

Intégration et Probabilité

Stéphane Nonnenmacher

USTC

30/04/2026



Loi d'1 v.a. réelle X , $P_X \rightsquigarrow$ utiliser ses moments
 $E[X^p]$, $p \in \mathbb{N}$,
s'ils existent.

• Variance et covariances entre plusieurs var. aléatoires
réelles.
 $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$

\rightarrow matrice de covariance $K_X = \left(\text{cov}(X_i, X_j) \right)_{i,j=1 \dots n}$

K_X contient - les variances
de chaque X_i : $\text{cov}(X_i, X_i) = \text{var}(X_i)$

- les covariances $\text{cov}(X_i, X_j)$ si $i \neq j$.

• Régression linéaire (utilisée en statistique : essayer
d'obtenir des informations sur une
v.a. inconnue X , en faisant des
observations / expériences).

Je suppose que toutes les s.a. sont dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

\Rightarrow elles admettent des moments d'ordre 1 et 2 finis.
 \mathbb{E} \swarrow \searrow
variance.

. Idée: on dispose d'un ensemble de v.a. de référence,
 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Y_1, \dots, Y_n .

. X v.a. inconnue sur (Ω, \mathbb{P}) .

On veut approcher au mieux la v.a. X par une combinaison affine des (Y_j) : on cherche des coefficients réels

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, tq. X est le plus proche possible de la

v.a. $\beta_0 + \beta_1 Y_1 + \dots + \beta_n Y_n$.

$\underbrace{\hspace{10em}}$
v.a. réelle, dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$

"la combinaison la + proche possible de X" : celle qui minimise

$$\mathbb{E} \left[\left(X - (\beta_0 + \beta_1 Y_1 + \dots + \beta_n Y_n) \right)^2 \right]$$

moment d'ordre 2 de la différence.

Problème d'optimisation: minimiser la fonction

$$(\beta_0, \dots, \beta_n) \longmapsto \mathbb{E} \left[\left(\quad \right)^2 \right].$$

Problème de régression linéaire.

Prop^o Ce problème de minimisation admet une solution unique:

$$\inf_{(\beta_i) \in \mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{E} \left[\left(X - \beta_0 - \sum_1^n \beta_i Y_i \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(X - Z \right)^2 \right], \text{ où}$$

$$\text{la v.a. } Z = \mathbb{E}[X] + \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{(Y_j - \mathbb{E}[Y_j])}_{\tilde{Y}_j},$$

\tilde{Y}_j , variable centrée

et les $(\alpha_j)_{j=1, \dots, n}$ sont solutions de l'équation linéaire

$$\forall k=1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \operatorname{cov}(Y_j, Y_k) = \operatorname{cov}(X, Y_k)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \iff \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} K_Y \right]_k = \operatorname{cov}(X, Y_k)$$

Donc si on connaît $\mathbb{E}[X]$ et $\operatorname{cov}(X, Y_k)$, on peut résoudre ce problème de régression linéaire.

Preuve: $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ + v.a. constante = 1.

→ je cherche 1 approximation de X dans l'espace vectoriel $H = \operatorname{Vect}(1, Y_1, \dots, Y_n)$

$$\dim H \leq n+1.$$

$$Y_i \longrightarrow \text{var. centrées} \quad \tilde{Y}_i = Y_i - \mathbb{E}[Y_i]$$

$$H = \text{Vect} (1, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n).$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{P}) : \text{le produit vectoriel} \quad \langle 1, \tilde{Y}_j \rangle_{L^2} = \int 1 \cdot \tilde{Y}_j \, d\mathcal{P}$$

$$= \mathbb{E}[1 \cdot \tilde{Y}_j]$$

$$= \mathbb{E}[\tilde{Y}_j] = 0$$

\Rightarrow la v.a. constante 1 est \perp aux \tilde{Y}_j .

$$H = \mathbb{R}1 \oplus \text{Vect}(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n).$$

