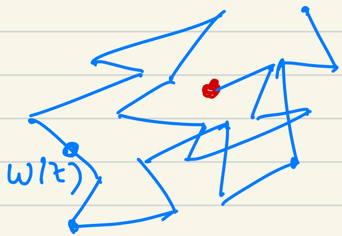
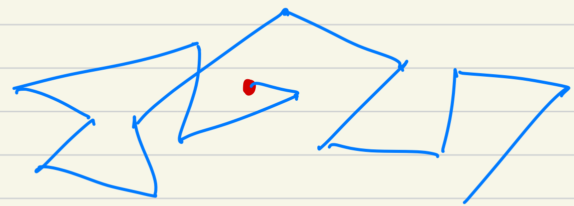
Intégration et probabilités

S. Nonnenmacher
USTC
23/04/2026

Ex de $(\Omega, \mathcal{A})$: physique statistique : étudier les trajectoires d'une petite particule soumise à des forces aléatoires.

Liquide, petite particule (grains de pollen dans l'eau).





On ne connait pas le détail des forces exercées par les molécules d'eau (H_2O) sur le grain de pollen. On connait la température de l'eau $\rightsquigarrow$ idée de la vitesse typique des molécules d'eau.

Modéliser ce phénomène de façon aléatoire.

→ définir 1 espace de probabilité : espace des trajectoires possibles. Toute trajectoire est <u>continue</u>.

$\Omega = \{$ fonctions continues $\omega : [0,1] \longrightarrow \omega(t) \in \mathbb{R}^3$

temps t

$= C\left([0,1]_t, \mathbb{R}^3\right)$.

Tribu ? L'observateur peut <u>observer</u> la particule à chaque temps $t \in [0,1]$

mesurer sa position

$$f_t : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \omega \longmapsto \omega(t) \end{array}$$

On veut $\forall t \in [0,1]$, la fonction f_t soit mesurable.

→ tribu : $\mathcal{A}$ = la plus petite tribu telle que toutes les fonctions f_t soient mesurables. $\mathcal{A} = \sigma\left(\{f_t \,;\, t \in [0,1]\}\right)$

$\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$? Compliqué à décrire (mesure sur un espace fonctionnel Ω).

ex : $\mathbb{P}$ = mesure de Wiener $\rightsquigarrow$ mouvement brownien.

Processus stochastique.

• Variable aléatoire et sa loi.

Déf : Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ est appelée une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans E.

Si $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

Si $E = \mathbb{N}$, " " aléatoire discrète.

En général, une v.a. peut être mesurée par l'expérimentateur.

Ex : X = température $\leftarrow$ continue.

= nombres de particules $\leftarrow$ discret

= pression du gaz $\leftarrow$

Ex : 1) $\Omega_2 = \{1, 2, .. 6\}^2 \longrightarrow$ v.a. discrète $X((i,j)) = i + j \in \mathbb{N}$

$$E = \{2, 3, .., 12\}.$$

2) Tirage de dés jusqu'à obtenir un 6.

$\Omega = \{1, 2, .. 6\}^{\mathbb{N}^*}$ $\qquad A_{i_1 \dots i_n} = \{\omega = i_1 i_2 \dots i_n \omega_{n+1} \omega_{n+2} \dots\}$

$\underline{X}(\omega) = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tq. } \omega_n = 6\}$. "temps d'arrêt"

prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ou $\{+\infty\} = \overline{\mathbb{N}^*}$.

espace discret

X est-elle mesurable p/r à la tribu $\mathcal{A} = \sigma(\{A_{i_1 \dots i_n}\})$?

