Séries de Fourier

- fonctions périodiques : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x$

  $F : S^1 \to \mathbb{C}$ $\quad f(t) = F(e^{it})$ $\qquad f\ C^0 \Leftrightarrow F\ C^0$

  $\simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{T}$

- Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on pose
  - $\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$
  - $S_N(f)(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{int} = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)\, e_n(t)$

- Les résultats sur la convolution sont vrai pour les fonctions périodiques : $f*g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\frac{dt}{2\pi}$

Propriété des coeff de Fourier

Lemme : i) si $f \in C^1 PM(\mathbb{T})$ $\quad |c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|}|c_n(f')|$

ii) (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ $\quad \hat{f}(n) \xrightarrow[|n| \to +\infty]{} 0$

iii) $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ $\quad \widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)$

Dém : i) ipp

ii) $C^1(\mathbb{T})$ est dense dans $L^1(\mathbb{T})$

(chapitre précédent $\Rightarrow$ $C_c^\infty(]-\pi,\pi[)$ est dense dans $L^1(-\pi,\pi)$

l'extension périodique d'une fonction de $C_c^\infty(]-\pi,\pi[) \in C^\infty(\mathbb{T})$)

iii) $$\widehat{f*g}(n) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\frac{dt}{2\pi}\, e^{-inx}\frac{dx}{2\pi} \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\frac{dt}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, e^{-inx}\frac{dx}{2\pi}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int}\frac{dt}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\frac{dy}{2\pi} = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)$$

Q :
- Pour quelles fonctions et en quel sens a-t-on $\lim_N S_N(f) = f$?
- propriétés de $f \mapsto \hat{f}$

1) Noyaux des sommes partielles

- Noyau de Dirichlet

Prop : $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$ $\quad S_N(f) = D_N * f$ avec
- $D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$
- $D_N(0) = 2N+1$

Dém : $$S_N(f) = \sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\frac{dt}{2\pi}\, e^{inx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)}\frac{dt}{2\pi}$$

$$\sum_{-N}^{N} e^{ins} = e^{-iNs}\sum_{0}^{2N} e^{ins} = e^{-iNs}\frac{e^{i(2N+1)s}-1}{e^{is}-1} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}$$

Prop du noyau : i) D_N est pair, $\int_{\mathbb{T}} D_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$

ii) $\|D_N\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \operatorname{Log} N + O(1)$

i) $\int_{\mathbb{T}} D_N = \int \sum_{-N}^{N} e^{int} \dots$

ii) $\|D_N\|_{L^1} = 2\int_0^\pi \left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right| dx$, clairement $\frac{2x}{\pi 2} \leq \sin\frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}$

donc $c_2 \int_0^\pi \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x} \leq \|D_N\|_{L^1} \leq c_1 \int_0^\pi \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x} dx$

et $\int_0^\pi \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x} dx \underset{N\to+\infty}{\sim} \operatorname{Log} N$

$$\int_0^\pi \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x} dx = \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy + \int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin y|}{y} dy$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y+k\pi} dy + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y+N\pi} dy$$

$$\frac{2}{(k+1)\pi} \leq \int_0^\pi \frac{\sin y}{y+k\pi} dy \leq \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \sin y\, dy = \frac{2}{k\pi} \Rightarrow \frac{c_2}{2}\operatorname{Log} N \leq \|D_N\|_{L^1} \leq c_1 \operatorname{Log} N$$

Amélioration : on remarque d'abord $\left|\sin(nt+\frac{t}{2}) - \sin nt\right| \leq 2\sin\frac{t}{4} \quad \forall t \in [0,\pi]$

$$\left(|\ \ | \leq |e^{int+i\frac{t}{2}} - e^{int}| \leq |e^{i\frac{t}{2}} - 1| = 2\sin\frac{t}{4}\right)$$

donc $\|D_N\|_{L^1} = 2\int_0^\pi \frac{|\sin Nt|}{\sin\frac{t}{2}} \frac{dt}{2\pi} + O(1)$

$s \mapsto \frac{1}{\sin\frac{s}{2}} - \frac{2}{s}$ se prolonge par continuité sur $[0,\pi]$

donc $\|D_N\|_{L^1} = 4\int_0^\pi \frac{|\sin Nt|}{t}\frac{dt}{2\pi} + \underbrace{2\int_0^\pi |\sin Nt| \left[\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right] dt}_{= O(1)} + O(1)$

par le calcul précédent

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_1^N \frac{1}{k} \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin Nt|}{t} \leq \frac{4}{\pi^2}\sum_1^{N-1}\frac{1}{k}$$

donc $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin Nt|}{t} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2} \operatorname{Log} N$

