30 ans d'analyse semi-classique: Bibliographie commentée

Bernard Helffer

Résumé

Le point de départ est un exposé à Nantes donné en Janvier 2003, donné à l'occasion du lancement de la numérisation des actes du colloque annuel de "Saint-Jean de Monts" (antérieurement à Rennes), et qu'il a paru souhaitable de développer. Le rêve (difficile à réaliser) serait de montrer la diversité des sujets traités par les méthodes semi-classiques et de pouvoir orienter le lecteur vers les références existantes, sans remplacer les excellents surveys ou monographies consacrées aux difféerents sujets.

Il y a sûrement pleins d'oublis et la présentation est forcément biaisée par les affinités ou l'incompétence partielle de l'auteur.

Certains paragraphes ne sont qu'esquissés.

Toute remarque est bienvenue sur le texte qui est plutôt un document de travail ou une "bibliographie commentée".

1 Introduction

Nous faisons le choix un peu arbitraire de prendre comme date de départ de notre analyse l'année 1970-1971 qui correspond au démarrage du séminaire Goulaouic-Schwartz. On notera qu'un des exposés de la première année est consacré à la présentation des travaux de Hörmander sur les Fourier-Intégraux. Cette date interagit fortement avec l'histoire personnelle de l'auteur qui rentre au CNRS au centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique en Octobre 1971, avec une thèse de troisième cycle à commencer et dont l' activité des premières années sera rythmée par le séminaire Goulaouic-Schwartz et le séminaire edp à Orsay coordonné par C. Zuily. Cette date semble assez naturelle pour l'analyse du développement de l'analyse microlocale, peut-être moins pour celle de l'analyse semi-classique qu'il faudrait plutôt repousser à 7-8 ans plus tard ou à beaucoup d'années plus tôt. Mais beaucoup d'acteurs[1] en France de ce développement étant communs, il n'est pas inutile de commencer l'analyse à cette

[1] Certains comme J. Sjöstrand considèrent d'ailleurs que les deux analyses ne font qu'une. Je défendrai ici un point de vue un peu différent.

date.

1.1 Essai de définition

Au départ, l'analyse semi-classique (ou quasiclassique) tend à explorer le principe de correspondance : *On doit retrouver la mécanique classique à partir de la mécanique quantique dans la limite où la constante de Planck h tend vers* 0.
On pourrait donc en conclure qu'elle ne naît qu'après la mécanique quantique, mais les objets qu'elle considère sont en fait bien antérieurs à la formulation définitive de la mécanique quantique. Nous nous intéresserons ici à la naissance de l'analyse semi-classique en tant que composante de la physique mathématique. On verra qu'elle a une forte composante EDP (équation de Schrödinger, de Dirac, de Klein-Gordon, de Brown-Rawenhall ...) mais qu'elle a aussi des composantes non edp (intégrales de Laplace).

1.2 Evolution sous-marine: 1971-1977

On ne parlait pas beaucoup d'analyse semi-classique pendant cette période au sein du séminaire Goulaouic-Schwartz. Dans mes débuts de chercheur, la mécanique classique s'appelait géométrie symplectique et l'équation de Schrödinger était une équation aux dérivées partielles. Bien sûr, le nom du travail de Maslov [MAS1] (dont la traduction française date de 1972 mais dont la version initiale est bien antérieure) n'était pas totalement inconnu mais il est sans doute utile de citer ce que dit Hörmander dans son article fondateur sur les Fourier-Intégraux pour comprendre que nous n'étions pas poussés dans cette direction :
"The work of Egorov is actually an application of ideas of Maslov who stated at the International Congress that his book actually contains the ideas attributed here to Egorov [Ego69] and Arnold[2] *as well as a more general and more precise operator calculus than ours. Since the book is highly inaccessible and does not appear to be quite rigorous we can only pass the information on to the reader, adding a reference to the explanations of Maslov's work given by Buslaev [Bus69].... The purpose of the present is not to extend the more or less formal methods used in geometrical optics but to extract from them a precise operator theory which can be applied to the theory of Partial Differential Equations "*
D'une certaine manière, il nous était suggéré d'oublier les racines "physiques" et de partir directement à l'attaque des problèmes mathématiques avec les nouveaux outils, ce qui a d'ailleurs eu un grand succès au niveau du développement de l'analyse microlocale au sein des Equations aux Dérivées partielles mais n'a pas forcément favorisé, au moins dans un premier temps, le développement des méthodes semi-classiques.
Il y a eu certes les cours de Leray au Collège de France à partir de 1972, mais tant le cadre du séminaire que le style d'exposition de J. Leray et sa présentation

[2] qui signe un appendice dans le livre de Maslov

plutôt formelle n'encourageaient pas tellement les jeunes à se lancer dans cette direction (voir cependant les remerciements d'A. Voros cités plus loin).
Le semi-classique n'est pas totalement absent dans le séminaire Goulaouic-Schwartz de cette période mais il est plutôt en gestation et les outils qui vont se développper à partir des années 78 sont plutôt mis au point pour d'autres questions (propagation des singularités, hypoellipticité, résolubilité locale et théorie spectrale pour un Laplacien sur une variété compacte) (d'où le titre de cette sous section: évolution sous-marine). Mentionnons toutefois qu'un article de Duistermaat [Du94] mentionne une utilisation semi-classique des Opérateurs Intégraux de Fourier et que la thèse d'état de Y. Colin de Verdière (1974) est potentiellement "semi-classique" et reliée aux travaux de Balian-Bloch [BalBlo70, BalBlo71, BalBlo72, BalBlo74] qui datent de la période 1967-1974. Les liens entre l'analyse microlocale et la théorie spectrale dont l'origine est le travail d'Hörmander [Ho68] (1968) se développent: Colin de Verdière, Chazarain, Duistermaat, Boutet de Monvel, Guillemin, Chazarain, Melrose, Sjöstrand... et sous des formes plus classiques Baouendi, Goulaouic, Métivier, Pham The Lai, Robert .... L'obtention des meilleurs restes suscite beaucoup d'activité.
Par ailleurs dans le prolongement de l'optique géométrique (travaux de Ludwig) une intense activité se développe autour de la propagation des singularités et du scattering (travaux de Taylor, Melrose, Friedlander, Eskin, Sjöstrand, ..., Lebeau) à partir de 1975. Même si les techniques qui sont utilisées sont parfois communes, nous choisissons de ne pas les considérer en tant que telles comme semi-classiques, si elles ne se présentent pas explicitement comme dépendant d'un paramètre jouant le rôle de la constante de Planck (voir cependant mon paragraphe méthode semi-classiques généralisées). Ce choix est arbitraire (et ne sera pas systématiquement respecté) mais sans ce choix nous aurions dû sans doute ajouter plusieurs centaines de références.

1.3 (Re)naissance du semi-classique chez les edpistes 1977-1982

Sans que nous le sachions au départ dans le milieu EDP, c'est sans doute, dans la région parisienne, autour du CEA à la suite de Balian-Bloch que se développe le semi-classique dans la période précédente. Au centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, des physiciens comme Lascoux et Sénéor qui ont réalisé la traduction de Maslov ont aussi joué un rôle de catalyseur (...F. Pham..). La thèse de Voros [Vor77] de 1977 (développements semi-classiques) s'inscrit clairement dans une nouvelle démarche (on y voit apparaître le calcul de Weyl déjà popularisé par Shubin [SH] et qui verra sa consécration mathématique dans [Ho79], la notion d'opérateur h-admissible qui sera reprise dans les travaux de Robert [Rob82] puis Helffer-Robert [HelRob83], les problèmes d'ergodicité, de systèmes intégrables...). Les remerciements d'A. Voros au début de sa thèse donnent un bon éclairage sur le développement des idées :
Les professeurs R. Balian, C. Itzykson et J. Lascoux m'ont initié au sujet de ce travail...Un grand nombre des idées développées dans ce travail leur leur sont

dues, avec mention particulière des travaux de R. Balian et C. Bloch sur les méthodes semi-classiques.... Les travaux de géométrie riemannienne de Y. Colin de Verdière ont été pour cette thèse une source importante d'inspiration mathématique. J'ai aussi été profondément influencé par les travaux et les cours du professeur J. Leray sur l'analyse lagrangienne et les solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles. Par ailleurs, j'ai emprunté l'idée de support essentiel aux travaux de J. Bros et D. Iagolnitzer en analyse complexe et en théorie de la matrice S. Ce travail incorpore également de nombreuses idées de A. Grossmann, de B. Kostant et J.M. Souriau. Je dois en outre une reconnaissance spéciale pour la stimulation scientifique et morale qu'ils m'ont apportée à V. Guillemin, R. Seiler, S. Sternberg et A. Wightman. A. Voros est aussi en contact avec d'autres écoles semi-classiques, certes peu rigoureuses mais extrêmement dynamiques dont le leader est sans doute M. Berry mais qui s'appuient sur une grosse expérimentation numérique[3]. Pour préciser l'apport de Voros, je dirai que, curieusement, les travaux de J. Leray consacrés à la compréhension du travail de Maslov s'intéressent essentiellement à la partie formelle des constructions des solutions approchées. J. Leray ne semble pas s'intéresser à la question de savoir si le problème spectral est bien posé, si les quasimodes correspondent à des vraies fonctions propres...Voros pose plus les bases d'une version mathématique de l'analyse semi-classique.

Comme nous l'avons déjà dit, ce n'est ni au séminaire Goulaouic Schwartz ou aux journées EDP que l'on parle beaucoup de semi-classique dans cette période. Il est toutefois mentionné dans un exposé de Y. Colin de Verdière (77-78) sur le spectre conjoint, comme corollaire de cette étude[4] On peut aussi mentionner un groupe de travail de théorie spectrale et méthodes microlocales à Paris 7 (avec P. Bérard et Y. Colin de Verdière) dans les années 75 et 76.
L'analyse des dates de publications montre donc que c'est autour des années 77-78 que un peu partout les méthodes semi-classiques commencent à se développer en tant que telles et plus seulement en tant que corollaires d'autres théories. En Russie, il faut sans doute mentionner les travaux de Lazutkin qui datent de 1973 (grandes fréquences), de Shubin où des calculs pseudo-différentiels dépendant d'un petit paramètre apparaissent [SH], les travaux de Rozenbljum [Roz72, Roz74, Roz76, Roz77] et Vainberg [Va77]. Au Japon, il faut mentionner Asada-Fujiwara [AsFu788] (qui inspirera Chazarain) et Yajima [Yaj79, Yaj81]. Aux Etats-Unis, il faut mentionner dans l'Ecole de Lieb ou de Simon [LieSim77a, LieSim77b], Aizenman-Lieb [AiLi78]... Harrell [Har78]. Par exemple Lieb-Simon [LieSim77a] démontrent la validité de l'approximation de Thomas-Fermi (réduction au problème à une particule et obtention du terme de Weyl pour l'asymptotique par des techniques d'encadrement avec des problèmes

[3] On retrouve cette dextérité dans l'Ecole semi-classique du département de Physique d'Orsay Bohigas, Leboeuf,...

[4] L'idée principale est ici que pour comprendre le spectre de $-h^2\Delta + V$ sur une variété compacte M, on peut regarder plutôt le spectre conjoint de $-\Delta - V\partial_\theta^2$ et de ∂_θ, sur $M \times S^1$. Le semi-classique apparaît ici comme un simple sous-produit de l'analyse spectrale. Un théorème de comptage semi-classique (CDV réfère à Voros, Babich, Lazutkin ...) est obtenu.

de Dirichlet et de Neuman), Harrell étudie l'effet tunnel.
On notera aussi la sortie du Guillemin-Sternberg [GUST] en 1977. En France, mais dans une école qui n'a que peu de contact avec l'Ecole microlocale, je mentionnerai J.M. Combes, qui travaille avec R. Seiler et R. Schrader [ComSei78, ComSei80, ComSchrSei78].

1.4 Expansion

Tout s'accélère à partir des années 1980. A Nantes par exemple où la théorie spectrale était bien implantée (Pham The Lai, Robert), les recherches se développent simultanément sur les opérateurs globaux (dans la foulée de la thèse de Robert et en comparaison avec des travaux de Boutet de Monvel, Guillemin et Hörmander) et un groupe de travail est formé autour des travaux semi-classiques de J. Chazarain. Vers 1982, en réponse à un appel d'offres du CNRS (ATP), un projet intitulé " Méthodes semi-classiques en Mécanique quantique" est présenté par J. Chazarain, B. Helffer, F. Pham, D. Robert, J. Sjöstrand et A. Voros. Il est soutenu par B. Malgrange. Il est sans doute utile d'en rappeler les objectifs: *Trouver un langage commun entre Physiciens Théoriciens et Mathématiciens permettant de confronter des visions différentes des problèmes de mécanique quantique. Les premiers cherchent plutôt à comprendre et à expliquer les phénomènes physiques en élaborant des théories, avec certes l'aide d'outils mathématiques, mais dont la véracité est déterminée avant tout par l'expérience ou plus fréquemment par des simulations numériques. Les second essayent de démontrer rigoureusement les résultats annoncés, souvent considérés comme "justes" avec beaucoup d'avance sur les possibilités mathématiques du moment. Ces études peuvent d'ailleurs mettre en évidence des phénomènes nouveaux intéressants du point de vue physique* (A noter que les présentateurs du projet étaient en train de redéfinir naïvement le concept de Physique Mathématique, qui existait déjà ailleurs!) ... Au moment où les crédits sont attribués, J. Chazarain annonce son départ définitif de la recherche en mathématiques.... L'énergie apportée par J. Sjöstrand dans la réalisation du programme rend le programme très rapidement dépassé. La transformation de FBI telle qu'elle est développée dans le mémoire de J. Sjöstrand [SJ1] jouera par exemple un rôle important dans le traitement de l'analyse semi-classique du fond de puits dans le cadre analytique. Peut-être faut il mentionner que l'opérateur :

$$-\Delta + V\partial_\theta^2 ,$$

a, en supposant que $\min V = 0$, comme variété caractéristique :

$$V = 0, \xi = 0 ,$$

et a été l'objet de nombreuses études dans la période 72-76 (en hypoellipticité tant C^∞ qu'analytique). Nous renvoyons au livre plus accessible d'A. Martinez [MAR] pour une présentation des techniques FBI en analyse semi-classique.