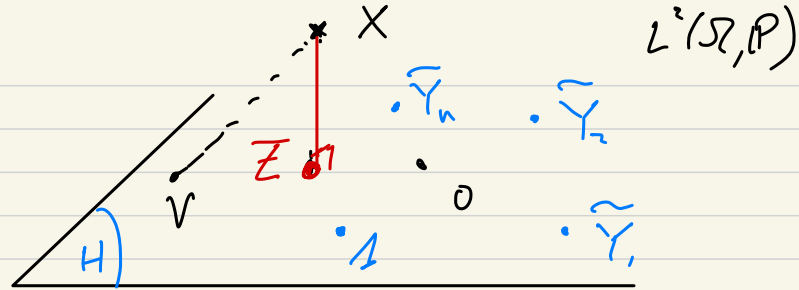
L'ensemble des combinaison affines $\left\{ \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \dots + \beta_n Y_n, \beta_i \in \mathbb{R} \right\}$
 $= H.$

\Rightarrow problème de minimisation: trouver $\inf_{V \in H} \mathbb{E}[(X - V)^2]$

$$= \inf_{V \in H} \int |X - V|^2 \, d\mathcal{P} = \inf_{V \in H} \|X - V\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$$

$$= \text{dist}(X, H)^2$$

DM? : cette distance est obtenue
 lorsque $V = Z$ le projeté
 orthogonal de X sur H .



$$\exists! Z \in H \text{ tq } (X - Z) \perp H. \quad \text{dist}(X, H) = \|X - Z\|_{L^2}$$

→ on a bien un unique $Z \in H$ qui minimise cette distance.

$$Z \in H \Rightarrow Z = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{Y}_i \quad \text{pour certains coefficients } \alpha_j.$$

Pour trouver les équations satisfaites par les (α_i) :

on utilise la propriété que $(X - Z) \perp H$.

$$H = \text{Vect}(1, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$$

→ $n+1$ equations:

$$(X-Z) \perp 1 : \langle X-Z, 1 \rangle_{L^2} = 0$$

$$\mathbb{E}[(X-Z) \cdot 1] = \mathbb{E}[X-Z] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X]$$

"
 α_0

$$\Rightarrow \alpha_0 = \mathbb{E}[X].$$

$$\forall k=1, \dots, n, \text{ j'écrit } \langle (X-Z), \widehat{Y}_k \rangle_{L^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[(X-Z) \widehat{Y}_k] = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[(X - \alpha_0 - \sum \alpha_i \widetilde{Y}_i) \widehat{Y}_k] = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\mathbb{E}[X \widehat{Y}_k]} = \underbrace{\mathbb{E}[\alpha_0 \widehat{Y}_k]}_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{E}[\widehat{Y}_i \widehat{Y}_k]$$

$$\underbrace{\text{cov}(X, \widehat{Y}_k)}_{\gamma_k} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\text{cov}(Y_i, Y_k)}_{K_Y}.$$

Si K_Y est inversible \Rightarrow on a une solution unique

$${}^t \alpha K_Y = {}^t \gamma$$

$$\Leftrightarrow K_Y \alpha = \gamma$$

$$\Leftrightarrow \alpha = (K_Y)^{-1} \gamma.$$

Si K_Y n'est pas inversible (elle admet 1 noyau non trivial),
alors il n'y a pas une unique solution (α).

$$\text{Soit } K_Y \alpha = \gamma \text{ et } \alpha' \in \text{Ker}(K_Y)$$

$$\Rightarrow K_Y (\alpha + \alpha') = \gamma.$$

□.

Ex: Si $n=1$: on veut approcher X par $\beta_0 + \beta_1 Y$, pour
une certain v.a. Y , que je suppose non constante p.s.

$$\Rightarrow \text{on trouve } \bar{Z} = \mathbb{E}[X] + \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(Y)} (Y - \mathbb{E}[Y])$$

$\Rightarrow \text{var}(Y) > 0.$

En général, les v.a. de référence sont des v.e.

"classiques", du type gaussiennes, lois de Poisson, etc.

• Fonction caractéristique d'une loi d'une v.a. réelle.

Déf : Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . La fonction caractéristique de X est la fonction $\Phi_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, définie par

$$\begin{aligned} \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad \Phi_X(\zeta) &= \mathbb{E}[\exp(i\zeta \cdot X)] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^d \zeta_j X_j\right)\right] \\ &= \int_{\Omega} \exp(i\zeta \cdot X) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\zeta \cdot x) dP_X(x) \end{aligned}$$

Φ_x est la transformée de Fourier (avec le signe +) de la loi P_x .

$$\rightarrow \text{on écrit } \Phi_x = \widehat{P_x}.$$

Φ_x est bien définie, et $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $|\Phi_x(\xi)| \leq 1$.