• Noyau et somme de Féjer

On pose $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$

Prop : • $\sigma_N(f) = K_N * f$ avec $K_N = \sum_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2$

et $\|K_N\|_{L^1} = 1$, $K_N \geq 0$, $\int_{\delta < |x| < \pi} K_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ $\forall \delta \in]0, \pi[$

(donc K_N est une approximation de l'unité

Dém : • $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{-n}^{n} e_k = \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N-1} e_k \sum_{|k| \leq n \leq N-1} = \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N-1} e_k (N - |k|)$

$= \sum_{|k| \leq N-1} e_k \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) = \sum_{|k| \leq N} e_k \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)$

• $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{N} \operatorname{Im} \sum_{0}^{N-1} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{N \sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1}\right)$

$= \frac{1}{N \sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{iNx}{2}} \frac{e^{\frac{iNx}{2}} - e^{-\frac{iNx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}\right) = \frac{1}{N} \frac{\left(\sin \frac{Nx}{2}\right)^2}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}$

• $K_N \geq 0$ clair ; $\int_{\mathbb{T}} K_N = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} \int D_N = 1$

si $\delta \leq |x| \leq \pi$ $\sin^2 \frac{x}{2} \geq \sin^2 \frac{\delta}{2}$ donc $0 \leq K_N(x) \leq \frac{1}{N \sin^2 \frac{\delta}{2}}$

2) théorèmes de convergence

Th (Féjer) • Si $f \in C(\mathbb{T})$ $\|\sigma_N(f) - f\|_{L^\infty} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

• Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ $1 \leq p < +\infty$ $\|\sigma_N(f) - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Dém. cf th sur les approximations de l'unité grâce aux prop du noyau de Féjer

Corollaire i) Si $f \in C(\mathbb{T})$ $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell$ alors $\ell = f(x_0)$

ii) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ $\hat{f}(n) = 0$ $\forall n$ alors $f = 0$ pp

iii) $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une BON de $L^2(\mathbb{T})$

et donc • $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_{L^2}^2$

• $\|S_N(f) - f\|_{L^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

iv) Si $f \in C(\mathbb{T})$ et f est C^1 par morceaux, alors $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e_n$ avec convergence normale

Dém : i) Si $S_N(f)(x_0) \to \ell$, Césaro $\Rightarrow \sigma_N(f)(x_0) \to \ell$

Par Féjer $\sigma_N(f)(x_0) \to f(x_0)$ donc $\ell = f(x_0)$

ii) $S_N(f) = 0$ donc, $\sigma_N(f) = 0$ $\quad \sigma_N(f) \to f$ dans L^1 par Féjer

iii) Féjer $\Rightarrow$ les polynomes trigo sont denses dans $C(\mathbb{T})$ par la norme $\|\cdot\|_\infty$ et donc aussi pour la norme L^2

$C(\mathbb{T})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$

ensuite conséquences de la théorie générale des espaces de Hilbert

iv) $|c_n(f)| \le \underbrace{\frac{1}{|n|}}_{\in \ell^2} \underbrace{|c_n(f')|}_{\in \ell^2} \in \ell^1$ donc convergence normale

· Convergence ponctuelle, th de Dirichlet

th Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, $x_0 \in \mathbb{T}$, si

a) $\lim_{t \to 0^+} f(x_0+t) = f^+$, $\lim_{t \to 0^-} f(x_0+t) = f^-$

b) $\exists \delta > 0$ $\displaystyle\int_0^\delta \left|\frac{f(x_0+t)-f^+}{t}\right| dt < +\infty$, $\displaystyle\int_0^\delta \left|\frac{f(x_0-t)-f^-}{t}\right| dt < +\infty$

Alors $\lim_N S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

Rem : les hypothèses sont vérifiées si f est dérivable à droite et à gauche en x_0, en particulier si f est C^1 par morceaux

Dém · On peut se ramener à $x_0 = 0$ par translation

$$S_N(f)(0) - \frac{1}{2}(f^+ + f^-) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\, D_N(t) - \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$$