L'organisation des premières journées semi-classiques date de 1984. Les organisateurs ont essayé de (et réussi à) rassembler des écoles différentes. Ceci a d'une certaine manière conduit à un repositionnement scientifique de la physique mathématique en France, qui fera une entrée dans la commission de mathématiques au CNRS, alors qu'elle était surtout localisée dans la commission de Physique Théorique. La communauté formée aux techniques microlocales a ainsi retrouvé une communauté de physique mathématique plus formée aux techniques d'analyse fonctionnelle et plus liée à la physique (J.M. Combes, Bellissard,...) et à l'Ecole de B. Simon et qui apportait une multitude de problèmes motivés par la physique. Les tentatives de contact avec des écoles WKB (Fröman) ou même l'école de Berry ont été moins fructueuses même si la phase de Berry jouera un rôle et si des écoles WKB renaîtront autour de A. Grigis à Paris 13 et de F. Pham à Nice.

Peut-être que l'idée qui s'est progressivement mise en évidence est que, si les outils microlocaux trouvaient leur origine dans des techniques développées pour comprendre la mécanique ondulatoire ou des questions asymptotiques de la mécanique quantique, ils pouvaient naturellement s'appliquer efficacement à cette théorie et que le maximum d'efficacité serait obtenu en redéveloppant les outils microlocaux dans le contexte semi-classique. D'une manière qui peut sembler absurde à la génération qui a suivi, il a fallu "désEDépiser" les Fourier-Intégraux et les opérateurs pseudo-différentiels, en particulier il a fallu leur enlever certaines caractéristiques que L. Hörmander leur avait ajouté (par rapport aux théories masloviennes) pour la détermination de formes normales et l'étude des singularités en Equations aux dérivées partielles : structure homogène des phases, comportement particulier de la section nulle du fibré cotangent... La question des formes normales en semi-classique est d'une certaine manière plus simple (car il n'y a pas d'homogénéité en ξ qnsidérer). Il a fallu revenir à une notion d'ensemble de fréquence à la place du front d'onde... Mais beaucoup de travaux autour de la transformation de FBI de J. Sjöstrand avaient pour des raisons techniques déjà opéré cette mutation. On peut aussi citer quelques phrases d'Ivrii sur sa conversion vers les années 85 vers le semi-classique[5]:
"I started to study semi-classical spectral asymptotics at the time when I foolishly assumed that the first story was completely finished and I had nothing to do. So I decided to extend the results to semi-clasiscal analysis before leaving the area. When I told my first results to M.Z. Solomyak, he asked if those results could be deduced from the results of the classical theory by the Birman-Schwinger principle. A quick check gave a very surprising answer: using classical asymptotics one can prove semi-classical asymptotics only under very unnatural restrictions. But using semi-classical asymptotics one can extend classical asymptotics to more general operators and problems."
Ce retournement dans le point de vue est d'ailleurs assez général et beaucoup de spécialistes en EDP préfèrent maintenant se placer dans le cadre semi-classique pour résoudre leurs problèmes a priori non semi-classiques.

[5]Ses premiers travaux semi-classiques datent de 1982

Ce colloque "Journées Semi-classiques" sera repris quelques années plus tard pour devenir une rencontre annuelle regroupant la plupart des courants de l'analyse semi-classique en un sens de plus en plus étendu. La dernière en date (Janvier 2003) désormais financée par un GDRE du CNRS a rassemblé à Nantes plus de 100 chercheurs.

En 1990-91 a lieu une année spéciale dédiée aux méthodes semi-classiques et financées par le ministère de la Recherche et le CNRS. D. Robert en est le principal organisateur. Cette année spéciale a marqué la reconnaissance internationale de tout ce qui avait été fait en France pendant 10 années.
Il faut aussi mentionner plus récemment d'autres semestres ou années organisés à l'étranger où l'analyse semi-classiqque est très présente : Année spéciale à Mittag-Leffler en 1993-1994 (?) (organisateurs: J. Sjöstrand, B. Helffer, A. Jensen) et semestre en 2002 (organisateurs: A. Laptev, V. Guillemin, B. Helffer), Semestre à Minneapolis en 1995 (organisateurs: J. Rauch, B. Simon) (cf les proceedings [RASI]), Semestre à l'institut Fields au Canada (organisateurs: V. Ivrii, M. Zworski), semestre au MSRI en 2003 (organisateurs: J. Sjöstrand, M. Zworski). Un colloque tout récent (Avril 2003) y a d'ailleurs réuni des spécialistes mathématiciens, physiciens et chimistes.

2 Grands thèmes de l'analyse semi-classique

`On  pourrait aussi distinguer entre grands outils et grands th\'emes ?`

2.1 Opérateurs h-pseudodifférentiels.

Nous rappelons qu'un opérateur h-pseudodifferentiel $A_h = \mathrm{Op}_h(a)$, associé à un symbole $(x,\xi) \mapsto a(x,\xi;h)$ est défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ par :

$$(\mathrm{Op}_h(a)u)(x) = (2\pi h)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} \exp(\tfrac{i}{h}(x-y)\cdot\xi)\; a(\tfrac{x+y}{2},\xi;h)\, u(y)\, dy d\xi \; .$$

La (famille de) fonction(s) $a(\cdot;h)$ ($h \in]0,\eta_0]$) est appelée le symbole de A_h. Nous référons au livre [ROB] pour un cours sur cette théorie et sur les hypothèses que l'on doit faire sur a (voir aussi [DISJ] et pour des versions plus sophistiquées [IV] qui s'appuie[6] sur [HO]). Il est souvent suffisnat de considérer des a qui vérifient, pour certains q, p et p', la propriété qu'il existe $\eta_0 > 0$, tel que, pour tout α et β dans $\mathbb{N}^m$, il existe des constantes $C_{\alpha,\beta}$ telle que, pour tout $h \in]0,\eta_0]$, on ait

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi;h)| \leq C_{\alpha,\beta} h^q \langle x\rangle^{p-\tau|\alpha|} \langle \xi\rangle^{p'-|\beta|} \; .$$

[6]Bien sûr, on peut d'une certaine manière dire que tout est contenu dans le calcul de Weyl présenté dans [HO], mais l'expérience montre, que pour chaque problème considéré, des classes plus petites et mieux adaptées donnent des résultats plus fins!! On peut aussi remarquer (argument qui va dans l'autre sens) que h apparaît explicitement dans le calcul de Weyl, dans la comparaison de la métrique g et de la métrique duale g^σ.

Lorsque le symbole vérifie cette condition, nous écrivons $a \in S^{(q,p,p')}$, et l'opérateur correspondant $\mathrm{Op}_h(a)$ est dit dans $\mathrm{Op}\, S^{(q,p,p')}$. La classe est une algèbre par composition et cette composition est multiplicative modulo des termes d'ordre inférieur. Typiquement, si $a \in S^{(q,p,p')}$ er $b \in S^{(q_1,p_1,p_1')}$, alors il existe $c \in S^{(q+q_1,p+p_1,p'+p_1')}$ tel que :

$$\mathrm{Op}_h(a) \circ \mathrm{Op}_h(b) = \mathrm{Op}_h(c) \ ,$$

et

$$c - ab \in S^{(q+q_1+1,p+p_1-\tau,p'+p_1'-1,)} \ .$$

Ceci conduit à une définition naturelle de "symbole principal".
Typiquement, le symbole $a \in S^{q,p,p'}$ admet un développement formel de la forme :

$$a(x,\xi;h) \sim h^q \sum_j h^j a_j(x,\xi) \ ,$$

avec :

$$a_j(x,\xi) \in S^{0,-\tau j,-j} \ .$$

Le symbole $h^q a_0(x,\xi)$ est alors appelé le symbole principal. De plus les opérateurs inversibles ont leurs inverses dans la même classe, sous des hypothèses d'ellipticité naturelle.

2.2 Calcul fonctionnel

Le calcul fonctionnel a comme objectif initial de localiser en énergie. Il intervient comme alternative à la microlocalisation qui localise dans l'espace des phases.

Une question importante au départ a en effet été de savoir localiser en énergie. L'expérience antérieure en analyse microlocale était (cf [Ho68]) qu'il fallait considérer l'opérateur $\exp it|-\Delta|^{\frac{1}{2}}$ pour obtenir un Fourier intégral. L'étude des opérateurs globaux montrait que pour l'oscillateur harmonique le bon objet à considérer était l'opérateur $\exp it|-\Delta+x^2|$ mais que si l'on regardait l'oscillateur quartique il fallait prendre une autre puissance. Le cas d'un potentiel $V(x)$ sans terme principal homogène devenait difficile. Il est apparu que pour contourner cette difficulté, on pouvait, dépendant du problème considéré, ou bien microlocaliser, c'est à dire approcher $\exp it\frac{P}{h}\chi(x,hD_x)$ ou bien localiser en énergie, c'est à dire considérer $\exp it\frac{P}{h}\chi(P(h))$ où χ localise près de l'énergie qui nous intéresse. Une des difficultés initiales à surmonter était quee les calculs fonctionnels disponibles, pour lesquels on pouvait reconnaître que l'opérateur $\chi(P)$ restatit dans une classe d'opd raisonnable utilisaient que le spectre était discret (Cf Seeley [See] pour le cas classique). D. Robert puis Helffer-Robert ont donné des solutions pour contourner ce problème dans le cadre semi-classique (voir l'évolution à partir des conditions que met Chazarain (croissance quadratique du potentiel) [Chaz79a, Chaz79b, Chaz79c] et des efforts a posteriori maladroits de [HelRob81, HelRob82a] qui ont finalement conduit à [HelRob83]) mais la méthode la plus populaire (qui a été reprise dans de nombreux contextes) est celle proposée par Helffer-Sjöstrand [HelSj90b] et qui est basée sur la formule :

$$f(P(h)) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}} (\partial_{\bar{z}} \tilde{f})(z)(P(h) - z)^{-1} dxdy$$

où, $z = x + iy$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\tilde{f}$ est une extension presque analytique de f, c'est à dire que :

$$\tilde{f}_{/\mathbb{R}} = f \ , \ (\partial_{\bar{z}} \tilde{f})(z) = \mathcal{O}(|\mathrm{Im} z|^\infty) \ .$$

Au voisinage d'une énergie E telle que les surfaces d'élnergie sont compactes, on peut alors bien approcher (du moins pour t petit), l'opérateur

$\chi(P(h)) \exp -it\frac{P}{h}$ par un Fourier-Intégral semi-classique typiquement de noyau

$$K(t,x,y;h) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp i\frac{(S(t,x,\eta) - y\eta)}{h} \ a(t,x,\eta,h) d\eta$$

avec des restes contrôlés en norme convenable dans $\mathcal{L}(L^2)$ ou pour la norme trace. Les références sont Maslov (non rigoureux)[MAS2], Fedoryuk-Maslov [FEMAS], Chazarain [Chaz79a, Chaz79b, Chaz79c, Chaz80a, Chaz80b], Helffer-Robert [HelRob81, HelRob82a, HelRob83, HelRob84b] , Helffer-Sjöstrand [HelSj90b], Robert [Rob82] et son livre [ROB], Dimassi-Sjöstrand [DISJ] qui en donne la présentation la plus concise, Ivrii [IV].

Il est peut être utile de décrire le début de la consruction. La phase $S(t,x,\eta)$ apparaissant dans l'écriture du noyau est solution de l'équation :

$$\begin{array}{l} \partial_t S + p_0(x, \partial_x S) = 0 \ , \\ S(0,x,\eta) = x \cdot \eta \ , \end{array} \tag{2.1}$$

où p_0 est le symbole principal de l'opérateur h-pseudodifférentiel. Il n'y a pas de problème pour trouver une solution unique pour (x,η) voisin de (x_0,η_0) et t assez petit. Le problème est qu'en général ce n'est pas suffisant. C'est ici qu'il peut être précieux de savoir microlocaliser, localiser en énergie, passer les caustiques ou utiliser la propriété de groupe de $\exp it\frac{P}{h}$ pour contourner la difficulté. Pour le terme principal de l'amplitude, on trouve la première équation de transport :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{i}\partial_t a_0(t,x,\eta) + \frac{1}{i}(\partial_\xi p_0 \partial_x)(x, \partial_x S) a_0 + p_1(x, \partial_x S) a_0 = 0 \\ a_0(0,x,\eta) = 1 \ . \end{array} \tag{2.2}$$

2.3 Formule de Weyl

Une des questions les plus étudiées est sans doute les estimations du comptage des valeurs propres données par la formule de Weyl.

