \forall A.$$

Théorème :

1. La famille $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu sur E. Cette tribu contient toutes les parties μ^*-négligeables ($B \in \mathcal{P}(E)$ tq $\mu^*(B) = 0$).
2. La restriction de μ^* à la tribu $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure (σ-additive). On la notera μ.

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)}$$

La mesure μ est complète : sa tribu $\mathcal{M}(\mu^*)$ contient tous les μ-négligeables

<u>Preuve</u> : $\overset{\text{notation}}{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\mu^*)$.

. Montrons que $\mathcal{M}$ contient tous les $\overset{\text{ensembles}}{\vee}$ μ^*- négligeables.

Si $\mu^*(B) = 0 \underset{\text{croissance}}{\Longrightarrow} \forall A \subset E, \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B^c)$

et $0 = \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B)$

$\Rightarrow \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B^c) + \mu^*(A \cap B)$

$\Rightarrow$ B est μ^*- mesurable.

. Montrons que $\mathcal{M}$ est une tribu :

i) $B = \emptyset$ est bien μ^*- mesurable : $\mu^*(A) \overset{=}{\geq} \underbrace{\mu^*(\overbrace{A \cap \emptyset}^{\emptyset})}_{0} + \mu^*(\underbrace{A \cap E}_{A})$

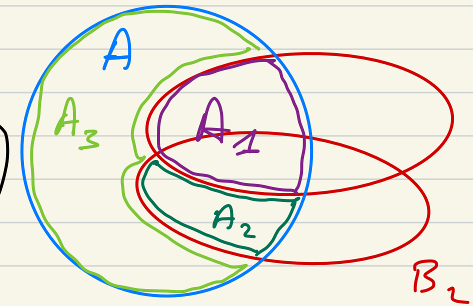
ii) passage au complémentaire l'inégalité (*) est invariante par passage au complémentaire.

iii) Stabilité par union dénombrable ?

Montrons stabilité par union finie

Si $B_1, B_2 \in \mathcal{M}$, on veut montrer que $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}$.

$A \subset E$ quelconque



$$\begin{aligned}
\mu^*\big(\underbrace{A \cap (B_1 \cup B_2)}_{A_1 \sqcup A_2}\big) + \mu^*\big(\underbrace{A \cap (B_1 \cup B_2)^c}_{A_3}\big) &\underset{\downarrow}{\overset{B_1 \in \mathcal{M}}{=}} \mu^*(\underbrace{A \cap B_1}_{A_1}) + \mu^*(\underbrace{A \cap B_2 \cap B_1^c}_{A_2}) + \mu^*\big(\underbrace{A \cap (B_1 \cup B_2)^c}_{A_3}\big) \\
&= \mu^*(A_1) + \underbrace{\mu^*(A_2) + \mu^*(A_3)} \\
&\underset{B_2 \in \mathcal{M}}{=} \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2 \cup A_3) \\
&= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) \\
&\underset{B_1 \in \mathcal{M}}{=} \mu(A)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}$.

$\Rightarrow \mathcal{M}$ stable par $\cup$ finies, et par $\cap$ finies.

Reste à montrer la stabilité par <u>unions dénombrables</u>.

. Suite $(A_k)_{k \geq 0}$, $A_k \in \mathcal{M}$.

$B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, $B_2 = A_2 \setminus (A_0 \cup A_1)$, ...

B_k sont 2 à 2 disjoints, $B_k \in \mathcal{M}$.

$\forall n \geq 0$, $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigsqcup_{k=0}^{n} B_k := \Sigma_n$.

On veut montrer que $\Sigma_\infty = \bigcup_{k \geq 0}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k \geq 0}^{\infty} B_k$ est dans $\mathcal{M}$.

$\forall n$, on a : $E = \underbrace{B_0 \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n}_{\Sigma_n} \sqcup \Sigma_n^c$

Montrons que μ^* est additive p/r à cette partition :

$$\forall A \subset E, \quad \mu^*(A) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*(A \cap \Sigma_n^c).$$

Récurrence :

$n=0$: $B_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow \forall A,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_0) + \mu^*(\Sigma_0^c)$.

Supposons la propriété vraie à l'ordre n.