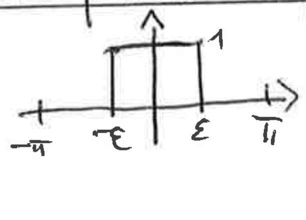
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(f(t) + f(-t) - f^+ - f^-\right) D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} h(t) \sin\left(\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right) dt \quad \text{avec } h(t) = \frac{f(t)+f(-t)-f^+-f^-}{\sin\frac{t}{2}}$$

Comme $\frac{2}{\pi} t \le \sin t \le t$ $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, on a ii) $\Rightarrow h \in L^1(\mathbb{T})$

Par Riemann-Lebesgue $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^{\pi} h(t) \sin\left(\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right) dt = 0$

Ex classiques de développement :

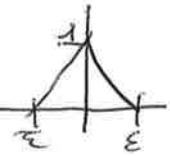


$0 < \varepsilon \le \pi$

$$c_n = \frac{\sin n\varepsilon}{n\pi} \quad \text{si } n \neq 0$$
$$= \frac{\varepsilon}{\pi} \quad \text{si } n = 0$$

avec Dirichlet $\frac{\pi - 2\varepsilon}{2} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\varepsilon)}{n}$

$\forall \varepsilon \in]0, \pi[$



$\Delta_\varepsilon(t) = 1 - \frac{|t|}{\varepsilon}$, $c_n = \frac{1 - \cos n\varepsilon}{n^2 \pi \varepsilon}$

$\Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

<u>Rem</u>: régularité de $f \Leftrightarrow$ décroissance des c_n

$f \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$

3) Propriétés de $f \to (\hat{f}(n))_n$

<u>Prop</u>: Soit $\mathcal{F} : f \to \hat{f}(n)$

- $\mathcal{F} : L^2 \to \ell^2(\mathbb{Z})$ isomorphisme (déjà vu)
- $\mathcal{F} : L^1 \to c_0$ est C^0 injective pas un isomorphisme (isomorphisme de Banach)

<u>Dém</u> Si $\mathcal{F}$ est inversible $\mathcal{F}^{-1}$ est C^0

$\Rightarrow \exists C > 0$ / $\|\mathcal{F} f\|_{\ell^\infty} \geqslant \frac{1}{C} \|f\|_{L^1}$

Pour $f = D_N$ $\|\mathcal{F} f\|_{\ell^\infty} = 1$ $\|D_N\|_{L^1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$

<u>Application de Banach - Steinhaus</u>

<u>Th</u> E Banach, F evn, $(\varphi_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E, F)$

alors soit $\forall i \in I$ $\sup_i \|\varphi_i\| \leqslant M$

soit $\{x \in E / \sup_i \|\varphi_i(x)\| = +\infty\}$ est dense dans E

<u>Corollaire 1</u>: $\{f \in C(\mathbb{T})$ / $S_N(f)(0)$ est divergente $\}$ est dense dans $C(\mathbb{T})$

<u>Dém</u>: $\ell_n : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$

$f \mapsto \ell_n(f) = S_n(f)(0) = D_n * f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-s) D_n(s) ds$

$|\ell_n(f)| \leqslant \|D_n\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty}$

Soit $f_\varepsilon(t) = \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon \in C(\mathbb{T})$

$\ell_n(f_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \|D_n\|_{L^1}$ $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq 1$ donc $\|\ell_n\| = \|D_n\|_{L^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Corollaire 2 i) $S_N(f) \to f$ dans L^p $\forall f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$

$\Updownarrow$

ii) $\sup_N \|S_N(f)\|_{L^p} < +\infty$ $\forall f \in L^p$

Dém i) $\Rightarrow$ ii) clair

ii) $\Rightarrow$ i) Par Banach-Steinhauss $M = \sup_N \|S_N\|_{L^p \to L^p} < +\infty$

$$\|S_N(f) - f\|_{L^p} = \|S_N(f - \sigma_N(f)) + \underbrace{S_N(\sigma_N(f))}_{= \sigma_N(f)} - f\|_{L^p}$$

$$\leq M \|f - \sigma_N(f)\|_{L^p} + \|\sigma_N(f) - f\|_{L^p} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Rem ii) $\Leftrightarrow$ $\sup_N \|S_N\|_{L^p \to L^p} < +\infty$

Applications : Si $p = 1$ ou $p = +\infty$ $\exists f \in L^p$ / $\|S_N(f) - f\|_{L^p} \underset{N \to +\infty}{\not\to} 0$

Dém : • $\|S_N\|_{L^\infty \to L^\infty} \geq \sup_{\|f\|_{L^\infty} \leq 1} |S_N(f)(0)| \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ vu avant

• $\|S_N\|_{L^1 \to L^1}$: $\forall M$ $\|S_N\|_{L^1 \to L^1} \geq \|D_N * K_M\|_{L^1} \xrightarrow[M \to +\infty]{} \|D_N\|_{L^1}$

donc $\|S_N\|_{L^1 \to L^1} = \|D_N\|_{L^1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$

Rem : Si $1 < p < +\infty$, on a bien $S_N(f) \xrightarrow[N \to +\infty]{} f$ dans L^p

preuve "élémentaire" due à Bochner

4) Lien avec la transformée de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ on pose $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$

Th Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ /

• $\exists M > 0$, $\alpha > 1$ / $\forall x \in \mathbb{R}$ $|F(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

• $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty$

Alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} F(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n)$ (formule sommatoire de Poisson)

Dém : Soit $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x+2\pi n)$

série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$

- $f \in C^0$
- f est 2π-périodique :

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-imt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(t+2\pi n)\, e^{-imt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{-imu}\, du = \frac{1}{2\pi}\hat{F}(m)$$

donc $f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{imx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(m)\, e^{imx}$ et on prend en $x=0$

$$\| \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x+2\pi n)$$

Application

Soit $m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ / $\check{m} \in L^1(\mathbb{R})$ (donc $m \in L^\infty(\mathbb{R})$)

Soit T_m : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow$ {fonctions mesurables}

$f \longmapsto T_m(f) = \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f})$

Prop : T_m se prolonge en une application linéaire $L^p \to L^p$, $\forall 1 \leq p \leq +\infty$

et $\|T_m\|_{L^p \to L^p} \leq \|\check{m}\|_{L^1}$

Dém : $T_m(f) = \check{m} * f$

Cas discret on pose $T_m(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m(n)\hat{f}(n)\, e^{inx}$

(m comme avant, $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\check{m} \in L^1(\mathbb{R})$)

Prop Si $\check{m} \in L^1(\mathbb{R})$: T_m se prolonge en une application linéaire C^0 $L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$

$\|T_m\|_{L^p \to L^p} \leq \|\check{m}\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Dém : On a $T_m(f) = K * f$ avec $K(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m(n)\, e^{inx}$

Par la formule sommatoire de Poisson :

en posant $F(y) = m\left(\frac{y}{2\pi}\right) e^{\frac{iy x}{2\pi}}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{m e_y}(n)$$

$$\widehat{m e_y}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iny}\, m\left(\frac{y}{2\pi}\right) e^{i\frac{y}{2\pi}x}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-iz(2\pi n - x)} m(z)\, dz$$

$$= 2\pi\, \check{m}(x - 2\pi n)$$

donc $K(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \check{m}(x - 2\pi n)$

$$\|K\|_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant \|\check{m}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

__Ex__ : En particulier pour $m(\xi) = \varphi(\varepsilon\xi)$ $\quad \varepsilon > 0$

$$\check{m}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\check{\varphi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \|\check{m}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\check{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Donc la borne est indépendante de ε

Soit χ ~~[illegible]~~ / $\chi = 1$ sur $[-1, 1]$ $\quad$ Supp $\chi \subset [-2, 2]$

on pose $T_N^{\chi}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi\left(\frac{n}{N}\right) \hat{f}(n) e^{inx}$

__Rem__ : $S_N = T_N^{\chi}$ avec $\chi = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ $\qquad \check{\chi} = \frac{\sin x}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$

$\sigma_N = T_N^{\chi}$ avec $\chi = (1 - |x|)_+$ $\qquad \check{\chi} = -2\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right) \in L^1(\mathbb{R})$

c'est mieux avec des troncatures plus régulières...

