

Intégration et probabilités, USTC - 2026

Nom de l'étudiant: Chloé

8 mars 2026

TD2 : Tribu

- Question 1.** (a) Est-ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu ?
- (b) Montrer qu'une intersection quelconque de tribus est une tribu, mais qu'une union de tribus n'est pas forcément une tribu.
- (c) Pour chaque entier n , soit $\mathcal{F}_n$ la tribu de $\mathbb{N}$ engendrée par l'ensemble $\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}$. Montrer que $(\mathcal{F}_n)$ est une suite croissante de tribus mais que $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Solution 1.

- (a) Non. Parce que ce n'est pas stable par prise du complémentaire. ok
- (b) Soit E est un ensemble. Une intersection quelconque de tribus sur E contient E , est stable par prise du complémentaire et par union dénombrable. Donc elle est une tribu par définition. Pour $E = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1\}^c, E\}$, $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{2\}, \{2\}^c, E\}$, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ n'est pas une tribu. ok
- (c) Comme une tribu est stable par union dénombrable et par prise du complémentaire, on a $\mathcal{F}_n = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \subset \{0, 1, \dots, n\} \text{ ou } A^c \subset \{0, 1, \dots, n\}\}$, alors $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, donc $(\mathcal{F}_n)$ est une suite croissante de tribus. $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ contient tout nombre pair mais ne contient pas $2\mathbb{N}$, c-à-d elle n'est pas stable par union dénombrable, donc elle n'est pas une tribu. ok

- Question 2.** (a) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur E et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur B .
- (b) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, soit F un ensemble et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer par un contre-exemple que la classe des images directes $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas en général une tribu sur F .

Solution 2.

- (a) On prend $A=E$, alors $\mathcal{F}_B$ contient B . $(A \cap B)^c \cap B = A^c \cap B$, comme $\mathcal{F}$ est stable par prise du complémentaire, $\mathcal{F}_B$ l'est aussi. $\bigcup_n (\mathcal{A}_n \cap B) = (\bigcup_n \mathcal{A}_n) \cap B$, comme $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable, $\mathcal{F}_B$ l'est aussi. Par définition, $\mathcal{F}_B$ est une tribu sur B . ok

(b) On prend l'exemple du solution 7.

ok

Question 3. Donner des conditions sur l'ensemble E pour que les classes suivantes soient des tribus :

- (a) $\{\emptyset, \{x\}, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
- (b) $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
- (c) La classe des singletons de E .
- (d) La classe des parties finies de E .
- (e) La classe des parties dénombrables de E .
- (f) La classe des parties finies ou cofinies de E . (On dit qu'une partie est cofinie si son complémentaire est fini).
- (g) La classe des parties dénombrables ou codénombrables de E . (On dit qu'une partie est codénombrable si son complémentaire est dénombrable).

Solution 3.

(a) E est un singleton.

ok

(b) C'est la tribu engendréepar x , donc E est quelconque.

(c) E n'existe pas parce que $\emptyset$ n'est pas singleton.

ok

(d) E est fini parce que une tribu doit être stable par union dénombrable et contenir E .

ok

(e) E est dénombrable de la même raison du (d).

ok

(f) E est fini. Elle contient E et elle est stable par prise du complémentaire. Donc il suffit qu'elle est stable par union dénombrable.

mieux expliquer pourquoi
 E doit être fini

(g) E est quelconque par définition.

ok, mais explication pas claire.

Question 4. Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit E un ensemble et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur E . Pour tout $x \in E$, on introduit l'atome de x relativement à la tribu $\mathcal{A}$ par :

$$\dot{x} := \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ x \in A}} A.$$

- (a) Montrer que les atomes forment une partition de E .
- (b) Montrer que si la tribu $\mathcal{A}$ est dénombrable alors elle contient tous les atomes et que tout élément de $\mathcal{A}$ peut être obtenu comme une union dénombrable d'atomes.
- (c) En déduire que si $\mathcal{A}$ est dénombrable alors $\mathcal{A}$ est finie.

