

I Quelques exemples

• Laplace

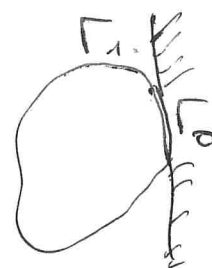
$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{Dirichlet} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{Neumann} \end{array} \right. \quad \text{conductivité...}$$

• Mécanique des fluides Stokes ou Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{vitesse} \\ p: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{pression} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u + \nabla p = f, \quad x \in \Omega \\ \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

• Élasticité $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ petit déplacement d'un solide (élastique homogène isotrope)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_j \partial_j (\sigma_{ij}(u)) = f_i \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \sum_j \sigma_{ij} \nu_j = g_i \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$



$$\sigma_{ij}(u) = \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij}$$

II
a) Déf
m > 0

Rapels sur les Sobolev

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 < \infty \right\}$$

$(H^m, \|\cdot\|_{H^m})$ est un espace de Hilbert

• plus généralement $W^{m,p} = \left\{ u \in L^p \mid \partial^\alpha u \in L^p \right\}$ est un espace de Banach pour la norme naturelle

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ cf. Prigres; Evans; Taylor...
 $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha \mid |\alpha| \leq m$

• Avec la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$$

Prop. : $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ~~bijection~~ bijection continue $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$
 $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ isométrie bijective $\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$
 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ bijection continue
 $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}u \quad \forall u \in \mathcal{S}'$
 $\mathcal{F}(x^\beta u) = i^{|\beta|} \partial_\xi^\beta (\mathcal{F}u) \quad \forall u \in \mathcal{S}'$

Prop. : $H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}' \mid (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$
 $\|\cdot\|$ et $\|(1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{u}\|_{L^2}$ est une norme équivalente

b) Résultats de densité :

Prop. 1 : $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ et $W^{m,p}$ $p < +\infty$
 $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$, $p < +\infty$

Rem. : C_c^∞ n'est pas dense dans L^∞

$C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ $m > 0$

Def. : $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\text{Norm}_{W^{m,p}}} \quad (H_0^m \text{ pour } p=2)$

Def. (ouvert lisse régulier), Ω ouvert lisse, on dit que Ω est de classe C^k si $\exists$ un recouvrement $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ tel que

avec $U_i \subset \subset \Omega$

et $\phi_i: U_i \rightarrow V_i$ difféo C^k et $V_i \subset B(0,1)$

$$\phi_i(U_i \cap \Omega) = \mathbb{R}_+^n \cap B(0,1)$$

$$\phi_i(U_i \cap \partial\Omega) = \mathbb{R}_+^{n-1} \times \{0\} \cap B(0,1)$$

Rem. Les ouverts Lipschitziens ont aussi de bonnes propriétés mais dans ce cas la notion utile est :

$\forall x_0 \in \partial\Omega \exists$ un système de coordonnées $x = (x', x_n)$ et $V = V' \times]a_n, b_n[/ \sqrt{|\Omega|} x / x_n > \phi(x)$
 avec ∂ Lipschitz $V \cap \Gamma = \{x / x_n = \phi(x')\}$

Th: $\bigcup_{\Omega} C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$ $p < +\infty$ 2/
 Ω avec bordé Lipschitz

Dém: dans le cas C^1 $\Omega \subset \Omega_0 \cup \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$
 $\exists$ partition de l'unité $1 = \sum_{i=0}^k \varphi_i$ sur un voisinage de Ω
 avec $\text{Supp } \varphi_i \subset \subset \Omega_i$

$$u = \varphi_0 u + \sum_{i=1}^k \varphi_i u$$

$\varphi_0 u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\text{Supp } \varphi_0 u \subset \subset \Omega$
 si on pose $\widetilde{\varphi_0 u} = \begin{cases} \varphi_0 u, & x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $\widetilde{\varphi_0 u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

donc $\exists u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on peut choisir $\text{Supp } u_m \subset \subset \Omega$
 $u_m \rightarrow \widetilde{\varphi_0 u}$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et donc $W^{1,p}(\Omega)$