__Th__ || Si $\check{\chi} \in L^1(\mathbb{R})$ $\qquad T_N^{\chi}(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f \quad \forall f \in L^p \quad 1 \leq p < +\infty$

pour $p = +\infty$ il faut des fonctions C^0

__Dém__ $T_N^{\chi} f = K_N * f$ avec $K_N(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{-1}\left(\chi\left(\frac{\cdot}{N}\right)\right)(x + 2\pi n)$

On peut utiliser le critère précédent :

$$M = \sup_N \|T_N^\alpha\|_{L^p \to L^p} < +\infty$$

$$T_N^\alpha(\sigma_N(f)) = \sigma_N(f)$$

ou preuve directe

$\boxed{\text{Compléments sur les } L^p}$

$\mathbb{R}^N$, mesure de Lebesgue

1) interpolation réelle

Th : Soit T linéaire /

i). $T : L^1 \to \{\text{fonctions mesurables}\}$ et $\exists c_1 > 0$ $\forall f \in L^1$ $|\{|Tf| \geq \alpha\}| \leqslant \frac{c_1}{\alpha} \|f\|_{L^1}$

$1 < p \leq +\infty$ ii). $T : L^p \to L^p$ est C^0 $\exists C_2 > 0 / \forall f \in L^p$ $\|Tf\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{L^p}$

alors $T : L^q \to L^q$ est C^0 $\forall q \in]1, p[$

Rem : $T : L^1 \to L^1$ $C^0 \Rightarrow$ i) (Tchebychev)

si $T : L^1 \to L^1$ C^0, $L^p \to L^p$ C^0 $\Rightarrow$ $T : L^q \to L^q$ C^0 peut aussi s'obtenir par Riesz - Thorin

. il y a des versions plus générales : L^p différents au départ et à l'arrivée ...

Dém : . Si $f \in L^q$ $\quad f = \underbrace{f 1\!\!1_{|f| \leq 1}}_{\in L^p} + \underbrace{f 1\!\!1_{|f| \geq 1}}_{\in L^1}$ donc Tf est bien défini

. $\|Tf\|_{L^q}^q = q \int_0^{+\infty} |\{|Tf| \geq t\}| \, t^{q-1} \, dt$

$\forall t > 0$ on décompose $f = f 1\!\!1_{|f| \leq t} + f 1\!\!1_{|f| \geq t} = f_1 + f_2$

$$|\{|Tf| \geq t\}| \leqslant |\{|Tf_2| \geq \tfrac{t}{2}\}| + |\{|Tf_1| \geq \tfrac{t}{2}\}| \quad \text{car } |Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2|$$

$$\leqslant \frac{2C_1}{t} \|f_2\|_{L^1} + \left(\frac{2}{t}\right)^p \|Tf_1\|_{L^p}^p$$

$$\leqslant \frac{2C_1}{t} \|f_2\|_{L^1} + \left(\frac{2}{t}\right)^p C_2^p \|f_1\|_{L^p}^p$$

$$\|Tf\|_{L^q}^q \leq q \int_0^{+\infty} 2C_1 t^{q-2} \int_{\mathbb{R}^N} |f| 1\!\!1_{|f| \geq t} \, dx \, dt + q \int_0^{+\infty} C_2^p \left(\frac{2}{t}\right)^p t^{q-1} \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p 1\!\!1_{|f| \leq t}$$

$$\leqslant q \, 2C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{|f(x)|} t^{q-2} \, dt \, |f(x)| \, dx + q \, C_2^p 2^p \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|f(x)|}^{+\infty} t^{q-1-p} dt \, |f(x)|^p dx$$

$$\leq \frac{2C_1 q}{q-1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^q dx + \frac{2^p C_2^p q}{p-q} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx$$

Rem. Ex faire le cas $p = +\infty$

Rem On n'a pas utilisé que $f \to Tf$ est linéaire mais seulement que $|T(f_1+f_2)| \leq |Tf_1| + |Tf_2|$, cela suffit pour avoir i) ii) $\Rightarrow$ $\|Tf\|_{L^q}^q \leq C \|f\|_{L^q}^q$

2) Fonctions maximale

Def : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on pose $Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy$

Prop
- $x \mapsto Mf(x)$ est mesurable (sup de fonctions mesurables)
- $M(f_1+f_2) \leq Mf_1 + Mf_2$

Th : $\exists C>0 \,/\, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\forall \alpha>0$ $|Mf \geq \alpha| \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Dém : Lemme (Vitali) Soit $(B_i)_{i\in I}$ une collection finie de boules alors $\exists$ une sous famille $(B_{i_j})_{j\in J}$ finie de boules disjointes telle que $\left|\bigcup_i B_i\right| \leq 3^d \sum_{j\in J} |B_{i_j}|$

avec le lemme :

On utilise $|Mf \geq \alpha| = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset \{Mf \geq \alpha\}}} |K|$