TCD ou th. de continuité de l'intégrale p/v au paramètre ξ

$\rightarrow \Phi_x$ est une fonction continue.

ξ = paramètre de Fourier.

⚠ on n'a pas forcément $\Phi_x(\xi) \rightarrow 0$!!
 $(|\xi| \rightarrow \infty)$

ex: $P_x = \delta_{(0,0,0)}$ $\rightarrow \Phi_x(\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

On remplace une mesure de proba P_x par une fonction bornée continue Φ_x .

On va montrer que Φ_x contient toute l'information de P_x .
Cette fonction caractérise la loi P_x .

Lemme sur les gaussiennes:

X v.a. normale de loi $\mathcal{P}(0, \sigma^2)$. Alors

$$\Phi_x(\zeta) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 \zeta^2}{2}\right), \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}.$$

Pr: cas $\sigma = 1$.

$$\begin{aligned} \Phi_x(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{i\zeta x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\cos(\zeta x) + i \sin(\zeta x) \right] dx \end{aligned}$$

↓
impair

$$\rightarrow \int e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(\zeta x) dx = 0$$

$$\Phi_x(\zeta) = \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(\zeta x) dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \cos(\zeta x) = -x \sin(\zeta x)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x \sin(\zeta x) \in L^1(dx)$$

Thm. de dérivation sous l'intégrale

$$\forall \zeta \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{d}{d\zeta} \Phi_x(\zeta) = - \int x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(\zeta x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{I.P.D.} \quad = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} \zeta \cos(\zeta x) dx = -\zeta \Phi_x(\zeta).$$

$$-x e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

\Rightarrow la fonction Φ_x est C^1 , et vérifie l'équation différentielle

$$f'(\zeta) = -\zeta f(\zeta).$$

Cette équation admet pour solutions les gaussiennes

$$f(z) = C e^{-z^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$f(0) = C$$

On voit que $\Phi_x(0) = \int_{\mathbb{R}} dP_x(x) = 1$

$$\Rightarrow \Phi_x(z) = e^{-z^2/2}.$$

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi_x(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + i z x} \frac{dx}{\sigma}$$

$$y = \frac{x}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{y^2}{2} + i \sigma z y} dy = e^{-\frac{(\sigma z)^2}{2}} \quad \square.$$

Concl: la famille des gaussiennes centrées en 0 est invariante par la transformée de Fourier.

Théorème La fonction caractéristique Φ_X d'une v.a. X dans \mathbb{R}^d caractérise la loi P_X .
Si, pour 2 v.a. X et Y sur \mathbb{R}^d , on a $\Phi_X = \Phi_Y$,
alors $P_X = P_Y$.

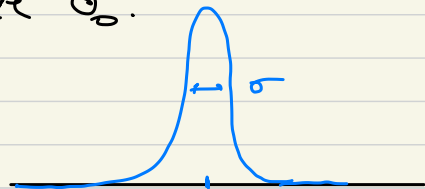
⚠ il faut différencier les v.a. X, Y , et les lois P_X, P_Y .
On peut avoir des v.a. différentes (et qui sont définies sur des \mathcal{R} différents), mais qui ont la même loi.
 Φ_X caractérise la loi P_X , mais pas X elle-même.

Preuve. Cas $d=1$.

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

la densité de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

noyau de convolution, d'approximation de δ_0 .



μ mesure de proba sur \mathbb{R} . On

veut reconstruire μ à partir de la fonction $\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} d\mu(x)$.

$\mu \rightarrow$ mesure régularisée $\mu_\sigma(dx) = f_\sigma(x) dx$, avec

$$f_\sigma(x) = \int g_\sigma(x-y) d\mu(y)$$

$$|f_\sigma(x)| \leq \|g_\sigma\|_{L^1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = (g_\sigma * \mu)(x)$$

Les dérivées de $\frac{d^k}{dx^k} g_\sigma(x)$ sont de la forme $\underbrace{P_k(x)}_{\text{polynôme}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

\Rightarrow l'ordre de dérivée sous l'intégrale \rightarrow fonctions $L'(\mu)$

$$\Rightarrow f_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

On va montrer que :