Solution 4.

argument à revoir

(a) E est l'union de les atomes. Il suffit de montrer que les atomes ne s'intersectent pas 2 à 2. Si $y \in \dot{x}$, par définition, $\dot{x} \subset \dot{y}$. Comme $x \in \dot{x}$, on ~~na~~ $x \in \dot{y}$, alors $\dot{x} = \dot{y}$. Donc pour $\dot{x} \neq \dot{y}$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x \in A$ mais $y \notin A$. Si $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$, on ~~na~~ $z \in \dot{x}$, alors $z \in A$. Mais $z \in \dot{y}$, alors $z \notin A$. C'est une contradiction.

(b) Si $\mathcal{A}$ est dénombrable, $\dot{x}$ est engendré par intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable, elle contient $\dot{x}$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on a toujours $A \subset \bigcup_{x \in A} \dot{x}$. Pour $y \in \bigcup_{x \in A} \dot{x}$, il existe $x \in A$ tel que $y \in \dot{x}$. Comme $\dot{x} \in \mathcal{A}$, $\dot{y} \subset \dot{x}$, alors $\dot{y} = \dot{x}$. Par (a), $y = x \in A$. Donc $A = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$. $\mathcal{A}$ est dénombrable, donc A est une union dénombrable d'atomes.

ok

(c) Si $\mathcal{A}$ est dénombrable, par (a) et (b), E est l'union dénombrable d'atomes. Soit A infinie, A contient atomes dénombrables. Une tribu est stable par union dénombrable, donc elle contient au moins $2^{\mathbb{N}}$ d'éléments. Mais $2^{\mathbb{N}}$ est indénombrable, c'est une contradiction.

Question 5. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E; \quad f(x) \geq n\}, \quad B_{n,i} = \{x \in E; \quad i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n}\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose

$$f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbf{1}_{B_{n,i}} + n \mathbf{1}_{A_n}.$$

Soit $x \in E$ fixé. Que dire de la suite $f_n(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$?

Solution 5.

Si $f(x) = +\infty$, $f_n(x) = n$ pour tout n . Alors $f_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Si $f(x) \in \mathbb{R}_+$, quand n est assez grand, il existe i tel que $f_n(x) = \frac{i}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{i+1}{2^n} = f_n(x) + \frac{1}{2^n}$, c-à-d $f(x) - \frac{1}{2^n} \leq f_n(x) \leq f(x)$. Donc $f_n(x) \rightarrow f(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

En conclusion, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

ok

Question 6. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E , et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Alexandra dit : alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-elle raison ?

Solution 6. Oui. Il suffit de montrer que

$$\mathcal{G} := \bigcup_{\mathcal{D} \subset \mathcal{C}, \mathcal{D} \text{ dénombrable}} \sigma(\mathcal{D})$$

est une tribu.

On prend $\mathcal{D} = \emptyset$, alors $E \in \mathcal{G}$.

Si $A \in \mathcal{G}$, il existe $\mathcal{D}$ dénombrable tel que $A \in \sigma(\mathcal{D})$, alors $A^c \in \sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{G}$.

Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$, il existe $(\mathcal{D}_n)$ respectivement. On prend $\mathcal{D}_\infty := \bigcup_n \mathcal{D}_n$, c'est une famille dénombrable. Pour tout n , $A_n \in \sigma(\mathcal{D}_n) \subset \sigma(\mathcal{D}_\infty)$, donc $\bigcup_n A_n \in \sigma(\mathcal{D}_\infty) \subset \mathcal{G}$. Par définition, $\mathcal{G}$ est une tribu. ok

Question 7. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \rightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble

$$\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$$

est-il une tribu ?

Solution 7. Non. On prend $X = Y = \{1, 2\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \{(1, 1)\}, \{(1, 1)\}^c, X \times Y\}$, alors $\mathcal{F}_X = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Par Question 3 (a), ce n'est pas une tribu. ok