Soit $K \subset \{Mf \geq \alpha\}$ compact

- $\forall x \in K$ $\exists r>0$ $\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy \geq \frac{\alpha}{2}$
- K est recouvert par $\{B_{r(x)}(x)\}_{x\in K}$ avec $r(x)$ comme ci-dessus

par le lemme $\exists B_{r_1}(x_1), \dots, B_{r_N}(x_N)$ disjointes

$$|K| \leq 3^d \sum_{i=1}^N |B_{r_i}(x_i)|$$

Comme $|B_{r_i}(x_i)| \leq \frac{2}{\alpha} \int_{B_{r_i}(x_i)} |f(y)| dy$, $|K| \leq 3^d \times \frac{2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy$.
(les boules sont disjointes)

Dem du lemme :

- rem préliminaire : soit $B_{r_1}(x_1)$, $B_{r_2}(x_2)$ avec $r_2 \leq r_1$ et $B_{r_2}(x_2) \cap B_{r_1}(x_1) \neq \phi$ alors $B_{r_2}(x_2) \subset B_{3r_1}(x_1)$

- Soit B_{i_1} une boule de rayon maximal, on enlève toutes les boules / $B_{j_1} \cap B_{i_1} \neq \phi$, ces boules sont incluses dans $B_{3r_{i_1}}(x_{i_1})$
- parmi les boules restantes, on prend B_{i_2} une boule de rayon maximale et on enlève toutes les boules qui intersectent
- Le procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'étape

Par construction : • Les B_{i_j} sont disjointes
• toute boule B_i est • soit l'une des B_{ij}
• soit incluse dans $B_{3r_{i_j}}(x_{i_j})$

donc $\left| \bigcup_i B_i \right| \leq 3^d \sum_j |B_{i_j}|$

Corollaire 1 Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Dém : clairement si $f \in L^\infty$ $Mf \in L^\infty$ et on utilise le th d'interpolation

Corollaire 2 Points de Lebesgue : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

pp $x \in \mathbb{R}^d$ $\lim\limits_{r \to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy = f(x)$

en particulier, si $d = 1$ $\lim\limits_{r \to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(y)\, dy = f(x)$

• on a le même résultat avec $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)\,dy$ en prenant une fonction maximale disymétrique

Dém : Soit $\mathcal{C} = \{ f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\lim\limits_{r \to 0} \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy = f(x)$ p.p $x \}$

Etape 1

on a : $\mathcal{C}$ est fermé dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

En effet soit f_k / $f_k \to f$ dans L^1 et soit

$$E_\lambda = \left\{ x \,/\, \varlimsup_{r \to 0} \left| \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy - f(x) \right| \geq \lambda \right\}$$

$$\frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y)dy - f(x) = \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} (f(y) - f_k(y))dy + \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} f_k(y) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)$$

donc $\left| \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r} f - f(x) \right| \leqslant M(f-f_k)(x) + |f_k(x)-f(x)| + \left|\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r} f_k(y) - f(x)\right|$

donc ~~...~~

pp x $\overline{\lim_{r \to 0}} \left| \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} f - f(x) \right| \leq M(f-f_k)(x) + |f_k(x)-f(x)|$

puisque $\frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r} f_k(y) - f(x) \to 0$ pp x

donc $|E_\lambda| \leqslant |M(f-f_k) \geqslant \frac{\lambda}{2}| + ||f_k - f| \geqslant \frac{\lambda}{2}|$

$\leqslant \frac{2C}{\lambda} \|f-f_k\|_{L^1} + \frac{2}{\lambda} \|f_k - f\|_{L^1}$

Fonctions maximales + Tchebychev

$\leqslant \frac{C_0}{\lambda} \|f-f_k\|_{L^1} \qquad \forall k$

$\|f-f_k\|_{L^1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \implies |E_\lambda| = 0 \qquad \forall \lambda$

Donc $\overline{\lim_{r \to 0}} \left| \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r} f(y)\,dy - f(x) \right| \leqslant \lambda \qquad \forall x \in E_\lambda^C$ avec $|E_\lambda| = 0$

Soit $\lambda_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad E = \bigcup E_{\lambda_n}, \quad |E| = 0$

et $\forall x \in E^C \quad \overline{\lim_{r \to 0}} \left| \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(y)} f(y) - f(x) \right| = 0$

Etape 2 conclusion . $\mathcal{C}$ est fermé dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

. $\mathcal{C}$ est dense puisque $\mathcal{C}$ contient $C_c^0(\mathbb{R}^d)$

donc $\mathcal{C} = L^1(\mathbb{R}^d)$

Rem : . ça marche pareil sur $\mathbb{T}$. en intersectant avec $[-\pi, \pi]$

. ~~...~~

3) Application aux séries de Fourier

CV pp des séries de Fourier :

si $f \in L^p(\mathbb{T})$ $p \in]1, +\infty[$ $S_N(f) \to f$ pp (dur)

plus facile : si $f \in L^1(\mathbb{T})$ $\sigma_N(f) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f$ pp ?