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad X^{-1}(\{k\}) = \{\omega = \omega_1 \cdots \omega_k \, \omega_{k+1} \cdots$ telles que

$\omega_1 \neq 6, \omega_2 \neq 6, \dots \omega_{k-1} \neq 6, \omega_k = 6\}$

$$= \bigsqcup_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \neq 6} A_{i_1 \dots i_{k-1} 6} \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$-mesurables

$$X^{-1}(\{\infty\}) = \Omega \setminus \underbrace{\bigsqcup_{k \geq 1} \bigsqcup_{\dots} A_{i_1 \dots i_k, 6}}_{\text{dénombrable}} \in \mathcal{A}.$$

Application $\varphi : \Omega \longrightarrow [0,1]$

$\omega \longmapsto x = 0, \omega_1 \omega_2 \cdots$ en base 6.

$X^{-1}(\{\infty\}) = \{\omega$ qui ne contiennent pas de $6\}$

$\varphi(X^{-1}(\{\infty\})) \Rightarrow$ Ensemble de Cantor C_6 construit en retirant les intervalles $I_{i_1 \cdots i_n}$ dont un des indices est un 6.

$[0,1]$, on retire I_6, on garde $I_1, I_2, \dots I_5$
on retire $I_{16}, I_{26}, \dots, I_{56}$

$\to$ C_6 Cantor, donc il est compact, donc borélien.

$$\underbrace{X^{-1}(\{\infty\})}_{\mathcal{F}.} = \varphi^{-1}(C_6)$$

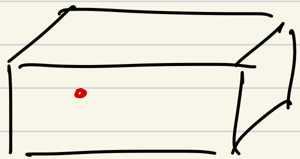
φ $\to$ mesurable et $\to \mathcal{B}([0,1])$

C_6 $\hookrightarrow$ borélien

Ex 3) particule quantique dans un boîte

Ω = boîte, ω = point de la boîte.

Variable aléatoire naturelle = position de la particule lors d'une observation.



v.a : $X(\omega) = \omega$.

$$X : (\Omega, \mathcal{B}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{B})$$
$$\omega \longmapsto \omega$$

est mesurable.

4) Particule dans 1 liquide. Variable aléatoire naturelle :

position de la particule au temps t.

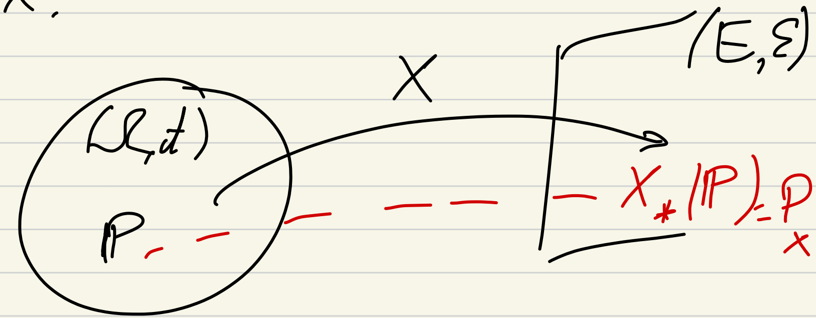
$$X_t = f_t : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \omega \longmapsto \omega(t) \end{array}.$$

Par construction de la tribu $\mathcal{C}$, ces fonctions sont mesurables, donc ce sont bien des v.a.

- $X \longrightarrow$ loi de X

<u>Déf°</u> La loi d'une v.a. X à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X.

On note $P_X = X_*(\mathbb{P})$ cette mesure de probabilité sur l'espace $(E, \mathcal{E})$.



$$\forall B \in \mathcal{E}, \quad P_X(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

$$= \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\underbrace{\{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) \in B\}}_{X \in B})$$

Cette mesure P_X contient moins d'informations que $\mathbb{P}$.

P_X permet de décrire tous les évènements qui ne dépendent que de la v.a. X, i.e. $A = X^{-1}(B)$.

P_X décrit la distribution de probabilité des valeurs de X.

- P_X décrit la loi de quantités mesurables expérimentalement
  $\Rightarrow$ en pratique, P_X est plus importante que $\mathbb{P}$.