On considère un intervalle fermé I tel que $p^{(-1)}(V(I))$ (où V(I) est un voisinage compact de I) est compact. Typiquement, si on considère l'opérateur de Schrödinger $-h^2\Delta + V(x)$, dont le symbole est $\xi^2 + V(x)$, on suppose que V est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, semiborné et que :

$$I \subset [\inf V, \underline{\lim}_{|x|\to\infty} V(x)[\ . \tag{2.3}$$

Il est intéressant de regarder à la fonction de comptage des valeurs propres contenues dans I.

$$N_h(I) = \sharp\{\lambda_j(h)\ ;\ \lambda_j(h) \in I\}\ . \tag{2.4}$$

$$\lim_{h\to 0} h^n N_h(I) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}_x^n\times\mathbf{R}_\xi^n\ ,\ p(x,\xi)\in I} dx d\xi\ , \tag{2.5}$$

Dans le cas où $I =]-\infty, E]$, il est plus généralement intéressant de regarder les moyennes de Riesz associée à un certain $s \geq 0$

$$N_h^s(E) = \sum_j (E-\lambda_j)_+^s\ . \tag{2.6}$$

La cas $s = 0$ correspond à la fonction de comptage. Il est alors naturel de regarder le comportement asymptotique lorsque $h \to 0$ de ces fonctions.
On a par exemple le résultat suivant (cf Helffer-Robert [HelRob90a], Ivrii-Sigal [IvSig95], Ivrii [IV])

Théorème 2.3.1 :
Soit E une valeur non critique de V. Alors

$$N_h^s(E) = (2\pi h)^{-n}\left(\int_{p_E(x,\xi)\leq 0} (-p_E(x,\xi))^s\ dx\cdot d\xi + \mathcal{O}(h^{\inf(1+s,2)})\right)\ , \tag{2.7}$$

with $p_E(x,\xi) = \xi^2 + V(x) - E$.

Remarque 2.3.1.1 :
Nous avons choisi d'utiliser les notations hamiltoniennes. Dans le cas de Schrödinger, on trouve après intégration par rapport à la variable ξ ,

$$N_h^s(E) = L_{s,n}^{cl} h^{-n}\left(\int_{V(x)\leq E} (E-V(x))^{s+\frac{n}{2}}\ dx + \mathcal{O}(h^{\inf(1+s,2)})\right)\ . \tag{2.8}$$

Si $s > 1$, le résultat peut être amélioré et un second terme en h^{-n+2} apparaît dans le développement et le calcul montre que ce coefficient est négatif.

Comme sous-produit, on obtient comme observé par Huxtable ([Hux88]) une version "régulière"de la conjecture de Scott ([Sco52]) sur laquelle nous reviendrons plus loin. Indiquons juste un énoncé dans cette direction.

Théorème 2.3.2 :
Soit μ_0 une valeur non-critique de $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ telle que

$$(2\pi)^{-n}\int_{p(x,\xi)\leq\mu_0} dx\cdot d\xi = 1\ . \tag{2.9}$$

On suppose que $V(x)$ est C^∞ et tend vers l'∞ lorsque $x \to \infty$.
Soit

$$\Sigma(h) = \sum_{1\leq j\leq h^{-3}} \lambda_j(h)\ . \tag{2.10}$$

Alors

$$\Sigma(h) = (2\pi h)^{-n} \cdot \left(\int_{p_{\mu_0}(x,\xi) \leq 0} p(x,\xi)\; dx \cdot d\xi \right) + \mathcal{O}(h^{-n+2})\,. \tag{2.11}$$

Le fait qu'il n'y a aucun terme en h^{-n+1} est spécifique du cas régulier. C'était un challenge pour l'analyse semi-classique de montrer l'existence d'un terme de Scott dans le cas singulier (singularité coulombienne). Nous y reviendrons!

2.4 Ensemble de fréquence

Comme nous l'avons déjà signalé c'est la notion d'ensemble de fréquence qui est la mieux adaptée dans le contexte semi-classique. Nous ne sommes plus sûr qui l'a créé dans le va-et-vient entre microlocal et semi-classique des années 70 (Maslov [MAS1], Hörmander [?] and [HO], Guillemin-Sternberg [GUST], Voros [Vor77], Chazarain [Chaz79a]) et nous renvoyons au livre de [ROB] pour les détails.
Si u_h est une famille de distributions tempérées (disons bornée dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour fixer les idées), on dira que (x_0, ξ_0) n'est pas dans l'ensemble de fréquence de la famille u_h s'il existe une fonction χ C^∞ à support compact telle que $\chi(x_0) = 1$ et telle que $\mathcal{F}_h \chi u_h$ est $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans L^2 au voisinage de ξ_0. Ici $\mathcal{F}_h$ est la transformée de Fourier semi-classique :

$$(\mathcal{F}_h u)(\xi) = (2\pi h)^{-n} \int \exp -i \tfrac{x \cdot \xi}{h} u(x) dx\,.$$

Une seconde définition plus h-pseudodifférentielle est de dire qu'il existe un opérateur h-pseudodifférentiel d'ordre 0 dont le symbole principal est elliptique en (x_0, ξ_0) et tel que $p(x, hD_x) u_h$ soit $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On notera qu'il est plus facile de voir sous cette forme que x et ξ jouent des rôles identiques. On notera par exemple que $\mathcal{F}_h P(x, hD_x) \mathcal{F}_h^{-1}$ est un h-pseudodifférentiel.

```
Analyser les autres d\'efinition de l'ensemble de fr\'equence: via les opd, bvia FBI. Mentionner l'existence de l'ensemble de fr\'equence analytique.
Dire plus sur les in'egalit\'es d'Agmon. En liaison avec
 le pseudo $\exp \frac{\phi}{h} P \exp - \frac{\phi}{h}$.
```

2.5 Localisation des vecteurs propres

Lorsqu'on regarde le cas de l'oscillateur harmonique $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2$ on sait que les fonctions propres sont de la forme $P_n(\frac{x}{\sqrt{h}}) \exp -x^2/h$. Elles sont donc exponentiellement localisées (lorsque $h \to 0$) en 0. Dans le cas général, il est très important d'avoir une bonne description de la décroissance des fonctions propres A PRIORI en dehors de la zône classiquement permise sans avoir d'expression explicite de la fonction propre. Deux approches peuvent être utilisées. La première est très adaptée à Schrödinger (mais peut-aussi être adaptée pour d'autres opérateurs Klein-Gordon, Dirac, Harper ...) et donne de la décroisssance exponentielle. Elle est basée sur les inégalités de Lithner-Agmon (cf Agmon [AG], Helffer-Sjöstrand [HelSj85a] et Simon [Sim83a]).

```
Developper.
```

La seconde est une application élémentaire du calcul h-pseudodifferentiel et donne par exemple la example the following statement,

Proposition 2.5.0.1 *:*
Soit E dans I et soit $(\lambda(h_j), \phi_{(h_j)}(x))$ une suite dans $I \times L^2(\mathbb{R}^n)$ où $\lambda(h_j) \to E$ et $h_j \to 0$ lorsque $j \to \infty$, $x \mapsto \phi_{(h_j)}(x)$ est un vecteur propre associé à $\lambda(h_j)$ de norme 1. Soit Ω relativement compact dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$V^{-1}(]-\infty, E]) \cap \bar{\Omega} = \emptyset \, .$$

Alors, il existe pour tout N, une constante $C_{N,\Omega}$ telle que

$$||\phi_{(h_j)}||_{L^2(\Omega)} \leq C_{N,\Omega} \cdot h_j^N \, .$$

On peut bien sûr donner des versions plus "microlocales" en terme d'ensemble de fréquences, avec des hamiltoniens plus généraux p (on montre la localisation dans les régions de $T^*\mathbb{R}^n$ ne rencontrant pas $p^{(-1)}(I)$).
Dans le cas où l'hamiltonien a un symbole holomorphe en ξ dans un voisinage tubulaire du réel dans $\mathcal{C}^n$, on peut généraliser les inégalités d'Agmon et mesurer de la décroisssance exponentielle.

2.6 Formule de Gutzwiller

```
Dire quelque chose sur la phase stationnaire. Sur l'approximation de
 $\exp it \frac P h$.
```

La formule de Gutzwiller a été établie formellement dans [Gut71] (voir aussi Balian-Bloch[7] [BalBlo74]). Elle a eu un énorme succès chez les physiciens et les chimistes pour calculer la répartition des valeurs propres et son utilisation va bien au delà des cas où elle est démontrée.
Elle apparait ensuite dans le contexte des asymptotiques en haute énergie dans les contributions de Colin de Verdière [Cdv73], Chazarain [Chaz77] et Duistermaat-Guillemin [DuGu95]. C'est une généralisation naturelle de la formule de Poisson.
Dans le contexte semi-classique, la première référence est sans doute Chazarain [Chaz76] et ensuite Helffer-Robert [HelRob81], [HelRob82a] and [HelRob86].
Quelques années plus tard, nous arrivons progressivement à l'énoncé donné ici avec des contributions de Guillemin-Uribe [GuiUr87], Meinrencken [Mein92], Paul-Uribe [PaUr91], Dozias [Doz94c]. Des contributions plus récentes correspondent au cas d'une énergie critique
Pour une valeur non-critique E, nous introduisons la surface d'énergie

$$W_E = \{w \in T^*\mathbb{R}^n | p_0(w) = E\} \tag{2.12}$$

[7] Notons que S. Zelditch a travaillé tout récemment la justification mathématique complète de ces travaux.

et nous introduisons

$$\Gamma_E = \{(t,w) \in \mathbb{R} \times W_E | \Phi^t_{p_0}(w) = w\}\ . \tag{2.13}$$

Théorème 2.6.1 *:*
Soit $P(h)$ un opérateur h-pseudodifferentiel dont le spectre est discret au voisinage de E. Nous supposons que

(Cl) La restriction du flot $\phi^t_{p_0}$ à W_E est propre [8] *.*

Alors il existe une suite de distributions $\gamma_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, nous avons

$$\sum_{\lambda_j(h) \in [E - \frac{\epsilon_0}{2}, E + \frac{\epsilon_0}{2}]} \phi(h^{-1}(\lambda_j(h) - E)) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j(\hat{\phi}) h^{-n+j} + \mathcal{O}(h^\infty) \quad \text{as } h \to 0\ . \tag{2.14}$$

De plus, les supports de ces distributions sont contenus dans l'ensemble des périodes des trajectoires périodiques contenues dans W_E.

```
Donner l'expression de
$\gamma_0 (\hat \phi) = \hat \phi(0) \int_{ W_E} d\mu_E\;.
$
Donner la formule de Combescure-Ralston-Robert \cite{ComRaRo}.
```

2.7 Bas du spectre et écart entre la première et la deuxième valeur propre

L'étude du bas du spectre pour un opérateur de Schrödinger $-h^2\Delta + V$ est à la frontière de beaucoup de disciplines (probabilités, physique mathématique, mécanique statistique). Une fois déterminé sous quelle condition le problème spectral est bien posé (caractère essentiellement autoadjoint), il est intéressant de connaître la première valeur propre, mais sans doute plus crucial de déterminer l'écart entre la deuxième valeur propre et la première.

2.7.1 Approximation harmonique

Même si cette approximation est très ancienne sa justification complète sans condition sur la dimension apparaît par exemple dans [HelSj84] et [Sim83b] (ceci est ultérieurement présenté de manière pédagogique dans [HE2] ou [CFKS]). Une première étude correspond à ce qui est appelé le cas à un puits. Le potentiel a

[8] Un flot ϕ^t, associé à un champ de vecteurs C^∞ X sur une variété W, est appelé propre si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
- L'ensemble $\Gamma = \{(t,w) \in \mathbb{R} \times W \mid \phi^t(w) = w\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R} \times W$.
- En tout point $\gamma = (t,w)$ de Γ, l'espace tangent à Γ est donné par

$$T_\gamma\Gamma = \{(\tau, v) \in \mathbb{R} \times T_wW \mid \tau X(w) + (D\phi^t)(w)\cdot v = v\}\ .$$

un unique minimum, qui est de plus supposé non-dégénéré. Le premier résultat est de démontrer la validité de l'approximation harmonique, qui dit que, pour tout N fixé, le comportement des N premières valeurs propres de $-h^2\Delta + V$ est donné, pour h assez petit, par celui des N premières valeurs propres de $-h^2\Delta_y + V_{min} + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Hess} V(x_{min}) y | y\rangle$ avec une erreur de l'ordre de $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$. On rappelle que le spectre de l'opérateur de référence (qui est un oscillateur harmonique) est explicitement connu.

2.7.2 Estimation de l'écart

Si ce résultat est relativement satisfaisant pour la compréhension du bas du spectre dans le cas d'un simple puits. Il est insuffisant pour comprendre ce qui se passe dans le cas d'un double puits, tout particulièrement dans la situation où le puits est symétrique.
Expliquons juste le début de l'étude. Si u_1 désigne la première fonction propre, dont on sait qu'elle peut-être choisie strictement positive [RESI], le principe du maximum pour la deuxième valeur propre peut s'écrire

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \inf_{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\,,\, \int \phi u_1^2 dx = 0} \frac{\int |\nabla \phi|^2 |u_1|^2 dx}{\int |\phi|^2 |u_1|^2 dx}\,.$$

Dans le cadre semi-classique, on montre que la première fonction propre est exponentiellement localisée près du minimum de V. Dans le cas d'un double puits symétrique ($V(-x) = V(x)$ ou $V(-x_1, x') = V(x_1, x')$), la première fonction propre est symétrique. En choisissant un ϕ impair égal à 1 au voisinage d'un des minimas et à -1 au voisinage de l'autre, on obtient facilement que $\lambda_2 - \lambda_1 = \mathcal{O}(\exp -\frac{S}{h})$. L'obtention de l'équivalent est une autre paire de manche. Bien sûr, on peut signaler que c'est un exercice de Landau-Lifschitz [LALI] et que cela remonte aux débuts de la mécanique quantique, mais les premiers essais de démonstration rigoureuse remontent à Kac [Ka62, Ka66b], en liaison avec le calcul d'un autre écart. Dans le cas de la dimension 1, je réfèrerai à Harrell [Har78] pour une estimation. En dimension > 1, B. Simon donne le comportement asymptotique du logarithme [Sim83b] et nous donnons un développement complet dans [HelSj84]. Dans les mêmes dates, il faut signaler les travaux de Maslov [Mas84] dont la rigueur n'est pas uniforme et ceux de Pankratova [Pank84]. On peut renvoyer au Chapitre 8 de [KOK] pour une présentation plus détaillée de l'histoire "mathématique" de l'histoire du calcul du splitting.
Cette histoire est loin d'être terminée et on peut citer une vingtaine d'articles traitant du contrôle de l'écart (voir les problèmes en grande dimension).

Des résultats plus pointus, mais dont la démonstration mathématique est difficile à vérifier sont obtenus par les physiciens. Nous renvoyons à Witten [Wit82], au livre de J. Zinn-Justin [ZJ] et à Coleman [Cole77] pour en particulier la méthode des instantons (cf Sordoni, Robert-Sordoni pour une analyse plus mathématique).

2.8 Systèmes intégrables et systèmes ergodiques

Comme cela apparaît clairement dans la thèse de Voros [Vor77], il y a deux cas extrêmes importants à considérer: le cas des systèmes intégrables et le cas ergodique, le cas de la dimension 1 étant un cas que l'on peut considérer comme à l'intersection, et qui peut-être traité par des méthodes spécifiques.

2.8.1 Spectre conjoint et systèmes intégrables

Dans ces travaux sur les variétés compactes, Y. Colin de Verdière suit la même voie [Cdv79a, Cdv80] avec ses travaux sur le spectre conjoint (développés dans le cadre semi-classique par D. Zoma [Zom84], A.M. Charbonnel [Char83a, Char83b, Char86, Char88, Char92], J. Toth [Tot98] , A.M. Charbonnel-Popov [CharPo99], C. Anne-A.M. Charbonnel [AnCha00], San Vu Ngoc [Vu98, Vu99, Vu00a, Vu00b, Vu01a, Vu01b], Toth-Zelditch [TotZel02]...).
Notons que l'effet tunnel pour les systèmes intégrables est plutôt mal compris [Tot98, Mart92, Mart94b, Mart97], lorsqu'on ne peut pas séparer les variables pour se ramener à des problèmes en dimension 1.

2.8.2 Systèmes ergodiques

Il s'agit d'un problème typiquement semi-classique en ce sens qu'il essaye de voir quelle est l'influence sur le spectre (objet quantique) de la propriété que le flot est ergodique (hypothèse "classique").
Nous présentons ici les résultats de [HelMarRob87] qui correspondent à une transcription semi-classique de résultats obtenus par Shnirelman [Schni74] puis développés par S. Zelditch [Zel87] et Y. Colin de Verdière [Cdv85]. D'autres extensions ont ensuite été développées par P. Gérard et E. Leichtnam [GerLei93] et par S. Zelditch et M. Zworski [ZelZw96] pour des billards ergodiques. La preuve a été formalisée dans un contexte plus abstrait par S. Zelditch [Zel96]. Mentionnons aussi les résultats obtenus par M. Combescure et D. Robert [ComRo94] en liaison avec la propriété de mélange. Ce sujet a été ces dernières années extrêmement populaire, sous le vocable "chaos", mais il se caractérise par un très grand nombre de simulations numériques, dont il est impossible de faire un survey, et de finalement assez peu de résultats mathématiques (en comparaison avec le nombre de publications sur le sujet) (voir toutefois [Deb95]). Nous nous contentons ici de la présentation d'un résultat de base.
On prend des hypothèses standards assurant que le problème spectrale est bien posé pour l'Hamiltonien $\mathrm{Op}_h(p)$. On introduit de plus que, pour une certaine valeur non critique E, on a

$$(H10) \quad \sigma_E(\{(x,\xi)\in W_E \mid \exists t\neq 0, \phi^t(x,\xi)=(x,\xi)\})=0\ . \tag{2.15}$$

Ici σ_E est la mesure de Liouville sur W_E. Le premier résultat est une amélioration du résultat sur la fonction de comptage (lorsque I est petit).

Théorème 2.8.1 *:*
Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de p_0 et E telle que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ and $\exists C_\epsilon > 0$ tel que pour tout intervalle $I \subset]E - \eta, E + \eta[$ et pour tout $h \in]0, h_0]$

$$|\sharp\{\sigma(P) \cap I\} - (2\pi h)^{-n} \int_{p_0^{-1}(I)} dx \cdot d\xi| \leq \epsilon C h^{1-n} + C_\epsilon h^{2-n} \ . \tag{2.16}$$

Ce théorème est essentiellement établi dans [PetRob85], utilisant des idées de Duistermaat-Guillemin [DuGu95] et Ivrii [IV]. En particulier, nous obtenons que, lorsque $I = [E - Ah, E + Bh]$ avec $B + A > 0$, nous avons

$$\sharp\{\sigma(P) \cap I\} = (2\pi h)^{-n} \int_{p_0^{-1}(I)} dx \cdot d\xi \ (1 + o(1)) \ . \tag{2.17}$$

Lorsque E est critique nous renvoyons à Brummelhuis-Paul-Uribe [BruPaUr95], [Kh96], [?], [Cam02], Colin de Verdière-Parisse [CdvPa94a], [CdvPa94b] en relation avec les résultats d' Helffer-Sjöstrand [HelSj86a] sur l'opérateur de Harper. Si E_I est le projecteur orthogonal sur l'espace propre de P associé à I, on peut microlocaliser de la mmanière suivante

Théorème 2.8.2 *:*
On garde les hypothèses standard et (2.15). Soit $a \in S^0$, alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend uniquement de p_0 et E telle que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ and $\exists C_\epsilon > 0$ tels que pour tout intervalle $I \subset]E - \eta, E + \eta[$ et pour tout $h \in]0, h_0]$

$$|\mathrm{Tr}\ (a^w(x, hD_x)E_I) - (2\pi h)^{-n} \int_{p_0^{-1}(I)} a(x, \xi)\ dx \cdot d\xi| \leq \epsilon C h^{1-n} + C_\epsilon h^{2-n} \ . \tag{2.18}$$

Soit $(\lambda_j(h))_{j\geq 1}$ la suite de valeurs propres contenue dans $[E - \epsilon_0, E + \epsilon_0]$ et $\phi_{j,(h)}$ la suite correspondante de vecteurs propres normalisée. Soit $I(h)$ un intervalle $[\alpha(h), \beta(h)]$ tel que $|\beta(h) - \alpha(h)| \geq \delta h$ avec $\delta > 0$, $\beta(h)$ et $\alpha(h)$ tendant vers E lorsque $h \to 0$. Soit enfin

$$\Lambda(I, h) = \{j \mid \lambda_j(h) \in I\} \ .$$

Si on remarque que, par définition de la mesure de Liouville,

$$\tfrac{\partial}{\partial \mu} \left(\int_{\nu \leq p_0(x,\xi) \leq \mu} a(x, \xi) dx \cdot d\xi \right) = \int_{W_\mu} a d\sigma_\mu \ , \tag{2.19}$$

nous obtenons que

$$\sum_{j \in \Lambda(I,h)} \langle a^w(x, hD_x)\phi_{j,(h)}, \phi_{j,(h)}\rangle = (2\pi h)^{-n}(\beta(h) - \alpha(h)) \ \left(\int_{W_E} a d\sigma_E + o(1) \right) \ . \tag{2.20}$$

On obtient alors que :

Théorème 2.8.3 :
Sous les mêmes hypothèses avec en particulier (2.15), nous avons , pour tout $a \in S^0$*,*

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sum_{j\in\Lambda(I,h)}\langle a^w(x,hD_x)\phi_{j,(h)}\ ,\ \phi_{j,(h)}\rangle}{\sharp\Lambda(I,h)}\right)=\int_{W_E} a\ d\sigma_E\ . \tag{2.21}$$

Nous ajoutons maintenant l'hypothèse plus spécifique d'ergodicité sur W_E,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a(\phi^t(x,\xi))\ dt=\int_{W_E} a d\sigma_E\ , \tag{2.22}$$

pour presque tout (x,ξ) de W_E (par rapport à la mesure de Liouville) et pour tout a dans $C^0(W_E)$. Cette hypothèse implique en fait (2.15).

Nous considérons la mesure définie par

$$a\mapsto\int a d\mu_j^h=\langle a^{AW}(x,hD_x)\phi_{j,(h)}\ ,\ \phi_{j,(h)}\rangle \tag{2.23}$$

Nous observons ici que nous avons remplacé $\langle a^w(x,hD_x)\phi_{j,(h)}\ ,\ \phi_{j,(h)}\rangle$ par $\langle a^{AW}(x,hD_x)\phi_{j,(h)}\ ,\ \phi_{j,(h)}\rangle$, où a^{AW} correspond à la quantification antiWick [BeRe71] qui a comme vertu principale de respecter la positivité. Ceci conduit à une erreur en $\mathcal{O}(h)$ qui ne pose pas de problème pour (2.21) mais est essentiel pour que $a\mapsto\int a d\mu_j^h$ définisse une mesure. Il est alors facile de montrer la dernière assertion en observant qu'on a affaire à une distribution positive.
On a maintenant les deux théorèmes :

Théorème 2.8.4 :
Sous les mêmes hypothèses dont (2.15), on a :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sum_{j\in\Lambda(I,h)} d\mu_j^h}{\sharp\Lambda(I,h)}\right)=d\sigma_E\ , \tag{2.24}$$

où la convergence est la convergence vague pour les mesures de Radon.

Théorème 2.8.5 :
Sous les mêmes hypothèses avec de plus (2.22) et si $n\geq 2$*, on a* $\forall\epsilon>0$ *et* $\forall a\in S^0$*,*

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sharp\{j\in\Lambda(I,h)\ |\ |\int a\ d\mu_j^h-\int a\ d\sigma_E|<\epsilon\}}{\sharp\Lambda(I,h)}\right)=1\ . \tag{2.25}$$

La preuve utilise en particulier la version semi-classique du théorème d'Egorov (cf [HelMarRob87] pour les détails).

Après un peu d'analyse et des extractions de sous-suites, le dernier théorème donne :

Théorème 2.8.6 :
Sous les mêmes hypothèses et si $I(h)$ *est un intervalle tel que* $|I(h)|\geq\delta h$ *et* $I(h)\to E$ *alors*

$$\exists M(h)\subset\{j\ |\ \lambda_j(h)\in\sigma(P)\cap I(h)\} \tag{2.26}$$

tel que

$$\frac{\sharp M(h)}{\sharp(\sigma(P)\cap I(h))} \to 1 \quad \text{as } h \to 0 \;, \tag{2.27}$$

et, pour tout $a \in S^0$ *et toute application* j*:*

$$]0, h_0] \ni h \mapsto j(h) \in M(h)$$

nous avons

$$\langle a^w \phi_{j(h),(h)}, \phi_{j(h),(h)} \rangle \to \int_{W_E} a d\sigma_E \quad \text{lorsque } h \to 0 \;, \tag{2.28}$$

uniformément par rapport à l'application j*.*

Le corollaire suivant est sans doute plus facile à visualiser :

Corollaire 2.8.6.1 *:*
Pour tout ouvert régulier Ω*, nous avons*

$$||\phi_{j(h),(h)}||_{L^2(\Omega)} \to \int_{\pi^{-1}(\Omega)\cap W_E} d\sigma_E \quad \text{as } h \to 0 \;. \tag{2.29}$$

Ici π est la projection de $T^*\mathbb{R}^n$ sur sa base $\mathbb{R}^n$.
Bien sûr, nous n'avons raconté ici que le début de l'histoire. Il est intéressant de noter ici qu'il y a un aspect "mesure" qui apparaît et qui va être une motivation pour le développement de la notion de mesure semi-classique par P. Gérard (cf par exemple l'exposé à Bourbaki de N. Burq [Burq99S].

2.9 Résonances et Scattering

La théorie des résonances correspond à l'étude des poles d'une extension méromorphe convenable de la résolvante. Ces pôles ne sont plus nécéssairement des valeurs propres mais peuvent être complexes. Une des premières manières de définir les résonances est d'utiliser la méthode de dilatation analytique due à Aguilar-Combes [AgCo71] et Balslev-Combes [BalCom71]. On introduit l'opérateur de dilatation analytique U_θ défini par $(U_\theta f)(x) = \exp n\theta f(\exp \theta x)$. Pour θ réel, $U_\theta^{-1} P U_\theta$ est unitairement équivalent à P mais quand on complexifie θ, et sous certaine condition sur P, on peut montrer que dans certains secteurs du plan complexe l'opérateur P_θ admet, en plus des valeurs propres réelles éventuellement plongées dans le spectre continu de l'opérateur, de nouvelles valeurs propres (essentiellement indépendantes de θ) qui sont appelées résonances. Cette théorie a été développée par beaucoup d'auteurs Herbst-Simon [HerbSim], Cycon [?]. Le point de vue semi-classique n'apparait en mathématiques qu'en 1980 avec le travail de Harrell-Simon [HarSim80] qui correspond à une étude en dimension 1. C'est à partir de 1984 que se développent les études semi-classiques des résonances avec les travaux de Combes-Duclos-Klein-Seiler [CoDuKlSe87], Helffer-Sjöstrand [HelSj86c] qui s'appuient sur une définition plus microlocale des résonances (déformation de variétés I-lagrangiennes) et Hislop-Sigal [HisSig89]. Une supériorité de [HelSj86c] est l'obtention d'un équivalent de la partie imaginaire de la résonance dans le cas de la situation du puits dans une isle (résonance de forme) avec comme conséquence la démonstration de la formule de Bender-Wu pour l'effet Zeeman pour l'atome d'hydrogène [Av82, Av81]. Tous ces travaux sont le point de départ de nombreuses contributions en liaison avec la théorie du scattering, ou en combinaison avec la théorie de Born-Oppenheimer ([AveSe75, ?, ?, ?], Klein-Martinez-Seiler-Wang [KMSW92], ou des perturbations d'un Schrödinger périodiques [Klo91, Klo97], l'opérateur de Dirac [Par91] et de nombreux élèves de J. Sjöstrand, A. Grigis, D. Robert et A. Martinez. Mes références sont très incomplètes (en particulier par ce que je ne cite pas les résultats en grande énergie). Je voudrais aussi mentionner dans les années qui ont suivi les travaux de Gérard et Sjöstrand [GerSj87, GerSj88] ou de Sjöstrand seul [Sj87]sur les résonances engendrées par une trajectoire hyperbolique, tous les travaux consacrés au comptage semi-classique des résonances (Sjöstrand, Vodev, Zworski, J.F. Bony, V. Petkov), les résultats sur la formule de Breit-Wigner (D. Robert, C. Gérard, A. Martinez, V. Petkov, Bruneau .....). Je voudrais aussi mentionner les contributions de N. Burq [Burq02b] sur la résolvante et qui débouchent dans le cadre semi-classique sur des minorations des parties imaginaires des résonances. Comme on le voit, ce domaine reste extrêmement actif.

2.10 Méthodes WKB en dimension 1

La dimension 1 tient une place à part. D'une part, elle relève de la théorie des équations différentielles qui a une histoire beaucoup plus ancienne, d'autre part on peut espérer des propriétés beaucoup plus fines des solutions. Je suis ici incapable de donner une liste raisonable et consistante de toutes les références. Mentionnons toutefois deux courants qui ont été développés en France. D'une part, il nous faut mentionner tout ce qui tourne autour des méthodes semi-classiques exactes et des propriétés de résurgence où A. Voros, J. Ecalle puis F. Pham et ses collaborateurs ou élèves ont contribué. Nous renvoyons au livre [CAPH] pour des références sur ce sujet. Il me semble que toutefois ce courant s'est peu mélangé avec les autres courants semi-classiques et a plutôt développé des liens avec d'autres secteurs des mathématiques comme l'analyse complexe.

En interaction beaucoup plus forte avec les autres courants, je mentionnerai V. Buslaev (et son école de St-Petersburg), A. Grigis, T. Ramond et d'autres étudiants de Paris-Nord qui, en profitant des techniques WKB en dimension 1, ont obtenu des résultats très fins sur les sujets abordés dans les autres paragraphes (résonances, écart, largeur des bandes,....). L'originalité est ici un bon mariage entre les techniques équations différentielles (déjà anciennes) et les techniques plus microlocales. On doit mentionner aussi dans cet esprit les travaux de Buslaev-Fedotov sur Harper, Buslaev-Grigis sur Wannier-Stark et plus récemment de Fedotov-Klopp. Ces calculs en dimension 1 fournissent également un bon laboratoire d'étude avant de se lancer dans le cas de la dimension > 1.

2.11 Méthodes WKB générales

Là aussi la construction de solutions WKB a une longue histoire commune avec l'histoire de l'optique géométrique. Les physiciens utilisent sans aucune retenue des solutions de ce type $a(x,h)\exp i\frac{\phi(x)}{h}$ ou des versions plus élaborées traitant le passage de points tournants (fonction d'Airy). Nous avons déjà parlé de Maslov et de Leray avec la construction de solutions Lagrangiennes. Il y a deux points qu'il faut ici mentionner. Il n'est pas toujours vrai (contrairement à la dimension 1) que les fonctions propres soient toujours approchées par de telles solutions, c'est essentielllement le cas pour les systèmes intégrables et pas du tout le cas pour le cas ergodique. La construction WKB des fonctions propres ne saurait être considérée commme la panacée universelle pour les fonctions propres. Par ailleurs, chercher des objets “oscillants” n'est intéressant que lorsque la zône classiquement permise n'est pas réduite à un point, ou à une réunion de points. Dans le cas du fond de puits (un seul puits), ce sont souvent des solutions de la forme $a(x,h)\exp -\frac{\phi(x)}{h}$ avec ϕ réel positif qui vont constituer une bonne approximation (pas partout! mais dans les zones importantes). L'analyse microlocale qui apparaît ici est plutôt celle correspondnat au symbole $(x,\xi)\mapsto p(x,i\xi)$. Cela marche bien pour Schrödinger ($p(x,\xi)=\xi^2+V(x)$) moins bien pour Schrödinger avec champ magnétique ($p(x,\xi)=(\xi-A(x))^2+V(x)$). Un autre aspect de l'approximation WKB, comme nous l'avons déjà expliqué, est l'approximation du noyau distribution $K(t,x,y;h)$ de $\exp it\frac{P}{h}$ par des objets de la forme $\int \exp i(S(t,x,\eta)-y\eta)/ha(t,x,\eta;h)d\eta$. Les ingrédients sont alors la résolution d'une équation eiconale, d'équations de transport avec des contraintes du type “temps petit” ou du type: possible uniquement localement, microlocalement ou après localisation en énergie (utilisation du calcul fonctionnel). Selon les problèmes, il reste alors à montrer comment ces objets formels approchent des objets bien définis par la théorie spectrale: estimations des restes et comment on peut déterminer à partir des objets formels les développements principaux. Nous renvoyons aux travaux fondateurs de J. Chazarain [Chaz79b]- [Chaz80b] et aux livres de D. Robert [ROB], V. Ivrii [IV] et M. Dimassi et J. Sjöstrand [DISJ] et pour l'école de Maslov au livre rigoureux de Fedoryuk-Maslov [FEMAS] pour ces questions désormais classiques. Les questions les plus récentes abordées (cf D. Robert, S. Debièvre ..) concernent l'approximation en temps très longs par rapport à h où on atteint des régimes chaotiques (pour des systèmes quantiques génériques).

2.12 Du fond de puits aux états excités

... Théorie KAM...

Autant l'étude du fond de puits est relativement aisée grâce à l'approximation harmonique autant cela devient plus difficile quand on s'éloigne du fonds du puits. La théorie KAM et plus généralement la mécanique classique joue un rôle important. Il est impossible de citer raisonablement ce sujet, nous renvoyons à (Référence à trouver !!) pour les aspect classiques et au travail de J. Sjöstrand [Sj92a] pour la théorie KAM quantique (voir aussi du côté des travaux de J.

Bellissard).

Points critiques...
Si l'étude des minimas est maintenant bien comprise, le rôle des autres points critiques laisse encore beaucoup de points mal connus. Nous renvoyons à Sjöstrand, Briet-Combes-Duclos, Brummelhuis-Paul-Uribe, B. Camus.. pour différentes études. Voir aussi Helffer-Sjöstrand (Harper 3), März, Ramond, Colin de Verdière-Parisse, ... pour l'étude du point selle en dimension 1 d'ewspace....

Des questions semi-globales se posent pour le problème dit du chameau (avec analyse des résonances, cf Thèse de E. Amar-Servat, Fujie-Ramond, Bony-Fujie-Ramond-Zerzeri).
Citons Kaidi-Kerdelhue [KaiKe00].

2.13 Des résonances aux problèmes non auto-adjoints

2.14 Schrödinger périodique et perturbations

A compléter: voir le livre de Dimassi-Sjöstrand.
Outassourt [Out87], Simon [Sim84b]
Perturbations: Outassourt, Klopp [Klo91, Klo97], Carlsson [Car90], [Kar02] ....

2.15 Mesures semi-classiques

A compléter: Voir P. Gérard [GerP91] et ....

C'est l'analogue dans le cadre semi-classique de la mesure de défaut microlocale introduite par P. Gérard et L. Tartar.

Exposé à Bourbaki de N. Burq ([Burq97S]).

Quelques noms: Mauser, Markovich, Golse, Fermanjan-Gérard,....

2.16 Nonlinear semi-classical analysis

Jona-Lassinio-Pricilla- Sjostrand [JoPrSj95].
Buslaev-Perelman, Perelman [Per01].
Grecchi-Martinez.
Grecchi-Martinez-Sachetti.
Oh [Oh90, Oh98]... Floer-Weinstein [FlWe86]

2.17 Et encore...

Techniques de déformation d'algèbres (écoles de Dijon ? Lyon,....).
Références: M.A. Rieffel [Rie99S].

3 Analyse semi-classique étendue: méthodes semi-classiques

Si l'analyse semi-classique était au départ l'étude de la limite lorsque la constante de Planck tend vers 0, la théorie a montré sa puissance d'application dans beaucoup d'autres problèmes. Nous parlerons alors de méthodes semi-classiques. Ceci n'est nullement une découverte des mathématiciens car cette idée apparait dans tous les autres ouvrages de physique. La notion d'Hamiltonien "effectif" ou de constante de Planck "effective" est présente. Par extension nous nous référerons à l'analyse semi-classique (pour un certain paramètre h) chaque fois que les mêmes méthodes s'appliqueront. Ce paramètre pourra-t-être $h = N^{-\frac{1}{3}}$ (où N est un nombre de particule), un flux (dans les problèmes avec champ magnétique) ou l'inverse d'un flux, ou un rapport entre deux masses (Approximation de Born-Oppenheimer) ou la température , ou encore l'inverse d'un nombre de spin ou celui du temps..... Cela pourra aussi être un paramètre introduit artificiellement, comme dans l'approche de Witten.

3.1 Asymptotique haute fréquence

C'est une théorie en elle-même !! Notons juste, pour donner un exemple très simple, que l'étude de $-\Delta + c(x)\partial_t^2$, conduit quand on cherche des solutions de la forme $\exp i\gamma t\ u(x)$ à l'étude de solutions nulles de $-\Delta - \gamma^2 c(x)$. Dans le régime grand γ, on tombe immédiatement sur des problèmes semi-classiques.
J'avoue ici ne pas savoir comment établir une liste de références significatives.

3.2 Semi-classique et comportement des grandes valeurs propres

3.2.1 La réduction générale

Lorsque typiquement on veut étudier un problème spectral en grande énergie relatif au Laplacien, on peut se ramener au problème semiclassique en considérant $-h^2\Delta$. On tombe ainsi sur un problème semi-classique "homogène". De ce point de vue, l'analyse grande-énergie apparaît comme un cas particulier de l'analyse semi-clasique, où on ajoute une hypothèse d'homogénéité en h.

Ce point de vue est devenu de plus en plus utilisé dans l'Ecole de Sjöstrand-Zvorski.... en théorie du Scattering et par Ivrii [IV] en théorie spectrale classique.

3.2.2 Equations de Hill

L'étude du spectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ avec V périodique non constant montre que celui-ci est constitué de bandes séparés par des trous dont la taille tend vers 0 quand on tend vers 0. L'estimation de la taille de ces trous est en fait une estimation d'effet tunnel microlocal. Après s'être ramené à une famille de problèmes sur le tore, on peut en effet artificiellement le regarder comme l'opérateur semi-classique $-h^2(\frac{d}{dx} - i\theta)^2 + h^2 V(x)$ dont on examine quand $h \to 0$ le

spectre proche de 1. La premère localisation se trouve dans $|\xi - \theta|^2 = 1$ qui a deux composantes connexes.
Références: Grigis [Gri87], Ramond [Ram93], März [Marz92], Horn [Hor91], Keller-Weinstein [KeWe85] ... en connexion avec les résultats semi-classiques [Out84, Out85, Out86], [Sim84b].