On sait déjà $\sigma_N(f) \to f$ dans L^1 donc $\exists$ une sous suite /

$\sigma_{N_k}(f) \to f$ pp

Th si $f \in L^1(\mathbb{T})$ $\sigma_N(f) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f$ pp

$\sigma_N(f) = K_N * f$

préliminaire : liens entre fonctions maximales

On pose • $\mathcal{L}_h(t) = \frac{1}{2h} \mathbb{1}_{[-h,h]}(t)$ étendue 2π périodique

• $f^*(t) = \sup_{h > 0} |\mathcal{L}_h * f(t)|$

$\mathcal{L}_h * f(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(s)\, ds$ donc $f^*(t) \leqslant Mf(t)$

Lemme1: Soit $k \in L^1(\mathbb{T})$, $k \geqslant 0$, k pair : $k(-t) = k(t)$ $\forall t$, /
k décroissant sur $[0,\pi]$, (k C^0 C^1 PM)
Alors $|k * f(t)| \leqslant \|k\|_{L^1} f^*(t) \leqslant \|k\|_{L^1} Mf(t)$

Dém : On a : $k(t) = k(|t|) = k(\pi) - \int_{|t|}^{\pi} k'(h)\, dh$

$= k(\pi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2h \mathcal{L}_h(t) k'(h)\, dh$ car $2h \mathcal{L}_h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $k * f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} k(s) f(t-s) \frac{ds}{2\pi}$

$= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{ds}{2\pi}\, k(\pi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2h (\mathcal{L}_h * f)(t)\, k'(h) dh$

donc

$|k * f(t)| \underset{k' \leq 0}{\leqslant} |k(\pi)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{ds}{2\pi} \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2h\, f^*(t)\, k'(h)\, dh$

$\underset{\text{C pp}}{\leqslant} |k(\pi)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{ds}{2\pi} \right| - \frac{1}{2\pi} \left[2h k(h) \right]_0^{\pi} f^*(t) + \frac{f^*(t)}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 k(h)\, dh$

$\leqslant |k(\pi)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{ds}{2\pi} \right| - k(\pi) f^*(t) + f^*(t) \|k\|_{L^1}$

car $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(s) k \frac{ds}{2\pi}\right| = \left| L_{2\pi} * f(t)\right| \leqslant f^*(t) \quad \forall t$ et $\int_0^{\pi} k(s)\frac{ds}{2\pi} = \frac{\|k\|_{L^1}}{2}$

$\leqslant f^*(t)\, \|k\|_{L^1}$

<u>Dém du th</u> : $\sigma_N(f) = K_N * f$ avec $K_N = \frac{1}{N}\frac{\left(\sin\frac{Nt}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}$

K_N n'est pas décroissant sur $[0,\pi]$

Mais $K_N(t) \leqslant k_N(t)$ avec $k_N(t) = \frac{1}{N}\begin{cases} N^2 & \text{si } |t| \leq \frac{\pi}{N} \\ \frac{\pi^2}{t^2} & \text{si } \frac{\pi}{N} \leq |t| \leq \pi \end{cases}$

On utilise . $\sin N\theta \leq N \sin\theta$ $\quad \left(\left|\frac{\sin N\theta}{\sin\theta}\right| = \left|\sum_0^{N-1} e^{2ikt}\right| \right)$

. $\sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{\pi}$

k_N est $\geqslant 0$, pair $\downarrow$ et $\|k_N\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi - \frac{2\pi}{N}\right) \leq 2$

en utilisant le lemme, on a

$|\sigma_N(f)|(t) \leqslant k_N * |f|(t) \leqslant 2\, |f|^*(t) = 2Mf(t)$

Soit $F^*(f)(t) = \sup_N |\sigma_N(f)|(t)$

$F^*(f)(t) \leqslant 2Mf(t)$

Donc pour F^*, on a aussi
~~donc~~ $\forall \alpha > 0$, $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$
$|F^* \geqslant \alpha| \leqslant \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1}$