$u_i = \varphi_i u$ $v_i = (\varphi_i u)(\phi_i^{-1}(x))$ v_i est définie sur $B(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$
 et $\text{supp } v_i = \phi_i(\text{supp } u_i) \subset \subset \frac{B(0,1)}{\cap \mathbb{R}_+^n}$
 $\widetilde{v_i}$ prolongement par 0 hors de la boule,
 $\widetilde{v_i} \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \dots$

c) Traces

Th Ω bordé Lipschitz: $\exists \gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) (L^2(\Gamma))$
 (de trace) $\parallel$ linéaire C^0 / $\gamma u(x) = u(x)$ si $x \in \Gamma = \partial\Omega \quad \forall u \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$
 (on peut prendre $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sum_i \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}$)

Idee: grâce à la densité, il suffit de montrer la inégalité
 - partition de l'unité + changement de variable,
 on se ramène à $\mathbb{R}_+^n$

Dém dans le cas de $\mathbb{R}_+^n$: On veut montrer:
 $\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n) \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', 0)|^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x', x_n)|^2 dx' dx_n$

Facile avec Fourier:

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', 0)|^2 dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi \quad \text{Fourier / } x_1, \dots, x_{N-1}$$

On remarque $|\hat{u}(\xi, 0)|^2 = - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial}{\partial x_N} |\hat{u}(\xi, x_N)|^2 dx_N$

$$= -2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_N} \cdot \hat{u} dx_N d\xi$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi &= -2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_N} \cdot \hat{u} dx_N d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_N} \right|^2 dx_N d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} |\hat{u}(\xi, x_N)|^2 dx_N d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \| \nabla u \|_{L^2} \| u \|_{L^2} \end{aligned}$$

Application : iff

Prop : Ω ouvert borné - Lip $u, v \in H^1(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} \partial_i u v = - \int_{\Omega} u \partial_i v + \int_{\Gamma} u v \gamma_i n_i ds$$

(avec $\int_{\Gamma}$ définie par contour locale $\int_{\Gamma} u ds = \int_{\Gamma} v(y) |Dy| dy$ dans une carte)

Dém : Si Ω est C^1 vrai $\forall u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ (formule de Stokes)

$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \partial_i u v + \int_{\Omega} u \partial_i v$ est bilinéaire C^0 sur $H^1(\Omega) \times H^1$

$H^1 \times H^1$ $(u, v) \mapsto \int_{\Gamma} u v \gamma_i n_i ds$ est bilinéaire C^0 par le th de trace

donc les 2 applications coïncident sur $H^1 \times H^1$ par densité

d) L'espace $H_0^1(\Omega)$

3/

Prop: Si $u \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{u}$ (ie prolongé par 0) $\in H^1(\mathbb{R}^n)$

Dém: $u_n \rightarrow u$ $H^1(\Omega)$ $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \langle \partial_i \tilde{u}_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} &= - \langle \tilde{u}_n, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \\ &= - \langle u_n, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \langle \partial_i u_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \partial_i(\tilde{u}_n) = \widetilde{\partial_i u_n} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \partial_i(\tilde{u}_n) & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{\partial_i u_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_i \tilde{u} & & \widetilde{\partial_i u} \end{array}$$

Th: (caractérisation de la trace) $H_0^1(\Omega) = \text{Ker } \gamma$
 Si Ω est Lip

Dém: • facile car de la trace
 • On traite le cas de $\mathbb{R}_+^n$

Soit $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n) / \gamma u = 0$

Soit $\tilde{u} = u$ prolongé par 0, alors $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$
 • le seul cas non trivial est de montrer que $\partial_n \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \partial_n \tilde{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} &= - \langle \tilde{u}, \partial_n \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{u}(x) \partial_n \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{u}(x) \partial_n \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_n u(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} \gamma u \varphi(x, 0) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_n u(x) \varphi(x) dx \quad \text{car par def de } u \\ &= \langle \partial_n u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

donc $\partial_n \tilde{u} = \widetilde{\partial_n u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

• Soit $h > 0$, on pose $\tau_h \tilde{u} = \tilde{u}(x', x_n - h)$ $\tau_h \tilde{u} = 0$ si $x_n \leq h$

