Université Paris-Saclay 2020–2021

Agrégation

Exercices: Leçon "Prolongements de fonctions"

Exercice 1 Soit $f \in L^2(0,1)$, on pose

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in]0,1].$$

Montrer que $T:\, L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ est continue.

Exercice 2 Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une suite de fonctions $f_n :\, I \to \mathbb{R}$ croissantes telle que pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_n$ est bornée. Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que pour tout x, $f_{\varphi(n)}(x)$ converge.

Exercice 3 Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

i) $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Supp} u \subset [-R,R]$.

ii) $\hat{u}$ se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N},\, \exists C_N > 0,\, |\hat{u}(z)| \leqslant \frac{C_N}{(1+|z|)^N} e^{2\pi R|\mathrm{Im}\ z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 4 (**Théorème de Hahn-Banach cas séparable**) Soit X un espace vectoriel $p : X \to \mathbb{R}$, une application positivement homogène et sous-linéaire.

1. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ linéaire telle que
$$f(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in F \tag{1}$$
avec F sous espace vectoriel de X. Montrer que l'on peut trouver un prolongement de f défini sur $Y = F + \mathbb{R}a$ tel que la propriété (1) reste vraie sur Y.

2. On suppose que X est un espace vectoriel topologique séparable, que p est continue et que f, linéaire vérifie (1) sur un sous-espace vectoriel Y. Montrer que f possède un prolongement à X tel que la propriété (1) reste vraie pour le prolongement. (On pourra écrire $X = \overline{\cup_n \langle e_1, \cdots e_n\rangle}$.)

3. Soit E un Banach, montrer que pour tout $x \in E$,
$$\|x\| = \sup\{\phi(x),\, \phi \in E',\, \|\phi\| \leqslant 1\}.$$

.