Université Paris-Saclay • M2 Analyse Modélisation Simulation

Cours d'introduction à l'analyse spectrale (2015-2016, 1er semestre)

Stéphane Nonnenmacher
Pour me contacter : `stephane.nonnenmacher@math.u-psud.fr`.
Mon bureau est le 148 (1er étage droite) dans le bâtiment 425.

Feuille d'exercices no. 1

Exercice 1.1 : critères de compacité

Soit A un opérateur continu sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. il existe une suite (A_n) d'opérateurs de rangs finis, tels que $\|A_n - A\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$
2. A est un opérateur compact
3. l'image $A(\overline{B(0,1)})$ est compacte
4. pour toute suite $(\psi_n \in \mathscr{H})$ telle que $\psi_n \to \psi$ faiblement, on a $A\psi_n \to A\psi$ fortement
5. pour tout système orthonormé $(e_n)_n \in \mathbb{N}$, on a $\|Ae_n\| \to 0$.

On montrera les équivalences dans l'ordre $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$.

Indications : $2 \to 3$: il suffit de montrer que l'image est fermée. $5 \to 1$: raisonner par l'absurde.

Exercice 1.2. Convolution et compacité.

Soit $\mathscr{H} := L^2(\mathbb{R}^d)$ et $k \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. On considère l'opérateur de convolution A_k :

$$A_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x-y) f(y)\, dy, \quad f \in \mathscr{H}.$$

1. Montrer que $A_k \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ avec $\|A_k\| \leq \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
2. Montrer que A_k est compact ssi $k = 0$ presque partout.
3. Soit $U \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que l'opérateur A défini par
$$(Af)(x) := U(x)\big(A_k f\big)(x)$$
est compact.
4. Soit $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\lim_{r\to+\infty} \sup_{|x|\geq r} \big|V(x)\big| = 0$. Montrer que l'opérateur B défini par
$$(Bf)(x) := V(x)\big(A_k f\big)(x)$$
est compact.

   Indication : représenter B comme limite d'opérateurs de la forme en 3.

Exercice 1.3. opérateur de transfert sur S^1.

Soit $T : x \mapsto T(x)$ une application lisse sur le cercle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Afin d'étudier le système dynamique engendré par T, on peut se servir de l'opérateur induit par la transformation, agissant sur les observables : $\varphi \in C^\infty(S^1) \mapsto \varphi \circ T$, ou de l'**opérateur de transfert** $\mathscr{L}$, qui représente l'évolution d'une densité $\psi(x)$ par la dynamique :

$$\langle \varphi, \mathscr{L}\psi \rangle = \langle \varphi \circ T, \psi \rangle_{L^2(S^1)}.$$

Dans cet exercice on va étudier le spectre de l'opérateur de transfert associé à l'application

$$T(x) = 2x \bmod 1.$$

1. Ecrire l'expression de $\mathscr{L}\psi(x)$. Vérifier que $\mathscr{L}$ est borné sur $C^0(S^1)$ et sur $L^2(S^1)$. Donner sa norme dans ces 2 espaces.
2. Identifier une valeur propre simple de $\mathscr{L}$, et en déduire son rayon spectral sur L^2.
3. Afin de poursuivre l'analyse spectrale de $\mathscr{L}$, représenter l'action de cet opérateur sur les modes de Fourier $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathscr{L}$ agit indépendamment dans différents "secteurs de Fourier", chaque secteur étant indicé par un entier impair k_0.
4. Montrer que tout $z \in \{|z| < 1\}$ est valeur propre de $\mathscr{L}$ sur L^2, et décrire les fonctions propres correspondantes $\psi_{z,k_0}(x)$.
5. Décrire le spectre de l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ sur $L^2(S^1)$. De quel type de spectre s'agit-il ?
6. On cherche à décrire le spectre de $\mathscr{L}$ dans les espaces de Sobolev $H^m(S^1)$, $m \geq 1$. Quelle est la régularité Sobolev d'une fonction propre $\psi_{z,k_0}(x)$? En déduire le spectre de $\mathscr{L}$ sur $H^m(S^1)$.
7. Chercher à borner le spectre de $\mathscr{L}$ agissant sur l'espace $C^m(S^1) \cap \{1\}^\perp$.