Utilisons le fait que $B_{n+1} \in \mathcal{M}$

$$\mu^*(A \cap \Sigma_n^c) = \mu^*(A \cap \cancel{\Sigma_n^c} \cap B_{n+1}) + \mu^*(A \cap \underbrace{\Sigma_n^c \cap B_{n+1}^c})$$

$$\underbrace{(\Sigma_n \cup B_{n+1})}_{\Sigma_{n+1}}{}^c$$

Les B_k sont disjoints $\Rightarrow \Sigma_n \cap B_{n+1} = \emptyset$

$\Leftrightarrow B_{n+1} \subset \Sigma_n^c$.

$$= \mu^*(A \cap B_{n+1}) + \mu^*(A \cap \Sigma_{n+1}^c)$$

$\Rightarrow$ on a l'expression à l'ordre $n+1$.

On veut faire tendre $n \to +\infty$.

$\forall n,\ \Sigma_\infty^c \subset \Sigma_n^c$

μ^* est croissante $\Rightarrow \mu^*(\Sigma_n^c) \geq \mu^*(\Sigma_\infty^c)$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*(A \cap \Sigma_\infty^c) \quad , \forall n \geq 0$$

$$n \to \infty \Rightarrow \mu^*(A) \overset{=}{\underset{\leq}{\geq}} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*(A \cap \Sigma_\infty^c)$$

σ-sous-additif.

$$\geq \mu^*\Big(\underbrace{\bigcup_{k=0}^{\infty}(A \cap B_k)}_{A \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = A \cap \Sigma_\infty}\Big) + \mu^*(A \cap \Sigma_\infty^c)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap \Sigma_\infty) + \mu^*(A \cap \Sigma_\infty^c)$$

sous-additivité $\Rightarrow$ $\leq$

$$\Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap \Sigma_\infty) + \mu^*(A \cap \Sigma_\infty^c).$$

$\Rightarrow \Sigma_\infty \in \mathcal{M}.$

Conclusion : $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu.

$\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}(\mu^*)}$. Vérifions que μ est une mesure sur $\mathcal{L}$.

. $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$.

(B_k) suite dans $\mathcal{L}$, d'éléments 2 à 2 disjoints.

$$A = \Sigma_\infty \Rightarrow \mu(\Sigma_\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\underbrace{\Sigma_\infty \cap B_k}) + \mu(\underbrace{\Sigma_\infty \cap \Sigma_\infty^c})$$

$$\mu\left(\coprod_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) + 0 \qquad \emptyset$$

On a montré la σ-additivité de μ sur la tribu $\mathcal{L}(\mu^*)$.

$\Rightarrow \mu$ est une mesure σ-additive.

<u>Construction de la mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.</u>

λ^* = mesure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ on fabriquera la tribu $\mathcal{L}(\lambda^*)$, et la mesure $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}(\lambda^*)}$

mesure de Lebesgue

Déf : $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) \quad : \quad A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}$

$\forall A \subset E$, $\lambda^*(A) \in [0, +\infty]$

$a_i \leq b_i$

$\to]a_i, a_i[= \emptyset$

$\lambda^*(\emptyset) = 0$

Pas évident : $\lambda^*(]a,b[) = b-a$? $\leadsto$ + tard.

Théorème i) λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.

ii) $\mathcal{M}(\lambda^*)$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

iii) $\forall a \leq b$, $\lambda^*([a,b]) = \lambda^*(]a,b[) = b-a$.

$\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}(\lambda^*)}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Les intervalles $]a,b[\in \mathcal{M}(\lambda^*)$ et $\lambda(]a,b[) = b-a$.

$\Rightarrow \lambda$ est l'unique mesure de Lebesgue.

Preuve : i) $\lambda^*(\phi) = 0$: OK.

ii) Si $A \subset A'$

Si $A' \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i, b_i[\Rightarrow A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i, b_i[$

Les somme $\sum_i (b_i - a_i)$ incluses dans la définition de $\lambda^*(A')$ apparaîtront aussi dans la définition de $\lambda^*(A)$.

$\rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(A')$. $\rightarrow$ croissance OK.

iii) σ-sous-additivité.

(A_n) suite de parties de $\mathbb{R}$. Si $\exists i$ tq $\lambda^*(A_i) = +\infty \Rightarrow$ on aura bien

$$\mu^*(\bigcup_n A) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$$

$\rightarrow$ on suppose que tous les A_i vérifient $\mu^*(A_i) < \infty$.

Idée : approcher chaque $\lambda^*(A_i)$ par une union d'intervalles :

Soit $\epsilon > 0$. $\quad \forall n \geq 0, \quad \lambda^*(A_n) = \inf \{ - - - \}$

$\Rightarrow \exists$ recouvrement $\quad A_n \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[\quad$, t.q.

$$\lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \geq \sum_{i=0}^{\infty} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)})$$

$\leq$

$( ]a_i^n, b_i^n[ )_{i,n \in \mathbb{N}}$

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,i}]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \right)}_{2\epsilon + \sum_n \lambda^*(A_n)} \geq \sum_{i,n} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) \geq \lambda^*\left(\bigcup_n A_n \right)$$

$$2\epsilon + \sum_n \lambda^*(A_n) \geq \lambda^*\left(\bigcup_n A_n \right)$$

Vrai $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \sum_n \lambda^*(A_n) \geq \lambda^*\left(\bigcup_n A_n \right) \quad \sigma$-sous-add.^{té} !

Concl: λ^* est une mesure extérieure.

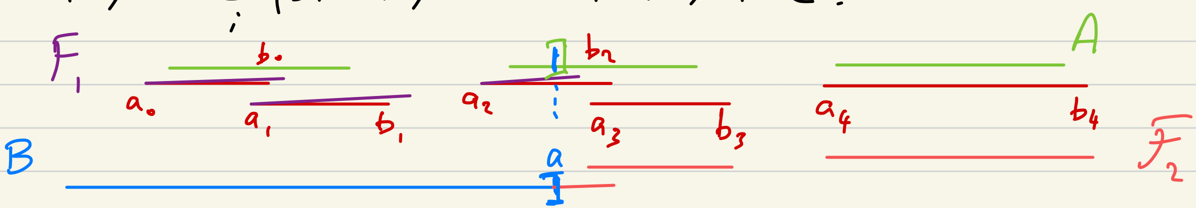
i) Pour montrer que $\mathcal{L}(\lambda^*)$ contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle contient tous les intervalles $\{]-\infty, a] , a \in \mathbb{R} \}$

Soit $B =]-\infty, a]$. Montrons que B est λ^*-mesurable.

Vérifier que, $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c)$.

$\exists$ Recouvrement de A par $(]a_i, b_i[)$ t.q.

$$\lambda^*(A) \leq \sum_i (b_i - a_i) \leq \lambda^*(A) + \epsilon.$$



$F_1 = \left( ]a_i \wedge a, b_i \wedge a + \frac{\epsilon}{2^i}[\right)_{i \in \mathbb{N}}$ recouvre $A \cap B$

$a \wedge b = \min(a, b)$

$a \vee b = \max(a, b)$

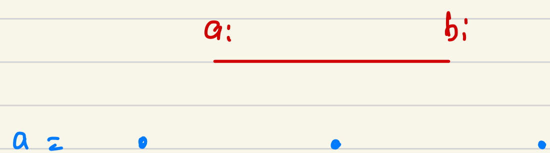
$F_2 = \left( ]a_i \vee a, b_i \vee a[\right)_{i \in \mathbb{N}}$ recouvre $A \cap B^c$

$$\lambda^*(A\cap B) \le \sum_{\mathcal{F}_1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(b_i \wedge a + \epsilon 2^{-i} - a_i \wedge a\right)$$

$$= 2\epsilon + \sum_i \left(b_i \wedge a - a_i \wedge a\right)$$

$$\lambda^*(A\cap B^c) \le \sum_{\mathcal{F}_2} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(b_i \vee a - a_i \vee a\right)$$

$$b_i \vee a - a_i \vee a + b_i \wedge a - a_i \wedge a = b_i - a_i$$



$$\Rightarrow \lambda^*(A\cap B) + \lambda^*(A\cap B^c) \le 2\epsilon + \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_i - a_i) \le 3\epsilon + \lambda^*(A).$$

Vrai $\forall \epsilon > 0$

$$\Rightarrow \lambda^*(A\cap B) + \lambda^*(A\cap B^c) \le \lambda^*(A)$$

$\Rightarrow B =]-\infty, a]$ est bien λ^*-mesurable.

