Equations elliptiques linéaires et non-linéaires
feuille 1

Exercice 1. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère pour $\alpha > 0$ et $f \in L^2(\Omega)$ le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où n est la normale unitaire extérieure.

1. Donner une formulation faible du problème.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$\forall u \in H^1(\Omega), \, \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\big(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\big)$$
où γ désigne l'opérateur trace.
3. Montrer que (1) possède une unique solution faible u.
4. On considère maintenant une suite α_n, $\alpha_n \to \infty$ et u_n l'unique solution faible de (1) avec α remplacé part α_n. Montrer que u_n converge fortement dans L^2 vers la solution u de:
$$u \in H^1_0(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$
5. A-t-on convergence forte de u_n vers u dans $H^1(\Omega)$?

Exercice 2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $p \in [2, +\infty)$, il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\forall u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega), \quad \|u\|_{W^{1,p}} \leq \varepsilon \|u\|_{W^{2,p}} + C_\varepsilon \|u\|_{L^p}.$$

Exercice 3. On considère dans $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ le système:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\nabla u + \nabla u^t) + u = f, \quad x \in \Omega, \\ u_{/\partial\Omega = 0} \end{cases}$$

avec $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, et $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ donné.

1. Donner une formulation faible du problème.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|\nabla u + \nabla u^t\|_{L^2} \geq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

3. En déduire qu'il existe une unique solution faible u dans H_0^1.

Exercice 4.

1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $F(s)/(1+|s|)$ et F' sont bornées. Montrer que $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et calculer $\partial_i(F(u))$.
2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, montrer que $u_+ \in W^{1,p}(\Omega)$ et calculer $\partial_i u_+$.