Soit ρ_ε approximation de l'unité à support compact

$$\rho_\varepsilon * \tau_h \tilde{u} \in C^\infty \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit} = 0 \quad \text{pour } \varepsilon \leq \frac{h}{2}$$

$$\text{donc } \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\rho_\varepsilon * \tau_h \tilde{u} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_h \tilde{u} \text{ dans } H^1 \quad \tau_h \tilde{u} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \tilde{u} \text{ dans } H^1$$

d) Injecteurs de Sobolev

Th 1: $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$ si $mp > n$
ou borné Lip

Dém. • Cas $p=2$ facile en Fourier

• Cas général on utilise une version raffinée avec des espaces de Morrey plus loin

Th 2: $mp < n \quad W^{m,p} \hookrightarrow L^q \quad q = \frac{np}{n-mp} (= p^*)$
ou borné Lip sur $\mathbb{R}^n$

Rem. On peut se ramener à $\mathbb{R}^n$ en utilisant un opérateur de balayage P

e) Compacité des injections

Th (Rellich) Ω borné - Lip $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte

Rem. borné crucial, faux pour $\mathbb{R}^n$

Dém. u_n bornée dans H^1 , on veut $\exists$ sous suite $u_n \rightarrow u$ dans L^2
 H^1 Hilbert $\exists u \in H^1$
 $u_n \rightharpoonup u$ L^2
 $\partial_\alpha u_n \rightharpoonup \partial_\alpha u$ L^2

Soit P l'opérateur de balayage (on peut très supposer que $\exists R > 0$ $\text{Supp } P u \subset B(0, R) \forall u$)

Soit $v_n = P u_n$ v_n est bornée dans H^1 donc $v_n \rightharpoonup v$ H^1 facile

$\forall n \quad \|v_n - v\|_{L^2}^2 \leq \int_{|\xi| \leq M} |\widehat{v_n}(\xi) - \widehat{v}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > M} |\widehat{v_n}(\xi) - \widehat{v}(\xi)|^2 d\xi$
 $\leq \frac{1}{M^2} \|v_n - v\|_{H^1}^2$

Suit $\varepsilon > 0$ Comme v_n est bornée dans H^1 4/

$$\exists \eta > 0 \quad \int_{|\xi| > \eta} |\hat{v}_n(\xi) - \hat{v}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour le premier terme (η est fixé)

$$\begin{aligned} \hat{v}_n(\xi) - \hat{v}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (v_n - v)(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (v_n - v)(x) \underbrace{e^{-ix \cdot \xi}}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)} dx \end{aligned}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$ p.u.c.v. faible

donc $\forall \xi \quad \hat{v}_n(\xi) - \hat{v}(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

de plus $|\hat{v}_n(\xi) - \hat{v}(\xi)| \leq R^{1/2} \underbrace{\|v_n - v\|_{L^2}}_{\text{borné indep de } n} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Par convergence dominée $\int_{|\xi| \leq \eta} |\hat{v}_n(\xi) - \hat{v}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

III Solution faible

1) Pb de Dirichlet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) + cu = f, & x \in \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$A: \Omega \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donne's
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

On va toujours supposer $A \in L^\infty$ et $A \geq \alpha \operatorname{Id}$
 i.e $\exists \alpha > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad A \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$

Def: On dit que u est solution faible si
 $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} cuv = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Rem: Raisonnable: sol forte et faible, sol faible régulier $\Rightarrow$ classique

Th. $A \in L^\infty$, $A \geq \alpha \text{Id}$, $c \in L^\infty$, $c \geq 0$ ($c \geq c_0 > 0$ si Ω n'est pas borné)
 || alors $\exists ! u \in H_0^1$ solution faible

Dém. Lax Milgram

Lemme. H Hilbert $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire C^0
 $\ell: H \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire C^0
 || a coercive: $\exists \alpha > 0$ $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$
 Alors $\exists ! u \in H$ / $a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H$

Lemme (Inégalité de Poincaré) Ω bornée:
 $\exists C > 0$ / $\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2} \leq C \|Du\|_{L^2}$

2) Problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Def. solution faible : $\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} Du \cdot Dv + \int_{\Omega} cuv = \int_{\Omega} fv + \int_{\partial\Omega} gv \end{cases}$