$\longrightarrow$ tout borélien est λ^*-mesurable.

iii) Montrer que $\lambda^*([a,b]) = b-a$.

$$[a,b] \subset]a-\epsilon, b+\epsilon[\implies \lambda^*([a,b]) \leq b-a+2\epsilon$$

Vrai $\forall \epsilon > 0$ $\implies \lambda^*([a,b]) \leq b-a$.

$\overset{?}{\geq}$

Autre inégalité ?

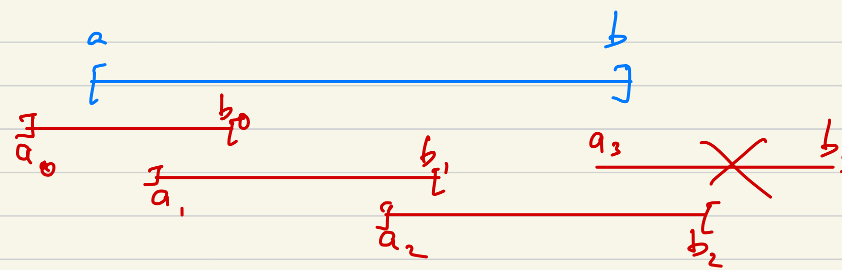
Supposons que $[a,b]$ est recouvert par $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i, b_i[$.

$[a,b]$ compact $\to$ par thme de Borel-Lebesgue, il suffit d'un nombre fini d'intervalles : $[a,b] \subset \bigcup_{i=0}^{N}]a_i, b_i[$.

On veut vérifier que $b-a \leq \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$.

$a \in]a_0, b_0[$

$a_0 < a < b_0$



$N=0$ Si $b_0 > b \implies b_0 - a_0 > b-a$

$[a,b] \subset]a_0, b_0[$

Si $b_0 < b \Rightarrow$ besoin d'1 2e intervalle $]a_1, b_1[$, avec

$b_0 \in]a_1, b_1[$: $a_1 < b_0 < b_1$

Si $b_1 > b \Rightarrow N = 1$: $[a,b] \subset]a_0, b_0[\cup]a_1, b_1[$

$\Rightarrow b_1 - a_1 + b_0 - a_0 > b_1 - a_0 > b - a$

Si $b_1 < b \Rightarrow$ besoin d'1 troisième intervalle $]a_2, b_2[$.

Si $b_2 > b \longrightarrow b_2 - a_2 + b_1 - a_1 + b_0 - a_0 > b - a$.

Sinon on continue, jusqu'à ce que $b_N > b$.

$$\longrightarrow \sum_{i=0}^{N} (b_i - a_i) > b - a.$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) \geq (b - a)$$

- infimum sur ces recouvrements $\bigcup_i]a_i, b_i[$

$$\Rightarrow \lambda^*([a,b]) \geq (b-a).$$

Conclusion : $\lambda^*([a,b]) = b - a = \lambda([a,b])$

En particulier, $\lambda^*([a,a]) = 0$, $\lambda^*([b,b]) = 0$

$$\lambda^*([a,a]) = \lambda([a,a]) \qquad \lambda^*([b,b]) = \lambda([b,b])$$

additivité $\Rightarrow$ $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) - \lambda(\{a\}) - \lambda(\{b\})$
$= b - a$

$\to$ On a construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

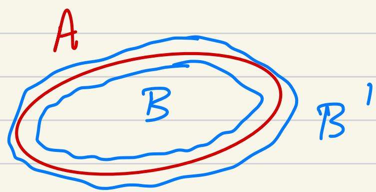
- On a vu que la tribu de Lebesgue
  - contient tous les boréliens
  - contient les ensembles λ^*-négligeables.

