Exercices Leçon 204

Exercice 1
Les espaces suivant sont-ils homéomorphes ?

1. $[a, b]$ et $\mathbb{S}^1$,
2. $[a, b[$ et $[a, b]$,
3. $[a, b[$ et $]a, b[$.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue injective. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 3
Soit (X, d) espace métrique. Soit $(K_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante de compacts connexes. Montrer que $\cap_{n \geqslant 1} K_n$ est compact connexe. Le résultat est-il vrai si on remplace compact par fermé.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\exists k > 0, \, \forall x \in \mathbb{R}^n, \, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad (Df(x) \cdot h, h) \geqslant k \|h\|^2$$

où on note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne.

1. Montrer que :
$$\forall x, \, y \in \mathbb{R}^n, \quad (f(y) - f(x), y - x) \geqslant k \|y - x\|^2.$$
2. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme.