

Intégration et probabilités, USTC - 2026

Nom de l'étudiant: Edgar

5 mars 2026

TD1 : Limites d'ensembles

Question 1 (Ensembles dénombrables). *On rappelle qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une application injective $i : E \rightarrow \mathbb{N}$. Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables, en exhibant une application injective correspondante :*

- (a) $E = \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
- (b) $E = \mathbb{N}^2$. Indication : on pourra représenter les points de $\mathbb{N}^2$ par un réseau dans $\mathbb{R}^2$.
- (c) $E = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs. Indication : on pourra se servir de la question précédente.
- (d) L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Solution 1. (a) On a une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -2n - 1, & n < 0 \end{cases} \quad \text{ok (justifier un peu l'injection)}$$

(b) On a une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$:

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n \quad \text{justifier l'injection}$$

(c) On a une injection de $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ à $\mathbb{N}^2$:

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$$

où $p \wedge q = 1$. Alors $\pi \circ g$ est une injection de $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ à $\mathbb{N}$. comme composée de 2 injections

(d) Pour chaque point x_0 de discontinuité de f , on va montrer que $f(x_{0+}) := \lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x)$ et $f(x_{0-}) := \lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x)$ existent.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante avec $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Alors car f est

croissante, $f(x_n)$ est décroissante et bornée. Alors $f(x_{0+}) := \lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x)$ les x_n n'apparaissent plus ici?

existe. Il est **trivial** pour montrer qu'elle est bien défini. On peut montrer le cas $f(x_{0-})$ de la même façon.

Alors car x_0 est un point de discontinuité de f , on a $f(x_{0+}) \neq f(x_{0-})$, donc il existe un nombre rationnel $q(x_0)$ dans $f(x_{0+})$ et $f(x_{0-})$.

On va montrer que q est injectif. S'il existe x_1 et x_2 satisfaisant $x_1 < x_2$ et $q(x_1) = q(x_2)$, alors $f(x_{1+}) > q(x_1) = q(x_2) > f(x_{2-})$. Contradiction avec la croissance de f ! Alors q est injectif. Donc q est **ok** une injection des points de discontinuité de f à $\mathbb{Q}$. On a une injection de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{N}^2$ comme (a) et (c) :

$$g'\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} (2p, q), & p \geq 0 \\ (-2p - 1, q), & p < 0 \end{cases}$$

où $p \wedge q = 1$ et $q > 0$. Alors $\pi \circ g' \circ q$ est une injection des points de discontinuité de f à $\mathbb{N}$. **notation problématique**

Question 2 (lim sup et lim inf de suites). Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels, on pose

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

- (a) Montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, en autorisant les valeurs d'adhérence infinies.
- (b) Vérifier que $(a_n)_n$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

- (c) Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une autre suite de réels. Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

A-t-on toujours $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$?

Solution 2. (a) Il suffit de montrer le cas de $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Si la limite est infinie alors pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{k \geq N} a_k \geq 2M$ (Propriété de limite). Alors il existe $k_0 \geq N$ tel que $a_{k_0} \geq M$ (Propriété de sup). Donc ∞ est une valeur d'adhérence. Elle est (sûrement) la plus grande. **ok**

Si la limite est fini (on la note a), alors pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{k \geq N} a_k \leq a + \epsilon$ (Propriété de limite). Alors il existe $k_0 \geq N$ tel que $a - \epsilon < a_{k_0} \leq a + \epsilon$ (Propriété de sup). Donc a est une

valeur d'adhérence. Pour chaque a' avec $a' > a$. On prend $\epsilon = \frac{a'-a}{2}$, et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{k \geq N} a_k \leq a + \epsilon = \frac{a+a'}{2}$. Alors il n'existe pas un $a_k (k \geq N)$ avec $\frac{a+a'}{2} = a' - \epsilon < a_k < a' + \epsilon$, donc a' n'est pas une valeur d'adhérence et a est la plus grande valeur d'adhérence. ok

(b) $\Rightarrow$: Supposons que (a_n) converge vers ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Cas 1 : $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon.$$

Alors pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k \leq \ell + \varepsilon.$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\ell - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \ell + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell. \quad \text{ok}$$

Cas 2 : $\ell = +\infty$. Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n > M$. Alors pour tout $n \geq N$,

$$\inf_{k \geq n} a_k > M \quad \text{et} \quad \sup_{k \geq n} a_k > M. \quad \text{ok}$$

En passant à la limite, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. ok

Cas 3 : $\ell = -\infty$. De même, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $a_n < M$, donc

$$\sup_{k \geq n} a_k < M \quad \text{et} \quad \inf_{k \geq n} a_k < M, \quad \text{ok}$$

d'où $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$.

Cas 1 : $\ell \in \mathbb{R}$. Notons $i_n = \inf_{k \geq n} a_k$ et $s_n = \sup_{k \geq n} a_k$. On a $i_n \leq a_n \leq s_n$ pour tout n , et par hypothèse $i_n \rightarrow \ell$, $s_n \rightarrow \ell$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon < i_n \leq a_n \leq s_n < \ell + \varepsilon.$$

Donc $|a_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq N$, i.e. $a_n \rightarrow \ell$. ok

Cas 2 : $\ell = +\infty$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Par définition, pour tout M , il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\inf_{k \geq n} a_k > M$, donc en particulier $a_n > M$ pour tout $n \geq N$. Donc $a_n \rightarrow +\infty$. ok

Cas 3 : $\ell = -\infty$. Alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Pour tout M , il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_{k \geq n} a_k < M$, donc $a_n < M$ pour tout $n \geq N$. Donc $a_n \rightarrow -\infty$. ok

Dans tous les cas, (a_n) converge vers ℓ .

(c) Pour tout $n \geq 0$, on a l'inégalité suivante sur les bornes supérieures :

$$\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k. \quad \text{justifier}$$

Alors on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

L'égalité n'est pas toujours vraie. Prenons $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^{n+1}$. Alors ok

$$\limsup a_n = 1, \quad \limsup b_n = 1, \quad a_n + b_n = 0 \text{ pour tout } n,$$

donc $\limsup (a_n + b_n) = 0$. On a $0 \leq 1 + 1 = 2$, mais l'égalité est fausse. ok

Question 3. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors

$$f(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad f(\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Que dire si f est décroissante ?

Solution 3.

$$\begin{aligned} f(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sup_{k > n} x_k\right) \quad (\text{continuité}) \quad \text{ok} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} f(x_k) \quad (\text{croissance et continuité}) \quad \text{ok} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{ok} \end{aligned}$$

Si f est décroissante, on a

$$\begin{aligned} f(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sup_{k > n} x_k\right) \quad (\text{continuité}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k > n} f(x_k) \quad (\text{décroissance et continuité}) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{ok} \end{aligned}$$

Question 4 (Limites de suites d'ensembles). On considère un ensemble E , et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E . Si $A \subset E$, on note $\mathbf{1}_A$ sa fonction caractéristique. On définit les deux ensembles

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

- (a) Décrire "en mots" les propriétés caractéristiques des éléments de $\bigcap_n A_n$ et $\bigcup_n A_n$, puis "en mots" les propriétés caractéristiques des éléments de $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.
- (b) Exprimer les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{\liminf A_n}$ et $\mathbf{1}_{\limsup A_n}$ en fonction des fonctions $\{\mathbf{1}_{A_n}, n \geq 1\}$.
- (c) Montrer que $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.
- (d) Montrer qu'on a toujours $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Dans le cas où les deux ensembles coïncident, on les appelle $\lim A_n$.
- (e) À partir d'ici, $E = \mathbb{R}$. Montrer que la suite $A_n = [-\frac{1}{n}, 1]$ admet une limite, et calculer cette limite. Faire de même pour $A'_n =]-\frac{1}{n}, 1]$.
- (f) Trouver une suite A_n admettant pour limite $]0, 1]$.
- (g) Calculer la $\limsup$ et la $\liminf$ de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$, pour les ensembles

$$B_{2n-1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1], \quad B_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[, \quad n \geq 1.$$

- (h) On suppose que $a_n \rightarrow -1$ et $b_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ces convergences impliquent-elles que $[a_n, b_n]$ a une limite quand $n \rightarrow \infty$?

Solution 4. (a) $\bigcap_n A_n$ est l'ensemble des éléments dans A qui est contenu dans tout les A_n .

$\bigcup_n A_n$ est l'ensemble des éléments dans A qui est contenu dans n'importe quel ensemble A_n .

Ensuite, $\liminf A_n$ est l'ensemble des éléments dans A qui est contenu dans presque tout les A_n (i.e. $a \in \liminf A_n \Leftrightarrow \#\{n, a \notin A_n\} < \infty$). **ok**

$\limsup A_n$ est l'ensemble des éléments dans A qui est contenu dans un infini nombre de A_n (i.e. $a \in \limsup A_n \Leftrightarrow \#\{n, a \in A_n\} = \infty$) **ok**

- (b) On sait que $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A \cup B} = 1 - ((1 - \mathbf{1}_A) \cdot (1 - \mathbf{1}_B))$. Alors on a

$$\mathbf{1}_{\liminf A_n} = 1 - \prod_{n \geq 1} \left(1 - \prod_{k \geq n} \mathbf{1}_{A_k} \right)$$

$$\mathbf{1}_{\limsup A_n} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \prod_{k \geq n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) \right)$$

on peut obtenir des formules plus compactes en utilisant les $\backslashlimsup$ et $\backslashliminf$ des fonctions $1_{\{A_k\}}$

(c) On calcule les fonctions de caractéristique :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}_{(\liminf A_n)^c} &= 1 - \mathbf{1}_{\liminf A_n} \\
 &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \prod_{k \geq n} \mathbf{1}_{A_k} \right) \\
 \mathbf{1}_{\limsup A_n^c} &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \prod_{k \geq n} (1 - \mathbf{1}_{A_k^c}) \right) \\
 &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \prod_{k \geq n} \mathbf{1}_{A_k} \right) \\
 &= \mathbf{1}_{(\liminf A_n)^c}
 \end{aligned}$$

ok

Alors on a $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.

(d) On sait que

$$\begin{aligned}
 a \in \liminf A_n &\Leftrightarrow \#\{n, a \notin A_n\} < \infty \\
 a \in \limsup A_n &\Leftrightarrow \#\{n, a \in A_n\} = \infty
 \end{aligned}$$

On fait les calculs

$$\#\{n, a \notin A_n\} < \infty \Rightarrow \#\{n, a \in A_n\} = \infty - \#\{n, a \notin A_n\} = \infty$$

alors

$$a \in \liminf A_n \Rightarrow a \in \limsup A_n$$

donc

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n$$

ok

(e) **Pour** $A_n = [-\frac{1}{n}, 1]$: Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, alors pour tout n suffisamment grand, $-\frac{1}{n} > x$ (car $-\frac{1}{n} \rightarrow 0^-$). On a donc $x \notin A_n$ à partir d'un certain rang. Par conséquent, $x \notin \liminf A_n$ et $x \notin \limsup A_n$.
- Si $x = 0$, on a $0 \in [-\frac{1}{n}, 1]$ pour tout $n \geq 1$ car $-\frac{1}{n} \leq 0$. Donc 0 appartient à tous les A_n , donc à leur intersection et a fortiori à $\liminf A_n$.
- Si $0 < x \leq 1$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $x \geq 0 \geq -\frac{1}{n}$, donc $x \in A_n$ pour tout n . Ainsi, $x \in \liminf A_n$.
- Si $x > 1$, alors pour tout n , $x > 1$, donc $x \notin A_n$ pour tout n . Donc $x \notin \limsup A_n$.

On a donc $\liminf A_n = \limsup A_n = [0, 1]$. La limite de la suite A_n existe et vaut $\lim A_n = [0, 1]$. ok

Pour $A'_n =]-\frac{1}{n}, 1]$: Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, le raisonnement est le même que pour $A_n : x \notin \limsup A'_n$.
- Si $x = 0$, pour tout n , on a $-\frac{1}{n} < 0$, donc $0 \in A'_n$ pour tout n .
Donc $0 \in \liminf A'_n$.
- Si $0 < x \leq 1$, pour tout n , $x > 0 > -\frac{1}{n}$, donc $x \in A'_n$ pour tout n .
Donc $x \in \liminf A'_n$.
- Si $x > 1$, pour tout n , $x \notin A'_n$. Donc $x \notin \limsup A'_n$.

On a donc également $\liminf A'_n = \limsup A'_n = [0, 1]$. La limite de la suite A'_n existe aussi et vaut $\lim A'_n = [0, 1]$. ok

(f) Soit

$$A_n = \left] \frac{1}{n}, 1 \right].$$

Vérifions :

- Si $x \leq 0$, alors pour tout n , $x \leq 0 < \frac{1}{n}$, donc $x \notin A_n$. Donc $x \notin \limsup A_n$.
- Si $0 < x \leq 1$, alors il existe un rang N tel que $\frac{1}{N} < x$. Pour tout $n \geq N$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$, donc $x \in A_n$ pour tout $n \geq N$. Cela signifie que x est dans tous les A_n à partir d'un certain rang, donc $x \in \liminf A_n$.
- Si $x > 1$, alors pour tout n , $x > 1$, donc $x \notin A_n$. Donc $x \notin \limsup A_n$.