Rem i) régulière $\Rightarrow$ faible

ii) faible + régulière $\Rightarrow$ classique

Th. || $\forall f \in L^2(\Omega)$, $\forall g \in L^2(\partial\Omega)$ $\exists ! u \in H^1(\Omega)$
 || solution faible

Dém. Lax - Milgram

Rem 1) $c \geq c_0 > 0$ important même si Ω est borné
 Si $c = 0$ les constantes sont solutions

2) Sens de la trace i.e sens de $\frac{\partial u}{\partial n} = g$
 par une fonction H^1 $\frac{\partial u}{\partial n} / \partial\Omega$ n'est pas défini au sens précédent

On a une trace en un sens plus faible :

5/

Cas $\mathbb{R}_+^N$ par l'équation $\partial_N(\partial_N u) = -\Delta_{\mathbb{R}^{N-1}} u(\cdot, x_N) + f$
 $u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^{N-1}))$ donc $\Delta_{\mathbb{R}^{N-1}} u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^{N-1}))$,
 $f \in L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^{N-1}))$ donc $\partial_N(\partial_N u) \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^{N-1}))$,
clairement $\partial_N u \in L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^{N-1})) \subset L^2(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^{N-1}))$
donc on peut définir une trace pour $\partial_N u \in \cancel{H^{-1}(\mathbb{R}^{N-1})}$
car $\partial_N u \in H^1(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^{N-1}))$

3) Problème de Dirichlet non homogène, Ω borné régulier

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad \begin{matrix} f \in L^2(\Omega) \\ g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \end{matrix} \text{ données}$$

Def : on dit que u est solution faible si :

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) & / & \gamma u = g \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v & \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Rem : u est solution au sens des distrib et vérifie la condition au bord au sens des traces

Th. $\forall f \in L^2, \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \exists ! u$ solution faible de (*)

Rem : unicité : $w = u_1 - u_2$ vérifie $w \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donc $w \equiv 0$ (unicité pour le problème homogène)

• Existence :

Lemme (Relèvement de la trace)

$$\begin{cases} \exists R : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \text{ linéaire } C^0 / \\ \gamma \circ R = \text{Id} /_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \end{cases}$$

avec le lemme, on cherche $u = Rg + w$ avec $w \in H_0^1(\Omega)$

on a bien $\gamma u = g$

$$\text{et } w / \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

L'existence de w : cas homogène

Dém du Lemme : cartes locales $\Rightarrow$ on trace $\mathbb{R}_+^n$
on définit $\widehat{Rg}(\xi, x_n) = \widehat{g}(\xi) e^{-(1+|\xi|)x_n}$, $x_n > 0$
 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned} \|Rg\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}^2 &= 2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi|)^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 e^{-2(1+|\xi|)x_n} d\xi dx_n \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi|) |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \end{aligned}$$

IV Régularité des solutions faibles: cache L^2

4/

Th 1 (Régularité à l'intérieur)

si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie $-\operatorname{div}(A \nabla u) + u = f$ dans $D'(\Omega)$
avec $f \in L^2(\Omega)$ alors $\forall \omega \subset\subset \Omega, u \in H^2(\omega)$
 $a_{ij} \in \operatorname{Lip}(\overline{\Omega})$

Rem: pas d'hypothèse sur le bord du domaine ou les CL de u

• vrai pour $-\operatorname{div}(A \nabla u) + cu$ avec $c \in L^{\frac{2n}{n+2}}$
→ il suffit de mettre $c-1$ au membre de droite

Dém Par compacité, il suffit de traiter le cas $\omega = B_r(x_0) \subset \Omega$
avec r suffisamment petit à choisir

on fixe $\chi_r \in C_c^\infty(\Omega)$ / • $\chi_r \equiv 1$ sur $B_r(x_0)$
• $\operatorname{Supp} \chi_r \subset \overline{B_{2r}(x_0)} \subset \Omega$