1. μ_σ est déterminée par $\tilde{\mu}$.
2. $\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R})$, les intégrales $\int \varphi d\mu_\sigma \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \int \varphi d\mu$.
3. μ , mesure de proba sur \mathbb{R} , est régulière \Rightarrow pour connaître μ , il suffit de connaître les intégrales $\int \varphi d\mu$, avec $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{1}_A \rightsquigarrow \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{1}_{X_0} \text{ de sorte que } \int \mathbb{1}_A d\mu = \int \mathbb{1}_{X_0} d\mu.$$

$$1: \quad \sigma \sqrt{2\pi} \quad g_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \int g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

$$f_\sigma(x) = \int g_\sigma(x-y) d\mu(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) e^{i(x-y)\xi} d\xi \right) d\mu(y)$$

$$(y, \xi) \mapsto g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) e^{i(x-y)\xi} \in L^1(\mathbb{R}^2, \mu(dy) \otimes d\xi)$$

Fubini

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) \hat{\mu}(-\xi) d\xi$$

On calcule donc f_σ , donc μ_σ , à partir de $\hat{\mu}$.

$$2. \varphi \in C_b(\mathbb{R})$$

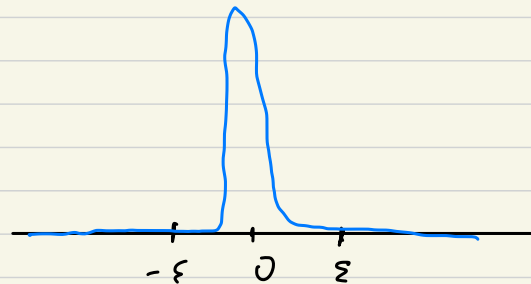
$$\int \varphi d\mu_\sigma = \int \varphi(x) f_\sigma(x) dx = \int \varphi(x) \left(\int g_\sigma(x-y) d\mu(y) \right) dx$$
$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int (g_\sigma * \varphi)(y) d\mu(y)$$

Les noyaux de convolution $(g_\sigma)_{\sigma \in]0,1]}$ ont les propriétés des

approximations de δ_0 .

$$\cdot \int g_\sigma(x) dx = 1.$$

$$\cdot \forall \varepsilon > 0 \quad \int_{\{|x| > \varepsilon\}} g_\sigma(x) dx \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0.$$



$$\text{supp } g_\sigma = \mathbb{R}, \quad \forall \sigma > 0.$$

On montre, comme pour les approximations de δ_0 , que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g_\sigma * \varphi(y) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \varphi(y), \quad \text{et la}$$

convergence est uniforme sur tout compact.

$$\int_{|x| > \varepsilon} \varphi(y-x) g_\sigma(x) dx \leq \|\varphi\|_{\text{sup}} \underbrace{\int_{|x| > \varepsilon} g_\sigma(x) dx}_{\xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0}.$$

$$\cdot |g_\sigma * \varphi| \leq \|\varphi\|_{\text{sup}}$$

μ mesure de proba

\Rightarrow TCD :

$$\int \varphi d\mu_\sigma = \int (g_\sigma * \varphi) d\mu \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \int \varphi d\mu.$$

Thème OK en dimension 1.

En dimension d : on se sert des gaussiennes

$$g_{\sigma}^{(d)}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d g_{\sigma}(x_i)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (\sigma \sqrt{2\pi})^d g_{\sigma}^{(d)}(x) &= \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\zeta \cdot x} g_{\frac{1}{\sigma}}^{(d)}(\zeta) d\zeta \quad \square \end{aligned}$$

La fonction Φ_x permet d'encoder les informations sur la loi P_x .

Ex: Φ_x permet de retrouver les moments de P_x (s'ils sont bien définis).

Ex: supposons que X soit dans $L^2(\Omega, P)$: admet des moments finis d'ordre 1 et 2.

Propz Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ v.a. dans \mathbb{R}^d , de carré intégrable.

Alors Φ_X est de classe C^2 , et admet un développement limite (de Taylor) à l'origine :

$$\Phi_X(\xi) = 1 + i \sum_{j=1}^d \xi_j \mathbb{E}[X_j] - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^d \xi_j \xi_k \mathbb{E}[X_j X_k] + o(\|\xi\|^2).$$

Preuve hypothèse : $\int \|x\|^2 dP_x(x) < \infty$.