- A partir d'une mesure de proba μ sur $(E, \mathcal{E})$ je peux fabrique un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ tels que $P_X = \mu$.

On peut prendre $\Omega = E$ $\quad \mathbb{P} = \mu$

$\mathcal{A} = \mathcal{E}$

$X(\omega) = \omega$ "v.a. tautologique".

cf. ex. 3

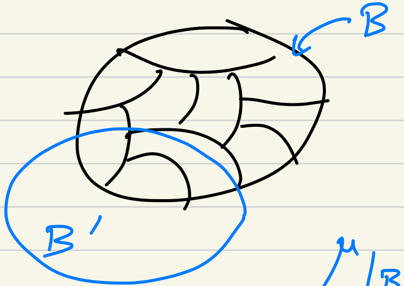
$\Rightarrow P_X = \mu$.

$\forall B \in \mathcal{E}$, on veut $\mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mu(B) \longrightarrow$ définit $\mathbb{P}$ sur $X^{-1}(\mathcal{E})$.

$X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

. $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$

Si je connais μ sur $\mathcal{B}$, puis-je étendre μ à tout $\mathcal{A}$?



$\forall B \in \mathcal{B}$, je connais $\mu(B)$.

Je veux trouver tous les $\{\mu(B\cap A)\}_{A\in\mathcal{A}}$

$\frac{\mu|_B}{\mu(B)}$ = mesure de proba sur $\underbrace{\mathcal{A}\cap B} = \mathcal{A}|_B$

atomes de $\mathcal{B}$?

Différents types de variables aléatoires.

1. V.a. discrètes $\quad E = \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

P_X = mesure de proba sur $\mathbb{N}$.

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \, \delta_n \qquad p_n = P_X(\{n\}) \in [0,1]$$

$\delta_n =$ mesure de Dirac en n.

P_X de probab. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. $\qquad p_n = \mathbb{P}(X=n)$.

$\forall B \subset \mathbb{N}$

$$P_X(B) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in B} \{n\}\right) = \sum_{n \in B} P_X(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X=n) \mathbb{1}_B(n)$$

$$\mathbb{1}_B(n) = \delta_n(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in B \\ 0 & \text{si } n \notin B \end{cases}$$

$$= \sum \mathbb{P}(X=n)\, \delta_n(B)$$

ex: Ex 2, $X =$ temps d'arret. $X(\omega) = \inf\{n \text{ tq } \omega_n = 6\}$

$\mathbb{P}$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; X^{-1}(\{k\}) = \bigsqcup_{i_1 \cdots i_{k-1} \neq 6} A_{i_1 \cdots i_{k-1} 6}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X^{-1}(\{k\})) = \sum_{i_1 \dots i_{k-1} \neq 6} \mathbb{P}(A_{i_1 \dots i_{k-1} 6}) = \dfrac{5^{k-1}}{6^k}$

$= \mathbb{P}(X=k)$

$\mathbb{P}(A_{i_1 \dots i_{k-1} 6}) = \dfrac{1}{6^k}$

5^{k-1} cas $\begin{cases} i_1 = 1 \dots 5 \\ i_2 = 1 \dots 5 \\ i_{k-1} = 1 \dots 5 \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=\infty) = 0.$$

$\updownarrow \varphi$

C_6 Cantor, $\lambda_1(C_6) = 0$.

V. a. à densité

Déf : Une $\underbrace{\text{variable aléatoire à valeurs dans } (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))}_{X \text{ v. a. vectorielle}}$ est appelée v. a. à densité si sa loi P_X est absolument continue p/r à λ_d.

Thme de Radon-Nikodym $\longrightarrow$ $\exists!$ fonction borélienne

$p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $P_X = p(x)\, d\lambda_d(x)$

$$\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad P_X(B) = \int_B p(x)\, d\lambda_d(x)$$

en particulier, $P_X(\mathbb{R}^d) = 1 = \int_{\mathbb{R}^d} p(x)\, d\lambda_d(x)$

$\Rightarrow p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$, est appelée la <u>densité</u> de (la loi de) X.

ex : $d = 1$: $\forall \alpha \leq \beta$, $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta p(x)\, dx$.