On a donc $\liminf A_n = \limsup A_n =]0, 1]$. D'où $\lim A_n =]0, 1]$. ok

(g) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **Si** $x < -2$: Pour n pair (B_{2n}), on a $B_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[$, donc $x \notin B_{2n}$ pour tout n pair car $x < -2 < -1$. Pour n impair (B_{2n-1}), on a $B_{2n-1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1]$. Puisque $x < -2$, pour n assez grand, $-2 - \frac{1}{n} > x$? Non, si $x = -3$, $-2 - \frac{1}{n}$ est environ -2 , donc x n'y est pas non plus. En fait, pour tout n , $x < -2 - \frac{1}{n}$ (car $x < -2$ et $-2 - \frac{1}{n} > -2$). Donc x n'appartient à aucun B_n . Ainsi, $x \notin \limsup B_n$.
- **Si** $x = -2$: Pour n impair, $B_{2n-1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1]$. Pour tout n , $-2 > -2 - \frac{1}{n}$, donc -2 n'est pas dans B_{2n-1} car l'intervalle est ouvert en $-2 - \frac{1}{n}$. Pour n pair, $B_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[$, donc -2 n'y est pas non plus. Donc $x \notin \limsup B_n$. faux
- **Si** $-2 < x < -1$: Alors $x > -2$. Pour n impair, on a $x > -2 > -2 - \frac{1}{n}$ pour tout n , donc $x \in]-2 - \frac{1}{n}, 1]$ pour tout n impair. Pour n pair, $x < -1$, donc $x \notin [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[$ pour tout n pair. Ainsi, x appartient à une infinité de B_n (tous les impairs). Donc $x \in \limsup B_n$. Mais x n'appartient pas à tous les B_n à partir d'un certain rang, car il manque toujours les pairs. Donc $x \notin \liminf B_n$.

- **Si** $x = -1$: Pour n impair, $-1 \in]-2 - \frac{1}{n}, 1]$ pour tout n car $-1 \leq 1$ et $-1 > -2 - \frac{1}{n}$. Pour n pair, $-1 \in [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[$ car l'intervalle est fermé en -1 . Donc x appartient à tous les B_n (pairs et impairs). Donc $x \in \liminf B_n$.
- **Si** $-1 < x \leq 1$: Pour n impair, $x \leq 1$, donc $x \in B_{2n-1}$. Pour n pair, $x \geq -1$, donc $x \in B_{2n}$ pourvu que $x < 2 + \frac{1}{n^2}$, ce qui est toujours vrai. Donc x appartient à tous les B_n (pairs et impairs). Donc $x \in \liminf B_n$.
- **Si** $1 < x < 2$: Pour n impair, $x > 1$, donc $x \notin B_{2n-1}$. Pour n pair, $x \in [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[$ car $x < 2$ et l'intervalle est ouvert en $2 + \frac{1}{n^2}$ qui est > 2 . Donc x appartient à tous les B_{2n} (les pairs). Ainsi, x appartient à une infinité de B_n (tous les pairs), donc $x \in \limsup B_n$, mais pas à $\liminf B_n$ car il manque les impairs.
- **Si** $x \geq 2$: Soit $x \geq 2$. Pour n pair, $B_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n^2}[$. Si $x = 2$, alors $2 < 2 + \frac{1}{n^2}$ pour tout n , donc $2 \in B_{2n}$ pour tout n pair. Si $x > 2$, pour n suffisamment grand, $2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2$, donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $2 + \frac{1}{n^2} < x$. Donc $x \notin B_{2n}$ pour ces n grands. Pour n impair, $x > 1$, donc $x \notin B_{2n-1}$. Considérons $x = 2$: il appartient à tous les B_{2n} (les pairs), donc à une infinité de B_n , donc $2 \in \limsup B_n$. Pour $x > 2$, il n'appartient à aucun B_n pour n assez grand, donc $x \notin \limsup B_n$.

En résumé :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n = [-1, 1].$$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n =]-2, -1[\cup [-1, 2] \cup \{2\}$? Reprenons plus proprement :

$$\limsup B_n =]-2, 2].$$

En effet, pour $x \in]-2, -1[$, x est dans tous les impairs, donc dans $\limsup$. Pour $x \in [-1, 2]$, x est dans tous les B_n (pairs pour $x = 2$, tous pour $x \in [-1, 2[$). Donc $\limsup B_n =]-2, 2]$.

- (h) Si $a_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, alors a_n oscille autour de -1 et b_n autour de 1 . Dans ce cas, la $\liminf$ sera $] -1, 1[$ et la $\limsup$ sera $[-1, 1]$. Donc la limite n'existe pas. ok

Question 5. Soient X un ensemble non vide et une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ bornées, qui converge simplement vers $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

(a) Montrer que

$$\sup_{x \in X} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x).$$

Établir une inégalité analogue pour l'inf.

- (b) Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Montrer qu'il y a égalité si la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est uniforme.

Solution 5. (a) On a

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x) &\geq \sup_{x \in X} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) && \text{justifier cette inégalité} \\ &= \sup_{x \in X} f(x) \end{aligned}$$

en analogue, on a

$$\inf_{x \in X} f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in X} f_n(x). \quad \text{idem}$$

(b) Soit $X = \mathbb{R}$, et soit $f_n = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$. Alors f_n converge simplement vers $f(x) = 0$. Alors on a

$$\sup_{x \in X} f(x) = 0$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$$

Dans ce cas, l'inégalité est stricte.

ok

Si f_n converge uniformément, alors on a la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sup_{x \in X} f_n(x) - \sup_{x \in X} f(x) \right| = 0 \quad \text{justifier}$$

donc

$$\sup_{x \in X} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f_n(x).$$