3.3 Approximation de Born-Oppenheimer

C'est un problème qui remonte au tous débuts de la mécanique quantique [BoOp27]. Expliquons de quoi il s'agit sur un modèle. On considère

$$-\frac{1}{M}\Delta_x - \frac{1}{m}\Delta_y + V(x,y)\ .$$

Il y a deux particules: la première est lourde par rapport à l'autre. Le paramètre semi-classique est ici $h = \sqrt{\frac{m}{M}}$. Le début du traitement est alors essentiellement le suivant. Supposons $m = 1$ et regardons donc

$$-h^2\Delta_x - \Delta_y + V(x,y)\ .$$

Pour comprendre le bas du spectre, on commence par regarder l'opérateur $-\Delta_y + V(x,y)$ dépendant du paramètre x et on désigne par $\lambda_1(x)$ la plus petite valeur propre (dont l'existence est démontrée sous des hypothèses convenables). Il s'agit alors de montrer que la compréhension du bas du spectre (effet tunnel inclus) est obtenue à partir de la compréhension du spectre de l'hamiltonien "réduit" :

$$-h^2\Delta_x + \lambda_1(x)\ .$$

`Dire un mot sur la m\'ethode de Feschbach, la m\'ethode de Grushin et sur le caract\`ere microlocal de la r\'eduction.`

Lorsqu'on regarde des niveaux excités, le croisement éventuel des valeurs propres conduit à l'étude de systèmes posant de nombresuses questions intéressantes.

Références : Aventini-Seiler [AveSe75], Combes [Com75], Combes-Seiler [ComSei78, ComSei80], Martinez [Mart91], [MartMes94], [MartSord02], Klein-Martinez-Wang [KMW93, KMW97], Klein-Martinez-Seiler-Wang [KMSW92], Jecko-Klein-Wang....

`Dire quelque chose  sur Landau-Zener et l'adiabatique.`

Tout ceci est repris plus récemment avec un point de vue un peu différent dans l'école de Grenoble (Colin de Verdière, Joye (parfois en collaboration avec Hagedorn). Faure), dans l'Ecole de Munich (Spohn, Teufel) ou à Paris avec les techniques de mesures semi-classiques (P. Gérard, C. Fermanjan).

3.4 Stabilité de la matière

3.4.1 Conjecture de Scott

On considère le modèle sous la forme (Cf [LieSim77a], [Hux88])

$$H(Z) = \sum_{i=1}^{Z}\left(-\Delta_{x_i} + Z^{\frac{4}{3}}\mathcal{V}(Z^{\frac{1}{3}}x_i)\right) + \alpha\sum_{i\neq j}\frac{1}{|x_i - x_j|} \tag{3.1}$$

où $\mathcal{V}$ est le potentiel de Coulomb $x \mapsto -\frac{1}{|x|}$. On a donc supposé que le nombre de particules N est égal à la charge Z (cas Neutre).
Dans le cas où $\alpha > 0$, une théorie de Thomas-Fermi permet de déduire l'analyse (modulo le contrôle d'un terme d'erreur) à l'étude de

$$\tilde{H}(Z) = \sum_{i=1}^{Z} \left(-\Delta_{x_i} + Z^{\frac{4}{3}} \tilde{\mathcal{V}}(Z^{\frac{1}{3}} x_i) \right) , \tag{3.2}$$

où $\tilde{\mathcal{V}}$ est le potentiel de Thomas-Fermi.
On a alors à compter la somme des Z premières valeurs propres de $\tilde{H}(Z)$ sur $\mathbb{R}^3$.
Mais si nous faisons un changement d'échelle $x \mapsto Z^{\frac{1}{3}} x$ et si nous posons $h = Z^{-\frac{1}{3}}$, nous nous retrouvons avec l'opérateur

$$Z^{\frac{4}{3}}(-h^2\Delta + \tilde{\mathcal{V}}) .$$

Nous avons par conséquent à étudier la somme des h^{-3} premières valeurs propres de l'opérateur $-h^2\Delta + \tilde{\mathcal{V}}$.
C'est un problème semi-classique qui peut être traité par des techniques$h$-pseudo-différentielles si le potentiel est régulier et sous une hypthèse de valeur non critique [HelRob90a]. Le cas physique n'est malheureusement pas régulier. D'autres méthodes ont été utilisées par [Hug90], [SieWe89a, SieWe89b] pour résoudre ce problème qui s'appuient sur le caractère radial du potentiel dans le cas d'un atome. Pour le cas d'une molécule, Ivrii-Sigal ([IvSig95]) ont montré comment l'analyse multi-échelle développée par V. Ivrii [IV] permettait l'usge de techniques h-pseudo-différentielles dans le cas singulier. Une autre méthode (mais qui n'a pas abouti jusqu'à maintenant) est de voir comment on peut éliminer la singularité par une procédure de désingularisation (cf [HKSW92], [HelSie96]).
Là aussi, il y a une énorme littérature dont il est impossible de dresser une liste complète. Signalons que le cas avec champ magnétique a donné aussi lieu à des études semi-classiques récentes avec de nombreuses contributions (avec combinaison variée de collaborations) de (Erdos, Lieb, Solovej, Yngason, Sobolev, Ivrii, Graf, Fefferman, Fournais ...) [Erd95, Sob94, LySoYn94a, LySoYn94b], [Iv96, Iv98, Iv99] et [Fou98]-[Fou03].

3.4.2 Les inégalités de Lieb-Thirring

Dans le cas des potentiels réguliers, nous avons vu que la quantité $h^n N_h^s(E)$ tendait lorsque $h \to 0$ vers $L_{s,n}^{cl} \times \left(\int_{V(x) \leq E} (E - V(x))^{s+\frac{n}{2}}\, dx \right)$. Pour d'autres questions comme la stabilité de la matière, on est plus intéressé par l'existence de constantes $M_{s,n}$ telles que

$$h^n N_h^s(E) \leq M_{s,n} \left(\int_{V(x) \leq E} (E - V(x))^{s+\frac{n}{2}}\, dx \right) \tag{3.3}$$

pour tout V et tout h.
La meilleure constante $M_{s,n}$ est notée $L_{s,n}$. Le résultat semi-classique donne l'inégalité

$$L_{s,n} \geq L_{s,n}^{cl} \ .$$

Une question ouverte est la conjecture de Lieb-Thrring :
Avons-nous $L_{1,3} = L_{1,3}^{cl}$?
Il y a eu beaucoup d'activités et de beaux résultats depuis 25 ans mais tout particulièrement ces dernières années :
Aizenman-Lieb [AiLi78], Cwickel [Cw], L.Erdös [Erd95], Glaser-Grosse-Martin [GGM78], Grosse [Gro77], Helffer-Parisse [HelPa90], Helffer-Robert [HelRob90a], [HelRob90b], E. Lieb [Lie80]-[Lie92], Lieb-Thirring [LieTh76], [LieTh76], Li-Yau [LiYa83], Martin [Mar72], [Mar90], Rozenbljum [Roz72]-[Roz77], A. Sobolev [Sob95], T. Weidl [Weid96], de la Breteche [DeBr], Laptev-Weidl [LapWe00], Benguria-Loss [BeLo00], Hundertmark-Laptev-Weidl [HLW00], ... Même si la question n'est pas semi-classique, l'analyse semi-classique pourrait être efficace dans la recherche de contre-exemples à la conjecture, par recherche d'un second terme invalidant cette conjecture. Des travaux récents dans cette direction de Butler [But02b] et de Bruneau [Brun99a] n'ont pas permis de conclure.

3.5 La théorie de Witten

Si f est une fonction de Morse sur une variété compacte, les inégalités de Morse disent que le nombre de points critiques d'indice i m_i doit majorer le i-ème nombre de Betti b_i de la variètè. La démonstration semi-classique proposée par E. Witten dans [Wit82] est d'introduire le complexe $d_{f,h} = \exp -\frac{f}{h}(hd) \exp \frac{f}{h}$ (où h est un paramètre **artificiel** et son Laplacien associé $(d_{f,h} + d_{f,h}^*)^2$. L'analyse semi-classique (approximation harmonique) donne alors le résultat. Une étude beaucoup plus fine de l'effet tunnel permet de mettre en évidence le rôle du complexe d'orientation. Nous renvoyons à [Wit82, HelSj85c, Hel88a, HelSj88a, ElsWa86, CFKS, HE2, Bis86, BisLeb91, Burg97, ZH] pour de la littérature sur ce sujet.
Voir aussi plus récemment autour de Mathai, Shubin ...

3.6 Physique du Solide

3.6.1 La conjecture des 10 Martinis

Si on considère deux opérateurs unitaires S et T sur un Hilbert $\mathcal{H}$ tel que :

$$TS = \exp i\Phi ST \ ,$$

on s'intéresse au spectre de l'opérateur :

$$P = S + S^* + T + T^* \ .$$

Ce spectre dépend crucialement des propriètés de $\frac{\Phi}{2\pi}$. La conjecture des 10 Martinis est due à M. Kac et prédit que le spectre est un Cantor si $\frac{\Phi}{2\pi}$ est

irrationnel.
L'analyse semi-classique a permis une résolution partielle de cette conjecture. Basée sur un schéma heuristique de Wilkinson, qui nous avait été communiqué par J. Bellissard, la preuve due à B. Helffer et J. Sjöstrand [HelSj88b, HelSj88c, HelSj88d, HelSj89, HelSj90a, HelKerSj90]a permis de démontrer ce résultat pour une large famille de Φ. Plus précisément, nous avons montré qu'il existait une constante C tellle que si

$$\frac{\Phi}{2\pi} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}}$$

avec $q_j \geq C$, alors le spectre de P est un Cantor. La remarque cruciale est qu'ici, on peut prendre $T = \exp ix$, $S = \exp i\Phi D_x$, et qu'on a à faire une analyse semi-classique de l'opérateur :

$$\cos(\Phi D_x) + \cos x \ .$$

Dans l'application de la physique des solides, le paramètre semi-classique représente un Flux.

3.6.2 Approximation de Peierls

L'opérateur précédent apparaît dans un très grand nombre de contextes différents en physique solide. Esquissons comment il est apparu dans le régine appelé champ magnétique faible. On considère l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant et potentiel pérriodique (dans $\mathbb{R}^2$) :

$$P_A(h) = (hD_{x_1} - A_1)^2 + (hD_{x_2} - A_2)^2 + V(x_1, x_2) \ . \tag{3.4}$$

Lorsque $A = 0$, la théorie de Floquet montre que le spectre est une réunion de bandes B_j chacune étant décrite par une valeur propre de Floquet $\lambda_j(\theta, h)$ qui est une fonction périodique de θ.

On peut montrer (substitution de Peierls) que si h est assez petit, que le spectre près de la première bande est déterminée par le spectre d'un B-opérteur pseudo-différentiel dont le symbole principal est λ_1.

De plus, sous des hypothèses de symétrie additionnelle, plus des hypothèses génériques sur les minimas de V, $\lambda_1(\theta)$ est proche, à un facteur multiplicatif près mesurant l'effet tunnel, de $\cos\theta_1 + \cos\theta_2$. Autrement dit, on retombe sur une perturbation du modèle de Harper. Notons qu'en dimension 3, l'effet de Haas-Van Halphen a été mathématiquement justifié. Les principales références sont [Bel87, HelSj89, HelSj90b, Ko59, Lan30, Lut51, Nen88, Ons52, Pei33, SonWi51, Wil87]. On notera qu'un calcul de type Weyl apparait dans les travaux de Peierls [Pei33] (1933).

3.6.3 Approximation champ magnétique fort

Esquissons maintenant comment il apparaît dans le régime appelé champ magnétique fort. On suit ici des idées de J. Bellissard et de [HelSj89] (cf aussi [BelNa90]). Le point de départ est l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant B, dont on sait que le spectre est discret constitué de niveaux de landau $(2n+1)|B|$. On perturbe maintenant l'opérateur par un potentiel V semi-borné. Alors le spectre près du premier niveau de landau est décrit modulo $\mathcal{O}(|B|^{-1})$ par l'opérateur h-pseudodifférentiel : $|B| + V(t, hD_t)$ avec $h = |B|^{-1}$.

3.6.4 Approximation du tight binding (=liaison forte)

On regarde ici des opérateurs de la forme :

$$-\Delta + V(x - Re_1) + V(x + Re_1) \; ,$$

pour ce qui concerne le double puits et

$$-\Delta + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} V(x + R\alpha)$$

pour le cas périodique. Une référence côté mathématique est la thèse de Daumer [?, Da96] (voir aussi Bellissard et une abondante littérature physique).