X v.a. réelle.

Rem : même lorsque $E = \mathbb{R}^d$, il y a des v.a. qui ne sont pas à densité : si P_X n'est pas a.c. p/r à λ_d.

Ex : $P_X = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2} p(x)\, d\lambda_d(x)$ n'est pas a.c. p/r à λ_d.

- ## Espérance d'1 variable aléatoire vectorielle.

$E = \mathbb{R}^d$

Déf : Soit X une v.a. réelle. On note alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Cette intégrale est bien définie si :

1) si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}[X] \in [0, +\infty]$.

2) si X est intégrable (p/r à $\mathbb{P}$), $\mathbb{E}[|X|] = \int |X|\, d\mathbb{P} < \infty$

$\Rightarrow \int X\, d\mathbb{P} \in \mathbb{R}_+$.

Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$: $X = (X_1, .., X_d)$

avec X_j des v.a. réelles. Alors

$$\mathbb{E}[X] = \left(\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \dots, \mathbb{E}[X_d]\right), \text{ existe}$$

si toutes les $\mathbb{E}[X_j]$ existent.

ex : si $X = \mathbb{1}_A$ pour $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

$\mathbb{E}[X]$ est interprétée comme la moyenne de X p/r à la loi $\mathbb{P}$.

<u>Propo</u> Soit X une v.a. dans $(E, \mathcal{E})$. Pour toute fonction mesurable $f : (E, \mathcal{E}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, la v.a. $f(X)$ a comme espérance $\mathbb{E}[f(X)] = \int_E f(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$, ne dépend que de la loi $\mathbb{P}_X$.

Preuve : si $f = \mathbb{1}_B$, pour $B \in \mathcal{E}$, on obtient

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X)] = \mathbb{P}(X \in B) = P_X(B)$$

$$= \int_E \mathbb{1}_B(x)\, dP_X(x)$$

$\rightarrow$ marche pour f étagée ≥ 0,

TCM $\rightarrow$ marche pour f mesurable ≥ 0.

<u>Rmq</u> si f change de signe, la proposition reste vraie si

$$\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty \iff f(X) \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$$

$$\iff f \in L^1(E, P_X).$$

$\rightarrow$ la loi P_X permet de décrire toutes les v.a. de la forme $f(X)$, on les appelle les v.a. <u>totalement dépendantes</u> de X

Inversement, si, pour toute fonction f "assez générale", on peut écrire $\mathbb{E}[f(X)] = \int_E f \, d\nu$ pour ν une certaine mesure de proba sur E,

alors on aura $\nu = P_X$.

<u>Propté</u> Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, supposée à densité $p(x_1, \dots, x_d)$. Alors, $\forall j = 1, \dots, d$, la loi de la v.a. réelle X_j est aussi à densité, et sa densité est donnée par

$$p_j(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} p(x_1, x_2, \dots x_{j-1}, \underline{x}, x_{j+1}, \dots x_d) \, dx_1 \dots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \dots dx_d$$

intégrale partielle le long des directions $x_1, \dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots x_d$.

La loi $P_{X_j} = p_j(x)\,dx$ est appelée une loi marginale de X.

+ général : regarder la loi de (X_1, X_2), en intégrant sur $x_3, \ldots, x_d$.

Preuve : soit π_j la projection de $\mathbb{R}^d$ vers la j-ième composante :

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_d) = x_j.$$

$\forall$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne,

$$\mathbb{E}[f(X_j)] = \mathbb{E}[f \circ \pi_j(X)] = \int f(x_j) \overbrace{p(x_1 \ldots x_d)\,dx_1 \ldots dx_d}^{dP_X(x)}$$

Fubini-T.
$$= \int f(x_j) \underbrace{\left(\int p(x_1 \ldots x_d)\,dx_1 \ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1} \ldots dx_d\right)}_{p_j(x_j)} dx_j$$

F-T $\Rightarrow$ la fonction p_j est finie λ_1-p.p, et est λ_1-intégrable.

