Equations elliptiques linéaires et non-linéaires
TD2

Exercice 1. Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = \mathrm{div}\ G, \quad x \in \Omega$$

avec $x \mapsto A(x)$ mesurable, vérifiant

$$\exists \alpha > 0, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2.$$

Si $G \in L^q(\Omega)$ avec $q > N$, montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert borné et $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$, bornée et vérifiant:

$$\exists \alpha > 0, \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A(s)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2.$$

On considère pour $f \in L^2(\Omega)$, l'équation elliptique:

$$-\mathrm{div}\big(A(u)\nabla u\big) = f,\ x \in \Omega, \quad u_{/\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

1. Donner une formulation faible du problème.
2. Pour $v \in L^2$, on considère $Tv = u$ l'unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$ de l'équation
$$-\mathrm{div}(A(v)\nabla u) = f, \quad x \in \Omega.$$
Justifier que T est bien définie. Montrer qu'il existe une solution faible pour (1) à l'aide du point fixe de Schauder.

Exercice 3. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solution faible de

$$-\Delta u + u = |u|^\alpha u \tag{2}$$

avec $0 < \alpha < 4/N$ et $N \geq 3$.

1. En utilisant des résultats de régularité elliptique, montrer que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [2, +\infty[$. En déduire que u est continue et tend vers zéro à l'infini.
2. Soit $\theta_\varepsilon = e^{\frac{|x|}{1+\varepsilon|x|}}$.
   (a) Montrer que θ_ε est bornée, Lipschitzienne avec $|\nabla \theta_\varepsilon| \leq \theta_\varepsilon$.
   (b) En utilisant $\theta_\varepsilon u$ comme fonction test et en faisant tendre ε vers zéro, Montrer que toute solution faible de (2) vérifie
$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{|x|}|u(x)|^2 dx < +\infty.$$