On pose alors $\mathcal{C} = \{ f \in L^1(\mathbb{T}) \;/\; \sigma_N(f)(t) \to f(t) \text{ pp} \}$

. $\mathcal{C}$ contient les fonctions C^0, donc dense
. $\mathcal{C}$ est fermé
$\Longrightarrow \mathcal{C} = L^1(\mathbb{T})$

Pour montrer que $\mathcal{C}$ est fermé si $f_k \to f$ dans $L^1(\mathbb{T})$

On pose $E_\lambda = \{ x \in \mathbb{T} \,/\, \limsup_N |\sigma_N(f)(x) - f(x)| \geq \lambda \}$

$$|E_\lambda| \leq |f^*(f - f_k) \geq \tfrac{\lambda}{2}| + ||f - f_k| \geq \tfrac{\lambda}{2}|$$
$$\leq \frac{c}{\lambda} \|f - f_k\|_{L^1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

donc $|E_\lambda| = 0 \ \forall \lambda$, on prend $\lambda = \frac{1}{n}$ ...

$\boxed{\text{Séries Aléatoires}}$

$(c_n)_n \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow f = \sum_n c_n e^{inx} \in L^2(\mathbb{T})$

On considère $f_\omega(x) = \sum_n \varepsilon_n(\omega) c_n e^{inx}$ ε_n Bernoulli indep

<u>Lemme</u> : i) $\exists \alpha > 0$ $\mathbb{P}\left(\left|\sum_n \varepsilon_n c_n\right| > \lambda \right) \leq 2 e^{-\frac{\alpha \lambda^2}{\|c\|_{\ell^2}^2}}$ $\forall \lambda$

ii) $\left\| \sum_n \varepsilon_n c_n \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c\sqrt{p} \, \|c_n\|_{\ell^2}$

<u>Dém</u> $\int_\Omega \exp\left(t \sum_n \varepsilon_n c_n\right) dP = \prod_n \int e^{t \varepsilon_n c_n} dP$

$$= \prod_n \left(\frac{e^{tc_n} + e^{-tc_n}}{2} \right) \leq \prod_n e^{\frac{t^2 c_n^2}{2}}$$

(En utilisant $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\leq e^{\frac{t^2}{2} \|c_n\|_{\ell^2}^2}$$

donc $e^{\frac{t^2}{2} \|c_n\|_{\ell^2}^2} \geq P\left(\sum_n \varepsilon_n c_n \geq \lambda \right) e^{t\lambda}$

donc $P\left(\sum_n \varepsilon_n c_n \geq \lambda \right) \leq e^{\frac{t^2}{2} \|c_n\|_{\ell^2}^2} e^{-t\lambda}$

on optimise avec $t = \frac{\lambda}{\|c_n\|_{\ell^2}^2}$

en changeant c_n en $-c_n$ on a aussi

$$P\left(\sum_n \varepsilon_n c_n \leq -\lambda \right) \leq e^{\frac{-\lambda^2}{2 \|c_n\|_{\ell^2}^2}}$$

$\Rightarrow$ OK si les c_n sont réels sinon $c_n = c_n^r + i c_n^i$ ...

Finalement $\| \sum_n \varepsilon_n c_n \|^p_{L^p(\Omega)}$

$$= p \int_0^{+\infty} P\left(\left| \sum_n \varepsilon_n c_n \right| \geq \lambda \right) \lambda^{p-1} \, d\lambda$$

$$\leq C_p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} e^{\frac{-\lambda^2}{2\|c_n\|^2}} \, d\lambda$$

$$\leq C_p \|c_n\|^p_{\ell^2} \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} e^{-\lambda^2} \, d\lambda$$

<u>Corollaire</u> pp $\omega \in \Omega$ $f_\omega \in L^p(\mathbb{T})$

<u>dem</u> $\| \, \|f_\omega\|_{L^p(\mathbb{T})} \|^p_{L^p(\Omega)} < +\infty$

en effet $\| \, \|f_\omega\|_{L^p(\mathbb{T})} \|^p_{L^p(\Omega)}$

$$= \int_{\mathbb{T}} \int_{\Omega} \left| \sum_n c_n \varepsilon_n e^{inx} \right|^p dP \, dx$$

et on utilise le lemme précédent