. En utilisant la projection π_j : $\quad P_{X_j} = \pi_{j*} P_X$.

La loi globale P_X (sur $\mathbb{R}^d$) détermine, par projection, toutes les lois P_{X_j} sur $\mathbb{R}$.

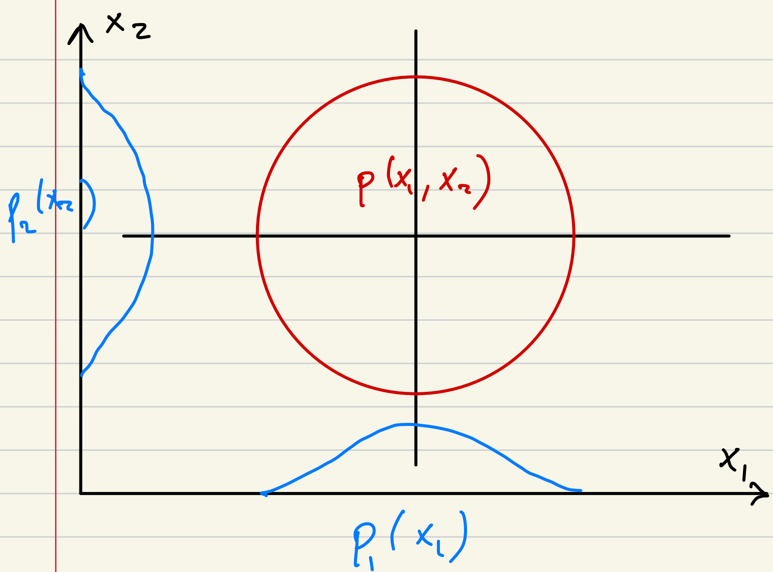
⚠ La réciproque est fausse ! Connaître les lois P_{X_j} ne suffit pas à retrouver la loi globale P_X.

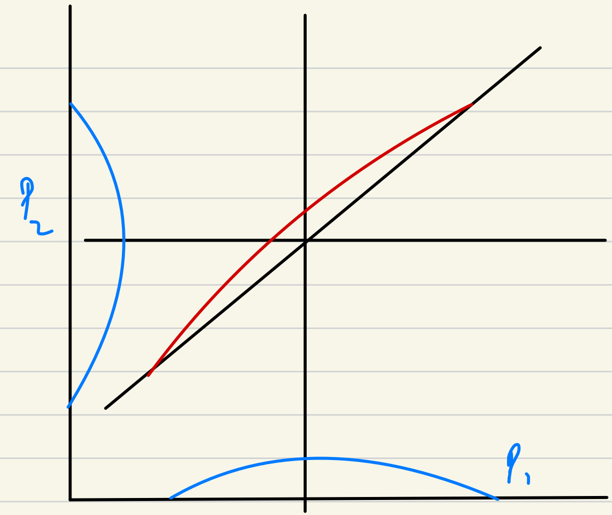
Ex : considérons une v.a. $X = (X_1, X_2)$ ayant une loi à densité $p(x_1, x_2)$ à symétrie circulaire :

$$p(x_1, x_2) = \tilde{p}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \quad \text{pour une fonc}^{\text{o}} \text{ positive } \tilde{p}.$$