$$\sum_i |x_i|^2 \Rightarrow \int |x_i x_j| dP_x(x) < \infty, \quad \forall i, j$$

$$|x_i x_j| \leq \frac{x_i^2 + x_j^2}{2}$$

$$\int |x_i| dP_x(x) < \infty, \quad \forall i$$

$$|x_i| \leq \frac{1 + x_i^2}{2}$$

$$\Phi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \xi \cdot x} dP_x(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} e^{i\xi \cdot x} = i x_k e^{i\xi \cdot x} \in L^1(P_x), \text{ dominée par } |x_k|$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_j} e^{i\xi \cdot x} = -x_k x_j e^{i\xi \cdot x} \in L^1(P_x), \text{ dominée par } |x_k x_j|$$

→ thm de dérivate sous l'intégrale

→ Φ_x est 2 fois dérivable avec

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial \xi_k}(\xi) = \int i x_k e^{i\xi \cdot x} dP_x(x) = i \mathbb{E}_{P_x} [x_k e^{i\xi \cdot x}]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial \xi_k \partial \xi_j}(\xi) = - \int x_k x_j e^{i\xi \cdot x} dP_x(x) = - \mathbb{E}_{P_x} [x_j x_k e^{i\xi \cdot x}]$$

↳ continue p/r à ξ .

→ Φ_x admet un développement de Taylor d'ordre 2, en

particulier au point $\xi = 0 \rightsquigarrow$ on retrouve la formule.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_x} [x_k] = \mathbb{E}_{(\mathbb{P})} [X_k] = \mathbb{E} [X_k]$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_x} [x_j x_k] = \mathbb{E} [X_j X_k].$$

Remarque: si $|X|^p$ est intégrable pour $p \geq 1$ entier
alors \mathbb{P}_x est C^p , et son développement de Taylor
à l'ordre p au point $\xi = 0$ fournit tous les moments
d'ordres $\leq p$ de X .

$$\mathbb{E} [X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}]$$
$$\mathbb{E} [X_{i_1} \dots X_{i_j}], \quad j \leq p.$$

• Cas d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

→ on remplace la fonction caractéristique Φ_X par la fonction génératrice de X .

Def: Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} . La fonction génératrice de X est la fonction g_X définie sur $r \in [-1, 1]$, par:

$$g_X(r) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) r^n = \mathbb{E}[r^X]$$

• g_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

croissante sur $[0, 1]$.

continue sur $[-1, 1]$ (par le TCD).

$|P(X=n)r^n| \leq P(X=n)$, sommable

$$\begin{array}{l} r \rightarrow r_0 \\ r^n \rightarrow r_0^n \end{array}$$

$$\text{TCD} \Rightarrow g_x(r) \rightarrow g_x(r') \text{ si } r \rightarrow r'.$$

Développement de Taylor de g_x en $r=0 \Rightarrow$ on retrouve tous les poids $P(X=n)$.

$\Rightarrow g_x$ contient toute l'information sur la loi P_x .

$$\frac{d}{dr} (r^n) = n r^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ si } |r| < 1.$$

$\Rightarrow g_x$ est dérivable en tout pour $r \in]-1, 1[$.

$$g_x \in C^\infty \text{ sur } r \in]-1, 1[.$$

$$\frac{d^2}{dr^2} r^n = n(n-1) r^{n-2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ si } |r| < 1.$$

Quid du point $r=1$?

$$g'_x(r=1) = \sum_{n \geq 0} P(X=n) n = \mathbb{E}[X] \in [0, \infty].$$

formelle

Si $\mathbb{E}[X] < \infty$, alors g_x admet
 1 dérivée à gauche en $r=1$.

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} g_x^{(p)}(r) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-p+1)]$$

somme de moments d'ordres $\leq p$

Si ces moments sont finis $\Rightarrow g^{(p)}(1)$ est finie.

Concl: Les propriétés de la fonction g_x autour de $r=1$
 nous informent sur les moments de X .

Rem: lien avec la fonction génératrice: on peut étendre
 g_x au disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} = \overline{\mathbb{D}}$

$g_x(z) = \sum_{n \geq 0} P(X=n) z^n$ converge et est continue dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Sur le cercle unité $z = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} g_x(e^{i\theta}) &= \sum P(X=n) e^{in\theta} = \mathbb{E}[e^{i\theta \cdot X}] \\ &= \int e^{i\theta x} dP_x(x) = \Phi_x(\theta). \end{aligned}$$

Régularité de g_x en $r=1 \iff$ régularité en $\{z=1\}$
 $= \dots \{ \theta=0 \}$.