3.7 Supraconductivité

La théorie de la supraconductivité a récemment stimulé the nouvelles recherches en analyse semi-classique sur le niveau fondamental (= plus petite valeur propre) de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et la localisation quand $h \to 0$ d'une fonction propre correspondante. Comme dans l'analyse de l'effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger un rôle important est joué par des estimations d'Agmon, permettant de déterminer a priori la décroissance des fonctions propres. Ceci apparaît de manière diffuse dans les travaux de Bernoff-Sternberg [BeSt98], Lu-Pan [LuPa99a, LuPa99b] et Del Pino-Felmer-Sternberg [DeFeSt] mais apparaît plus systématiquement dans Helffer-Morame [HelMo01, HelMo02a, HelMo02b]. Il se trouve que ces techniques avaient déjà été mises en place dans des travaux antérieurs de ces auteurs motivés par ceux du géomètre Montgomery [Mont95] qui posait la question, en écho à la question célèbre de M. Kac *"Can we hear the form of a drum"*, *"Can we hear the zero locus of a magnetic field"*. Ce qui est sans doute le plus intéressant est la spécificité du problème de Neumann en comparaison avec le problème de Dirichlet. On peut en effet montrer que dans le cas d'un champ magnétique constant les phénomènes les plus intéressants apparaissent à la frontière. Une analyse semi-classique va permettre de comprendre dans un certain régime de paramètres le mécanisme appelé: nucléation de surface, correspondant à l'apparition de la supraconductivité. L'étude semi-classique met en évidence le rôle de la géométrie (courbure, coins) qui interagit avec le champ magnétique. Disons quelques mots sur cette théorie. On considère a priori des domaines dans $\mathbb{R}^3$, mais dans le cas de domaines cylindriques il est naturel de considérer une fonctionnelle associée à un domaine de $\Omega \in \mathbb{R}^2$, où Ω est une section du cylindre. Le comportement de l'échantillon se lit dans celui des minimiseurs globaux ou locaux de la fonctionnelle, dite de

Ginzburg-Landau, $(\psi, \mathcal{A})$ dans $H^1(\Omega;\mathbb{C}) \times \mathrm{H}^1(\Omega;\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})$ $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(\psi\ ,\ \mathcal{A}) = \int_\Omega \{|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \tfrac{\kappa^2}{2}(|\psi|^2-1)^2\}\ dx + \kappa^2 \int_\Omega |\mathrm{rot}\mathcal{A} - \sigma\mathcal{H}|^2\ dx\ . \quad (3.5)$$

Ici Ω est un domaine régulier, simplement connexe. La fonction ψ est appelée le paramètre d'ordre. Le vecteur $\mathcal{A}$ est un potentiel magnétique défini sur $\mathrm{I\!R}^n$. $\mathcal{H} = \mathrm{curl}\mathcal{A}^{\rceil\S\sqcup}$ est le vecteur champ magnétique lorsque $n = 3$ et est appelé le champ magnétique externe ou appliqué. Dans le cas $n = 2$, nous identifions plutôt ce champ magnétique à une fonction (en ayant en tête qu'il s'agit de l'intensité du champ magnétique supposé parallèle à l'axe du cylindre). Le paramètre κ est une caractéristique de l'échantillon. Traditionnellement, on fait la distinction entre les matériaux de type 1 correspondant à κ petit et ceux de type 2 correspondant à κ grand. Sur le plan mathématique, on est conduit à différentes analyses asymptotiques selon la taille de κ. Le cas semi-classique correspond au cas où κ est grand et où l'intensité du champ magnétique externe est du même ordre que κ.

On est ainsi amené à étudier la limite semi-classique de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique :

$$\sum_j (hD_x - A_j^{ext})^2$$

dans un ouvert borné Ω, où $h = \frac{1}{\kappa\sigma}$.

3.8 Mécanique statistique ou analyse semi-classique en grande dimension.

3.8.1 Introduction

Dans les années 60, M. Kac et différents coauteurs ([Ka62], [KaTh66]) suggérèrent que l'analyse semi-classique pourrait permettre de comprendre le mécanique de transition de phase en statistique mécanique. Ceci donna à ce moment l'impulsion pour une étude mathématique de l'écart entre les deux plus petites valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger ou pour celui entre les deux plus grandes valeurs propres de l'opérateur de transfert.

Il était donc naturel après le développement de l'analyse semi-classique des années 80 sur Schrödinger de regarder si les nouveaux outils allaient permettre le traitement des questions posées par M. Kac. Il s'agissait donc d'implémenter ces techniques dans la mécanique statistique. Ceci apparaît au départ comme un problème de contrôle par rapport à la dimension des développements semi-classiques des valeurs propres et de la décroissance des fonctions propres correspondantes.

Une partie de l'analyse apparaît en fait tout à fait similaire pour trois problèmes connexes : les intégrales de Laplace, les constructions WKB pour l'opérateur de Schrödinger et les constructions WKB pour l'opérateur de transfert. Si le chantier ouvert il y a une dizaine d'année par J. Sjöstrand [Sj93b] est loin d'être fermé, cette approche a mis en évidence de beaux problèmes mathématiques.

3.8.2 Motivations

Comme modèle de base considérons la phase Φ qui généralise certains modèles de Kac et des modèles plus standards apparaissant dans l'approximation réseau en théorie des champsé:

$$\Phi(x) = \sum_{j\in \mathbb{Z}/m\cdot\mathbb{Z}} V(x_j) + \sum_{j\in \mathbb{Z}/m\cdot\mathbb{Z}} W(x_j, x_{j+1}) \;, \tag{3.6}$$

pour $x \in \mathbb{R}^{mp}$, $x = (x_1, \cdots, x_m)$, $x_j = (x_{j1}, \cdots, x_{jp}) \in \mathbb{R}^p$, et nous supposons que

$$\Phi(-x) = \Phi(x) \;. \tag{3.7}$$

V est un potentiel défini sur $\mathbb{R}^p$ et nous essaierons de suivre la plupart des arguments par rapport à p pour pouvoir ensuite considérer la limite $p \to \infty$, après avoir d'abor pris la limite $m \to \infty$. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la mesure $(\pi h)^{-\frac{mp}{2}} \exp -\frac{\Phi}{h} dx^{(mp)}$ lorsque m, p et $1/h$ tendent vers $+\infty$. Plus précisément, nous sommes principalement intéressé dans le comportement asymptotique de

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^{mp}) := (\pi h)^{-\frac{mp}{2}} \int_{\mathbb{R}^{mp}} \exp -\frac{\Phi}{h}\, dx^{(mp)} \tag{3.8}$$

ou de $\frac{\ln \mathrm{Vol}(\mathbb{R}^{mp})}{mp}$. Comme souvent en mécanique statistique, l'ordre dans lequel nous prenons les limites peut être très important.
La situation est typique de ce qui apparait pour des modèles associés à des sous-ensembles Λ du réseau $\mathbb{Z}^2$ (ici $\Lambda = [0, m[\times[0, p[\cap\mathbb{Z}^2)$. En suivant une méthode de r{eeduction générale appelée "transfer matrix method", nous introduisons l'opérateur de transfert $K^{tf} = K_V$ dont le noyau distribution est donné par

$$K_V(x, y) = (\pi h)^{-\frac{p}{2}} \exp -\left(\frac{1}{2h} \cdot (V(x) + V(y))\right) \cdot \exp -h^{-1} W(x, y) \;.$$

Il est alors facile d'établir, par exemple si V tend vers $+\infty$ à l'∞, la relation suivante entre la plus grande valeur propre μ_1 de cet opérateur et le volume total :

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{Vol}(\mathbb{R}^{mp})}{m} = \ln \mu_1 \;. \tag{3.9}$$

Cette valeur propre μ_1 dépend de deux paramètres h et p et la question est de donner un développement semi-classique pour $\lim_{p\to+\infty} \frac{\ln \mu_1}{p}$. Ce programme n'est pas achevé. Une étape est d'établir un contrôle uniforme par rapport à p des coefficients du développement semi-classique de
$\frac{\ln \mu_1}{p}$.
Contrairement à d'autres techniques de la mécanique statistique, l'approche est assez générale mais l'exemple le plus typique est celui où $W(x, y) = \frac{a}{4}|x - y|^2$, avec $a > 0$. Comme typique V nous pouvons prendre

$$V^{(p)}(y) = \sum_{i=1}^{p} v(y_i) + b \sum_{i=1}^{p} |y_i - y_{i+1}|^2 \;, \tag{3.10}$$

et nous supposons que $b > 0$ et que v est un potentiel C^∞ à un puits ou à un double puits symétrique $v(-t) = v(t)$, avec un bon comportement à l'infini et une hypothèse de minimum non dégénéré. Ceci implique en particulier que $V^{(p)}$ définit également un simple ou un double puits.
Pour résumer, la méthode de transfert a permis de remplacer le problème intial pour une intégrale de Laplace associée à des (sous-ensembles de) réseaux de dimension 2 à un problème spectral attaché à un réseau de dimension 1.

3.8.3 Quelques résultats

L'étude principale ici a été d'analyser l'existence de solutions WKB formelles permettant d'approcher dans des régions convenables la première fonction propre de ces opérateurs. Simultanément, ceci donnera un développement semi-classique de la première (c'est à dire la plus grande) valeur propre. L'autre point important, pour la mécanique classique est que nous pouvons analyser le comportement par rapport à la dimension des coefficients du développement. C'est une étape dans la compréhension de l'analyse semi-classique de la première valeur propre par rapport à la dimension.
La classe des potentiels $V = V^{(p)}$ est trop compliquée à décrire (la plus générale semble être la classe des fonctions 0-standards introduite par J. Sjöstrand dans [Sj94] qui permet d'éliminer les hypothèses d'analyticité apparaissant dans les premiers travaux de Sjöstrand [Sj93b, Sj93c]) et indiquons simplement qu'elle contient les modèles vérifiant (3.10).
Le sprincipaux résultats ont été obtenus successivement pour l'équation de Schrödinger par J. Sjöstrand [Sj93b], [HelSj92a], [HelSj92b], [Sj94]et [Hel96c]. Ils étendent dans le contexte de la grande dimension les résultats antérieurs de [HelSj84] et [Sim83b] (voir [HE2] ou [DISJ] et les références dans ces ouvrages). Dans ce cas on considère l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^p$

$$(S) \quad P^{(p)}_{V;h} = -h^2\Delta + V^{(p)} \ , \tag{3.11}$$

et on démontre l'existence du développement suivant pour la plus petite valeur propre $\lambda_1^{(p)}(h)$

$$\tfrac{\lambda_1^{(p)}(h)}{p} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j(p) h^j \ , \tag{3.12}$$

avec la propriété que, pour tout j dans $\mathbb{N}$, $\alpha_j(p)$ tend e'xponentiellement vite vers une limite α_j^∞ lorsque $p \to +\infty$. Un contrôle soigneux des restes donne aussi

$$\lim_{p\to+\infty} \tfrac{\lambda_1^{(p)}(h)}{p} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j^\infty h^j \ . \tag{3.13}$$

En étroite connexion avec ces résultats sur Schrödinger, l'analyse des intégrales de Laplace

$$(L) \quad L^{(p)}_{V;h} := \ln \left((\pi h)^{-\frac{p}{2}} (\int_{\mathbb{R}^p} \exp - \tfrac{V^{(p)}(x)}{h} dx) \right) \ , \tag{3.14}$$

est développée dans [Sj91S], [?] et [Sj92a]. Il est démontré que

$$\frac{L^{(p)}_{V;h}}{p} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j(p) h^j \ , \tag{3.15}$$

avec la propriété que, pour tout j dans $\mathbb{N}$, $\beta_j(p)$ tend exponentiellement rapidement vers la limite β_j^∞ quand $p \to +\infty$ et que la limite thermodynamique a un développement semi-classique donné par

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{L^{(p)}_{V;h}}{p} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j^\infty h^j \ . \tag{3.16}$$

L'opérateur de Kac

$$(K) \quad K^{kac,(p)}_{V;h} := \exp -\frac{V^{(p)}(x)}{2} \cdot \exp h^2\Delta \cdot \exp -\frac{V^{(p)}(x)}{2} \tag{3.17}$$

peut-être vu comme un opérateur h-pseudodifferentiel (cf [BrunHel91]) sur $L^2(\mathbb{R}^p)$, avec des propriétés voisines de $\exp -P^{(p)}_{V;h}$, et il est donc naturel d'espérer des développements semi-classiques pour la plus grande valeur propre $\nu_1^{(p)}(h)$, qui correspond à $\exp -\lambda_1^{(p)}(h)$ dans cette comparaison. C'est ce qui est fait pour p fixé dans [BrunHel91] et [Hel92] et plus récemment il est montré dans [Hel97b, HelRam] that

$$\frac{-\ln \nu_1^{(p)}(h)}{p} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j(p) h^j \ , \tag{3.18}$$

avec la propriété qu'il existe, pour tout $j \in \mathbb{N}$, C_j telle que

$$|\gamma_j(p)| \leq C_j \ , \ \forall p \ . \tag{3.19}$$

L'analyse de la limite thermodynamique est abordée dans [HelRam] mais il reste un "trou" pour avoir le résultat analogue à [HelSj92a]. L'opérateur de transfert a été introduit au paragraphe précédent par

$$(T) \quad K^{tf,(p)}_{V;h} = \exp -\frac{V^{(p)}(x)}{2h} \cdot \exp \frac{h}{a}\Delta \cdot \exp -\frac{V^{(p)}(x)}{2h} \tag{3.20}$$

et nous obtenons pour la plus grande valeur propre $\mu_1^{(p)}(h)$ de cet opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^p)$, qui peut être considéré comme un opérateur h-pseudodifférentiel [Hel96e, Hel97b],

$$\frac{-\ln \mu_1^{(p)}(h)}{p} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_j(p) h^j \ , \tag{3.21}$$

avec la propriété qu'il existe, pour tout $j \in \mathbb{N}$, C_j tel que

$$|\delta_j(p)| \leq C_j \ , \ \forall p \ . \tag{3.22}$$

De nouveau l'analyse de la limite thermodynamique devrait pouvoir être abordée mais reste ouverte (voir cependant des travaux récents de J. Moeller [Mol01b]).