(χ_r sous la forme $\chi(\frac{x-x_0}{r}$)

on étudie $v = \widetilde{\chi_r u}$ (prolongement par 0 hors de Ω)

on a: • $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$

• v vérifie $-\widetilde{a_{ij}} \partial_{ij} v + Mv = h$ dans $D'(\Omega)$

avec $\widetilde{a_{ij}} = \widetilde{\chi_{2r} a_{ij}}$, $\operatorname{Supp} v \subset \overline{B_{2r}(x_0)}$

$$h = \chi_r \left(f - \partial_i a_{ij} \partial_j v \right) + \widetilde{a_{ij}} \partial_{ij} \chi_r v + \widetilde{a_{ij}} \partial_i \chi_r \partial_j v + \widetilde{a_{ij}} \partial_j \chi_r \partial_i v + (1-\chi_r) v$$

$\in L^2(\Omega)$ car $a_{ij} \in \operatorname{Lip}(\overline{\Omega})$
• $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$

on pose $A_0 = -a_{ij}(x_0) \partial_{ij} + M : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$B = -[\widetilde{a_{ij}}(x) - a_{ij}(x_0)] \chi_{2r}(x) \partial_{ij} : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$$A = A_0 + B$$

$v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ vérifie $A_0 v + Bv = h$, $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Lemme 1: $\forall h \in L^2(\mathbb{R}^n) \exists ! w \in H^1(\mathbb{R}^n) / A_0 w + Bw = h$
~~soit assg petit~~ si Γ assg grand

dém: Lax Milgram

Lemme 2: $A_0: H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme ($\forall \Gamma$)

dém: Faisons $A_0 u + \Gamma u = h \Leftrightarrow [a_{ij}(\mathbf{x}_0) \xi_i \xi_j + \Gamma] \hat{u}(\xi) = \hat{h}(\xi)$

$$\Leftrightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{h}(\xi)}{a_{ij}(\mathbf{x}_0) \xi_i \xi_j + \Gamma}$$

$$(1 + B^2) |\hat{u}(\xi)| \lesssim |\hat{h}(\xi)| \quad \text{donc } u \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

Lemme 3: $A: H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme

dém $A = A_0 + B = (\text{Id} + BA_0^{-1}) A_0$

~~$\|BA_0^{-1}\|$~~ $\|BA_0^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C\Gamma$ car $a_{ij} \in \text{Lip}(\mathbb{R})$
 donc par r'assg petit $\text{Id} + BA_0^{-1}$ est inversible

Conclusion Par lemme 3 $\exists ! w \in H^2(\mathbb{R}^n) / Aw = h$

Par lemme 1 $w = v$ donc $v \in H^2$

Rem on peut aussi utiliser la même méthode que ci-dessus

Th 2 (Régularité au bord), mêmes hypothèses sur a_{ij}
 Si Ω est C^2 $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$
 $u \in H_0^1(\Omega)$

on traite d'abord $\Omega = \mathbb{R}_+^n$

Idee Si $\int_{\Omega} (A \nabla u \cdot \nabla v + uv) = \int_{\Omega} f v$

On prend $v = \partial_{x_i} u$ avec $i = 1, \dots, n-1$

si u régulier $\partial_{x_i} u|_{\partial\Omega} = 0$

après opp $\int_{\Omega} [A \nabla \partial_{x_i} u \cdot \nabla \partial_{x_i} u + (\partial_{x_i} u)^2] dx = \int_{\Omega} f \partial_{x_i} u - \int_{\Omega} \partial_{x_i} A \nabla u \cdot \nabla \partial_{x_i} u$

$$\Rightarrow \alpha \|\nabla \partial_i u\|_{L^2}^2 \lesssim \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} + \|a\|_{L^q} \|u\|_{L^2} \|\nabla \partial_i u\|_{L^2} \quad 2/$$

$\rightarrow$ estimation de $\|\nabla \partial_i u\|_{L^2}$, $i = 1, \dots, N-1$

Il manque $\partial_N^2 u$, on utilise l'équation

Pl: $\nabla \partial_N u \notin H_0^1(\Omega)$ donc pas une fonction test admissible
on utilise des quotients différentiels (Nirenberg)

Def: $T_\lambda^h u = \frac{u(x + h e_i) - u(x)}{h}$, $i = 1, \dots, N-1$
 $u \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$

Lemme: i) Si $\exists C > 0 \forall h \in]0, 1[\quad \|T_\lambda^h u\|_{L^2} \leq C$
alors $\partial_N u \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$
ii) Si $\partial_N u \in L^2 \quad \exists C > 0 \quad \|T_\lambda^h u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} \quad \forall h \in]0, 1[$