<u>Def°</u> $(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré. La tribu complétée de $\mathcal{A}$ par rapport à μ est définie par $\overline{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$, où $\mathcal{N}$ = ensembles μ-négligeables. Il existe alors ! mesure qui prolonge μ sur tout $\overline{\mathcal{A}}$. On la notera $\overline{\mu}$.

Comment caractériser les éléments de $\overline{\mathcal{A}}$?

<u>Affirmat°</u> : Tout élément de $\overline{\mathcal{A}}$ est encadré par 2 éléments de $\mathcal{A}$, de même mesure μ :

On définit la classe $\mathcal{C} = \{ A \subset E ;\ \exists B, B' \in \mathcal{A},$ avec $B \subset A \subset B'$ et $\mu(B' \setminus B) = 0 \}$



$\Rightarrow A \in \overline{\mathcal{A}}$.

On voit que $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$: $A = B = B'$

$\mathcal{C} \supset \mathcal{N}$: si A négligeable $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) = 0$

$\emptyset \subset A \subset B$ $\qquad \mu(B \setminus \emptyset) = 0$

Si $\mathcal{C}$ tribu $\Rightarrow \mathcal{C} \supset \overline{\mathcal{A}}$.

. Montrons que $\mathcal{C}$ est une tribu.

Si $A \in \mathcal{C}$ $\quad \exists\ B \subset A \subset B'$, $\mu(B' \setminus B) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad B^c \supset A^c \supset B'^c$, $\mu(\underbrace{B^c \setminus B'^c}_{\shortparallel}) = 0$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$.

- $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $A_k \in \mathcal{C}$. $\quad B_k \subset A_k \subset B'_k$, $\mu(B'_k \setminus B_k) = 0$

$$\bigcup B_k \subset \bigcup A_k \subset \bigcup B'_k$$

$$\mu\left(\left(\bigcup B'_k\right) \setminus \left(\bigcup_k B_k\right)\right) = \mu\left(\bigcup_k \left(B'_k \setminus \bigcup_j B_j\right)\right) \leq \mu\left(\bigcup_k (B'_k \setminus B_k)\right)$$

$$\leq \sum_k \underbrace{\mu(B'_k \setminus B_k)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{C}$

Concl: $\mathcal{C}$ est une tribu.

$\Rightarrow \mathcal{C} \supset \overline{\mathcal{F}}$.

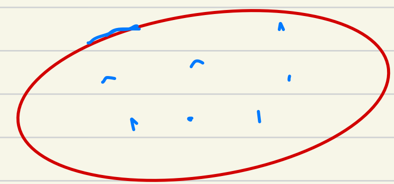
Montrons que $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{F}}$.

Soit $A \in \mathcal{C}$: $\exists\, B, B' \in \mathcal{A}$, t.q. $B \subset A \subset B'$ et $\mu(B'\setminus B) = 0$.

$$\Rightarrow A = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{B}} \cup \underbrace{(A\setminus B)}_{\in \mathcal{N}} \qquad A\setminus B \subset B'\setminus B$$

$$\Rightarrow A \subset \mathcal{A}\cup\mathcal{N} \subset \sigma(\mathcal{A}\cup\mathcal{N})$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{A}}.$$



$A \in \mathcal{A}$

- Prolongement de μ à $\overline{\mathcal{A}}$?

Soit $A \in \overline{\mathcal{A}}$, $B \subset A \subset B'$, alors $\mu(B') = \mu(B) + \mu(\underbrace{B'\setminus B}_{0})$

$\Rightarrow$ on choisit $\bar{\mu}(A) = \mu(B) = \mu(B')$.

Si on avait choisi une autre paire $\tilde{B}, \tilde{B}'$, telle que

$\tilde{B} \subset A \subset \tilde{B}'$, $\mu(\tilde{B}'\setminus\tilde{B}) = 0$, a-t-on $\mu(\tilde{B}) = \mu(B)$?

Oui :

$B \subset A \subset \tilde{B}' \Rightarrow \mu(\tilde{B}') \geq \mu(B)$

$\tilde{B} \subset A \subset B' \Rightarrow \mu(B') \geq \mu(\tilde{B})$ $\Rightarrow$ sont tous égaux.

- $\bar{\mu}(A)$ est-elle σ-additive ?