→ on calcule $p_1(x_1) = \int p(x_1, x_2)\, dx_2$

la densité de la loi marginale



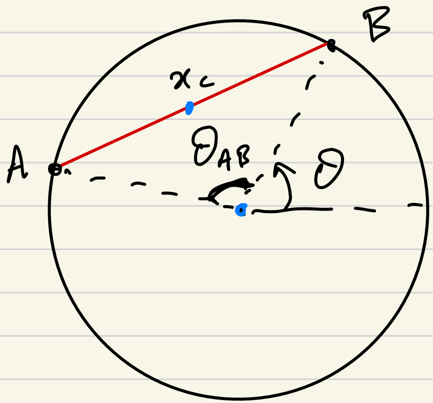


Il y a une autre loi $P_{X'}$ qui satisfait $P_{X'_1} = P_1$, $P_{X'_2} = P_2$

$$P_{X'} = p_1(x_1)\,\delta_{x_1 = x_2}$$ (pas une loi à densité sur $\mathbb{R}^2$)

Les 2 v.a. X et X' sont très $\neq$, mais on les mêmes marginales.

• "Paradoxe" de Bertrand : considérer de 2 façons différentes un phénomène aléatoire, en trouvant alors des résultats $\neq$.



S¹ cercle unité.

On choisit au hasard une corde.

Quelle est la proba que la corde soit de longueur $\geq \sqrt{3}$?

↳ côté du triangle équilatéral

Que veut dire "choisir au hasard 1 corde" ?

1) Choisir au hasard A et B sur le cercle, avec la mesure de Lebesgue sur le cercle $\frac{1}{2\pi} d\theta$

$\theta \in [0, 2\pi[$.

On choisit A au hasard, on choisit B au hasard

Si $\theta_{AB} < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |AB| < \sqrt{3}$

$\rightarrow \mathbb{P}(|AB| > \sqrt{3}) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}\left[\theta_{AB} \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[\right)$

2) Choisir au hasard la position du centre de la corde x_c.
dans la boule unité avec la mesure $\frac{\lambda_2}{\lambda_2(B_1)}$

Si $|x_c| < 1/2 \Rightarrow |AB| > \sqrt{3}$.

$$\mathbb{P}(|x_c| < 1/2) = \frac{\lambda_2(B(1/2))}{\pi} = \frac{1}{4}.$$

Paradoxe ??

NON. Les 2 espaces de probabilité utilisés sont $\neq$, et

Les v.a. induites par ces 2 choix sont différentes.

X : longueur de la corde.

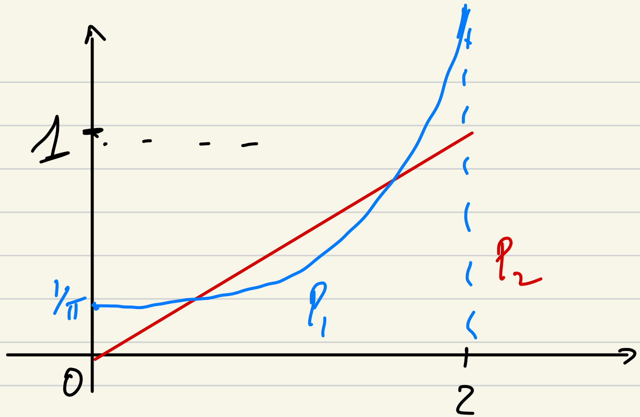
$$\Omega_1 = \left(S^1 \times S^1, \frac{d\lambda_1}{2\pi} \otimes \frac{d\lambda_1}{2\pi}\right) \xrightarrow{X_1} [0, 2]$$

$$\Omega_2 = \left(B_1, \frac{\lambda_2}{\pi}\right). \xrightarrow{X_2} [0, 2]$$

On peut faire le calcul explicite des lois P_{X_1} et P_{X_2}, et on trouve des lois différentes.

$$P_{X_1} = p_1(x)\,dx, \quad \text{avec la densité } p_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \text{ sur } [0,2]$$

$$P_{X_2} = p_2(x)\,dx, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad p_2(x) = \frac{x}{2} \text{ sur } [0,2]$$



p_1 renforce les grandes longueurs, p/r à p_2.

p_1 donne plus de poids que p_2 aux petites longueurs.