Dem i) $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)$
 $\langle \partial_N u, \varphi \rangle = - \langle u, \partial_N \varphi \rangle = - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^N} u T_\lambda^h \varphi \, dx$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^N} T_\lambda^h u \, \varphi \, dx$

$(T_\lambda^h u)_h$ est borné dans $L^2 \Rightarrow \exists h_n \rightarrow 0 \quad / \quad T_\lambda^{h_n} u \rightharpoonup v \quad L^2$
dnc $\langle \partial_N u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^N} v \varphi \, dx$ par cv faible
dnc $\partial_N u = v \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$

ii) On montre $\|\nabla T_\lambda^h u\|_{L^2}$, $i = 1, \dots, N-1$ unif borné
par $h \in]0, 1[$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} F v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad F \in L^2$$

on prend $v = T_\lambda^{-h} T_\lambda^h u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla T_\lambda^{-h} T_\lambda^h u \, dx = \int_{\Omega} F T_\lambda^{-h} T_\lambda^h u \, dx$$

$$\leq \|F\|_{L^2} \|T_\lambda^{-h} T_\lambda^h u\|_{L^2}$$

$$\stackrel{ii)}{\leq} C \|F\|_{L^2} \|\nabla T_\lambda^h u\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla T_n^h T_n^h u dx &= \int_{\Omega} T_n^h (A \nabla u) \cdot \nabla T_n^h u dx \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} A \nabla T_n^h u \cdot \nabla T_n^h u}_{\geq \alpha \|\nabla T_n^h u\|_{L^2}^2} + \underbrace{\int_{\Omega} (T_n^h A) \nabla u(x + h e_i) \cdot \nabla T_n^h u dx}_{| | \leq \text{Lip} A \|\nabla u\| \|\nabla T_n^h u\|} \end{aligned}$$

$$\text{Dnc} \quad \alpha \|\nabla T_n^h u\|_{L^2} \leq \text{Lip} A \|\nabla u\|_{L^2} + C \|F\|_{L^2}$$

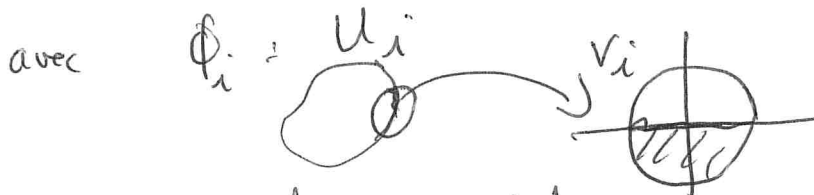
$$\text{Lemme i)} \Rightarrow \partial_n \nabla u \in L^2(\mathbb{R}_+^N) \quad i = 1, \dots, N-1$$

Il manque $\partial_N^2 u$

$$\underbrace{a_{NN}}_{\neq 0} \partial_N^2 u = - \sum_{\substack{i,j \\ (i,j) \neq (N,N)}} \underbrace{a_{ij}}_{\in L^\infty} \underbrace{\partial_i \partial_j u}_{\in L^2} - \underbrace{\partial_i a_{ij}}_{\in L^1} \underbrace{\partial_j u}_{\in L^2} + F$$

$$\text{dnc } \partial_N^2 u \in L^2$$

Cas général : on a $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$



on pose $u = u \circ \phi_i^{-1}, v = v \circ \phi_i^{-1}$

on obtient $\int_{V_i \cap \mathbb{R}_+^N} \tilde{A} \nabla u \cdot \nabla v dy = \int_{\Omega} F v dy$

avec $\tilde{A} = [D\phi_i(A \circ D\phi_i^{-1}) D\phi_i^{-1}(y)]$ $F = f \circ \phi_i^{-1} |D\phi_i^{-1}(y)|$

$\Omega \in C^{1,1} \Rightarrow \tilde{A} \in \text{Lip}, F \in L^2$, $\tilde{A}$ vérifie les mêmes hypothèses qu'avant

$\Rightarrow U \in H^2 \Rightarrow u \in H^2$ (car $\phi \in C^{1,1}$)
(résultat $\mathbb{R}_+^N$)