(A_n) suite disjointe de $\bar{\mathcal{F}}$, chaque $B_n \subset A_n \subset B_n'$

Les B_n sont disjoints $\Rightarrow \mu(\bigcup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n) = \sum_n \bar{\mu}(A_n)$

On sait que $(\bigcup_n A_n \setminus \bigcup_n B_n) = \bigcup_n (A_n \setminus B_n)$ est négligeable

$\Rightarrow \bar{\mu}(\bigsqcup_n A_n)) = \mu(\bigsqcup_n B_n) = \sum_n \bar{\mu}(A_n)$.

$\rightarrow \bar{\mu}$ est bien σ-additive.

<u>Prop</u> : La tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\lambda^*)$ est la complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On notera cette tribu $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ (en se souvenant que la complétion est relative à la mesure de Lebesgue).

Preuve : On sait que $\mathcal{M}(\lambda^*) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\supset$ ens. λ-négligeables

$\Rightarrow \mathcal{M}(\lambda^*) \supset \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

A l'inverse, si $A \in \mathcal{M}(\lambda^*)$, montrons que $A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

1. Supposons que A est borné : $A \subset]-K, K[$, pour un certain K.

$\Rightarrow \lambda(A) \leq 2K$.

$\forall n, \exists \left( ]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[\right)_{i \in \mathbb{N}}$ qui recouvrent A à $\frac{1}{n}$ près :

$$\lambda(A) + \frac{1}{n} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \left(b_i^{(n)} - a_i^{(n)} \right) \geq \lambda(B_n) \geq \lambda(B')$$

soit $B_n = \bigcup_i]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[$ recouvre A. B_n est borélien, et

On considère $B' = \bigcap_{n \geq 0} B_n$, est aussi borélien, et $B' \supset A$.

$\lambda(A) + \frac{1}{n} \geq \lambda(B')$. Vrai $\forall n \Rightarrow \lambda(A) \geq \lambda(B')$ $\leq$

$\rightarrow$ on a trouvé un borélien B' tq $B' \supset A$ et $\lambda(A) = \lambda(B')$.

- Prenons $\widetilde{A} =]-K, K[\setminus A$. $\widetilde{A} \in \mathcal{M}(\lambda^*)$. $\lambda(\widetilde{A}) \leq 2K$.

On fabrique comme ci-dessus un borélien $\widetilde{B}'$ tq

$$\widetilde{B}' \supset \widetilde{A} \quad \text{et} \quad \lambda(\widetilde{B}') = \lambda(\widetilde{A}).$$

$\hookrightarrow$ on peut imposer que $\widetilde{B}' \subset]-K, K[$

Alors $B :=]-K, K[\setminus \widetilde{B}'$ vérifie $B \subset A$ et $\underset{2K - \lambda(\widetilde{B}')}{\underset{\shortparallel}{\lambda(B)}} = \underset{2K - \lambda(\widetilde{A})}{\underset{\shortparallel}{\lambda(A)}}$.

$\rightarrow$ On a fabriqué 2 boréliens B, B', t.q.

$$B \subset A \subset B' \quad \text{et} \quad \lambda(B) = \lambda(B') = \lambda(A).$$

$$\Longrightarrow A \in \text{"}\mathcal{C}\text{"} = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}.$$

2. On relâche l'hypothèse de bornitude.

$A \rightsquigarrow A_K = A \cap]-K, K[$ est borné, et dans $\mathcal{M}(\lambda^*)$

par 1. $\Rightarrow A_K \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \Rightarrow A = \bigcup_{K \geq 1} A_K \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

Prop : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction borélienne. Supposons que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est égale à $\underline{f\ \lambda -}$ p.p. Alors g est mesurable pour la tribu de Lebesgue $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

Preuve : hyp : $\exists$ borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A) = 0$, et tel que

$f|_{A^c} = g|_{A^c}$.

$$g : (\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\quad g^{-1}(B) = (g^{-1}(B) \cap A^c) \cup (g^{-1}(B) \cap A)$$
$$= \underbrace{(f^{-1}(B) \cap A^c)}_{\text{borélien}} \cup \underbrace{(g^{-1}(B) \cap A)}_{\text{négligeable}}$$
$$\in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}.$$