3.8.4 WKB constructions en grande dimension

Dans chacun des cas considérés dans les paragraphes précédents, une solution WKB solution apparait. Dans les cas (S), (K) et (T), nous cherchons une approximation de l'état fondamental de la forme

$$u^{wkb}(x;h) \sim \exp - \frac{\phi^{(p)}(x;h)}{h}$$

où

$$\phi^{(p)}(x;h) \sim \sum_{j\in\mathbb{N}} \phi_j^{(p)}(x) h^j \ ,$$

avec ϕ_j 0-standard au sens de Sjöstrand [Sj94]. Lorsque nous résolvons successivement les équations obtenues en annulant les coefficients des puissances de h , nous rencontrons d'abord l'équation eiconale qui dans les cas (S) et (K) prend la forme

$$|\nabla\phi_0(x)^2| = V^{(p)}(x) - \min V^{(p)} \ .$$

Comme initié dans [HelSj84] puis d éveloppé dans le cadre de la grande dimension par J. Sjöstrand [Sj93b] et [Sj94], on peut trouver une unique solution locale ϕ_0 de cette équation eiconale telle que $\phi_0(x_{min}) = 0$ et $\phi_0 \geq 0$, qui peut-être caractérisée comme la fonction génératrice de la variété lagrangienne invariante stable pour le flot hamiltonien H_q associé à $q(x,\xi) = \xi^2 - V$ sur $\mathbb{R}^{2p}$ contenant le point fixe pour le flot : $(x_{min}, 0)$.
Dans le cas (T), ϕ_0 peut-être caractérisé (cf [Hel96e], [Hel97b], voir aussi des développements ultérieurs de J.S. Moeller [Mol01a, Mol01b]]) comme la fonction génératrice de la variété lagrangienne invariante stable pour le symplectomorphisme κ sur $\mathbb{R}^{2p}$ dont le graphe est défini par

$$\mathrm{graph}(\kappa) := \{(x,\xi,y,\eta) \mid \xi = \tfrac{1}{2}\nabla V(x) + \nabla_x W(x,y)\ ,\ \eta = -\tfrac{1}{2}\nabla V(y) - \nabla_y W(x,y)\} \ . \tag{3.23}$$

Nous observons alors que $(x_{min}, 0, x_{min}, 0)$ est un point hyperbolique pour κ et qu'on peut utiliser le théorème de la variété stable pour un difféomorphisme. Comme ce théorème admet une version Banach, il n'est pas trop étonnant de pouvoir contrôler la construction par rapport à la dimension p.

Dans le cas (L), la phase $\phi^{(p)}(x;h)$ apparaît lorsqu'on essaie par un changement de variable de la forme $y = \nabla_x \phi^{(p)}(x;h)$ de transformer l'intégrale de Laplace (penser au lemme de Morse) $\int_{\mathbb{R}^p} \exp - \frac{V^{(p)}}{h}\, dx$ en, à une constante multiplicative près, $\int_{\mathbb{R}^p} \exp - \frac{y^2}{h}\, dy$.

3.8.5 LogSobolev et Poincaré

Le point de départ est l'étude d'une mesure sur $\mathbb{R}^N$ de la forme $\exp -\beta\Phi(X) dX$ où β est l'inverse de la température et Φ est associée à N particules identiques. Typiquement, Φ a la structure suivante :

$$\Phi^{\Lambda,\omega}(X) = \sum_{j\in\Lambda} \phi(x_j) + J \sum_{j\sim k\ ,\ j \text{ ou } k\in\Lambda} |z_j - z_k|^2 \ ,$$

où $z_j = x_j$, si $j \in \Lambda$ et $z_j = \omega_j$ si $j \notin \Lambda$, ω est un paramètre dans $\mathbb{Z}^d$ et où $j \sim k$ signifie que j et k sont proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$. J est supposé positive et mesure l'intensité de l'interaction. Λ est un sous-ensemble de zz^d typiquement une boite.

ϕ est une phase sur $\mathbb{R}^N$ avec une croissance disons au moins quadratique q̀ l'infini.

Our main problem will be to analyze the properties of the measure

$$d\mu_{\Lambda,\omega} := \exp -\beta \Phi^{\Lambda,\omega}(X)\ dX / \left(\int_{(\mathbb{R}^N)^\Lambda} \exp -\beta\Phi^{\Lambda,\omega}(X)\ dX \right) . \tag{3.24}$$

Nous nous demandons en particulier si la covariance qui associe à deux fonctions $f, g \in C^\infty_{temp}((\mathbb{R}^N)^\Lambda)$ l'expression

$$\mathrm{cov}_{\Lambda,f}(f,g) = \langle (f - \langle f \rangle_{\Lambda,f})(g - \langle g \rangle_{\Lambda,f}) \rangle_{\Lambda,f} \tag{3.25}$$

où $\langle \cdot \rangle_{\Lambda,f}$ désigne la moyenne par rapport $d\mu_{\Lambda,f}$ et $C^\infty_{temp}((\mathbb{R}^N)^\Lambda)$ est l'espace des fonctions C^∞ à croissance polynômiale.

Les questions quis se posent sont alors l'existence, et le contrôle par rapport à tous les pramètres de l'inégalité de Poicaré (voir de l'inégalité de LogSobolev). C Ces questions sont liées étroitement à l'analyse du comportement pour i et j dans Λ de

$$\mathrm{Cor}^{\Lambda,f}(i,j) := \mathrm{cov}_{\Lambda,f}(x_i, x_j) . \tag{3.26}$$

lorsque $d(i,j)$ est grand (cela a un sens lorsque Λ “tend” vers $\mathbb{Z}^d$, par exemple si $\Lambda = [-L, \cdots, L]^d$ et L est assez grand par rapport à $d(i,j)$). Il est clair que quand il n'y a pas d'interaction, c'est à dire si $\mathcal{J} = 0$, alors nous avons

$$\mathrm{cov}_{\Lambda,f}(x_i, x_j) = 0 , \tag{3.27}$$

pour $i \neq j$, c'est à dire

$$\langle x_i \cdot x_j \rangle = \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle . \tag{3.28}$$

Il est alors naturel si cette propriété subsiste, sous une forme plus faible, par exemple dedécroissance exponentielle,

$$|\mathrm{Cor}^\Lambda(i,j)| \leq C \exp -\kappa\, d_\Lambda(i,j) , \tag{3.29}$$

pour $\mathcal{J}$ assez petit indépendamment de tous les paramètres en jeu. Ce sera typiquement le cas (sans condition sur $\mathcal{J} \geq 0$) lorsque ϕ est strictement convexe :

$$\phi''(x) \geq \rho > 0 . \tag{3.30}$$

Dans ce cas on a Poincaré et LogSobolev uniforme. C'est plutôt le cas non-convexe qui conduit à des questions délicates (en particulier par rapport au paramètre semi-classique $\frac{1}{\beta}$.

—————— A compléter

—————— Références: Sjöstrand, Helffer-Sjöstrand, Helffer, Bodineau, Helffer-Martinez, Sordoni, Sjöstrand-Wang, Bach-Jecko-Sjöstrand ... Nourrigat et co-auteurs....

3.8.6 Conclusion

Nous avons seulement analysé la construction formelle du problème en grande dimension et concentré l'exposition sur le problème le plus simple apparaissant en mécanique statistique: la limite thermodynamique. Dans toutes ces constructions, nous rencontrons lorsque nous essayons de justifier les développements des conditions de la forme $p \leq C \cdot h^{-N_0}$ ou $p \leq \exp \frac{\epsilon}{h}$. Ces conditions ne sont pas présentes dans les résultats finaux sur la limite thermodynamique (principalement car nous divisons par p avant de prendre la limite) mais réapparaissent lorsque nous analysons des problèmes plus délicats comme l'écart entre les deux plus grandes valeurs propres (cas (K) ou (T)) ou les deux plus petites (cas (S)) ou pour les fonctions de corrélation dans le cas (L). Même si des résultats partiels ont ééte obtenus dans cette direction ([HelSj92b], [Hel96c]), il reste encore à établir un lien plus profond entre les techniques semi-classiques et les techniques efficaces développées en mécanique statistique à partir des années 60 (argument de Peierls, estimations infrarouges, développement en cluster). Il nous semble qu'à l'heure actuelle l'étude de l'effet tunnel en grande dimension reste largement ouvert.

3.9 Et encore...

Il faudrait parler de la théorie adiabatique [?, ?, ?] en liaison avec Born-Oppenheimer, de l'effet tunnel géométrique [Cdv877] [CDV], [BroHisMart93]-[BroHisMart95], de l'instabilité de Rayleigh-Taylor [HelLaf02] (qui relève des problèmes haute fréquence), d'applications plus marginales à la construction de solutions à support compact pour des équations paraboliques dégénérées [BelHelVer01] et de beaucoup de problèmes non-linéaires ... de l'homogénéisation (exposé de G. Allaire au séminaire edp à l'X)

3.10 Et encore..problèmes non-autoadjoints

Davies [Da96], Dencker-Sjöstrand-Zworski [?]...

4 Conclusion

4.1 Quelques succès

Dans les grandes réussites des méthodes semi-classiques, outre le point qu'elle est devenue une discipline reconnue, il me semble[9] qu'il faut mentionner, sur le plan interne :

- L'analyse mathématique de l'effet tunnel (qui faisait partie du programme initial), avec l'application au splitting et aux résonances
- les résultats en Scattering,

et sur le plan "interface" :

- les applications à l'opérateur de Harper en Physique du solide,

[9] Mais je ne fais qu'exprimer un goût personnel.

- la justification de l'approche de Witten pour la théorie de Morse,
- la détermination du terme de Scott en théorie de Thomas-Fermi (Hughes-Siedentop-Ivrii-Sigal-Fefferman-Secco).

4.2 Quelques conjectures en suspens

Nous avons déjà mentionné la conjecture de Lieb-Thirring, celle des 10 Martinis ($\lambda \neq 1$, pour $\cos hD_x + \lambda \cos x$). Nous pouvons ajouter la conjecture de Thouless [HelKer95] sur le comportement asymptotique dans le cas rationnel de la longueur totale du spectre de l'opérateur de Harper.
Dans les programmes qui sont loins d'être achevés, je mentionnerai l'effet tunnel en grande dimension et l' effet tunnel dans le cas avec champ magnétique [HelSj87b, Mart97] pour lequel nous n'avons que des majorations.

4.3 Evolution actuelle

C'est encore dans la théorie des résonances en liaison avec le scattering, que la théorie semi-classique “interne” est la plus active. On mentionnera ici, les travaux de Sjöstrand-Zworski, ceux de Burq (dans la suite des travaux de Lebeau) et ceux de chercheurs ou étudiants de Bordeaux, de l'X, de Nantes ou Paris 13 (Petkov, Vodev, Robert ... V. Bruneau, Michel, J.F. Bony...).

On notera aussi une énorme activité autour de la stabilité de la matière avec Ivrii ou les écoles de Lieb, Fefferman, Fröhlich... travaillant ensemble ou en concurrence.

L'analyse semi-classique en grande dimension, après avoir laissé entrevoir de belles perspectives, butte sur de grosses difficultés dans son approche de l'effet tunnel. Notons toutefois que les études autour du Laplacien de Witten connaissent de nouveaux développements.
De nouveaux travaux d'Ivrii (prolongeant des travaux de Zielinski) concernent le traitement d'opérateurs à coefficients peu réguliers mais souffrent d'un certain manque d'application.

Enfin, la théorie des mesures semi-classiques s'est développée sur une trajectoire indépendante (P. Gérard, F. Poupaud, Mauser, Markovich....).

L'usage des états cohérents réapparait pour obtenir des résultats plus fins (Robert, Combescure, Debièvre...) (en liaison avec l'étude de la dynamique quantique en temps long)ou pour obtenir, après raffinement des démonstrations plus accessibles (Solovej-Spitzer[SolSpi02a, SolSpi02b]) pour par exemple la conjecture de Scott qui date de 1952.

La théorie de la supraconductivité me semble ouvrir un nouveau terrain d'investigation. Plus généralement, l'implémentation des idées semi-classiques dans les problèmes non-linéaires est encore balbutiante.

Comme toutes les disciplines ayant une expansion rapide, il me semble que le développement de l'analyse semi-classique ne se poursuivra que si, au delà de la résolution de ses problèmes "internes", elle est à même de répondre aux nombreux problèmes de nature semi-classique pouvant apparaître dans toutes sortes de problèmes apparaissant dans différents secteurs de la physique et de la mécanique.

5 Ouvrages de référence ou à forte composante semi-classique

En dehors de quelques ouvrages de référence mentionnés dans le texte, nous n'avons listé que des ouvrages à forte composante semiclassique. On notera en particulier la collection: Encyclopedia of Mathematical Sciences qui publie 10 volumes sur les équations aux dérivées partielles [EMS], avec la participation des meilleurs spécialistes russes. On notera en particulier le volume V avec des contributions de Babich, Fedoryuk, Lazutkin, Vainberg et le volume VII avec des contributions de Rozenblum, Shubin et Solomyak.

Références

[AG] S. Agmon : *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations.* Mathematical notes of Princeton university n^0 29 (1982).

[AR] V. Arnold : *Mathematical methods of mechanics*, Springer Verlag.

[BESH] F.A. Berezin, M.A. Shubin : *Schrödinger operators*, Nauka (1983).

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet : Spectre d'une variété riemannienne, Springer Lecture Notes in Mathematics 194 (1971).

[B0GU] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin : The spectral theory of Toeplitz operators, *Ann. Math. Studies* 99, (1981).

[CAPH] B. Candelpergher,J.C. Nosmas et F. Pham : Approche de la résurgence. Actualités Mathématiques. Paris: Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts. 289 p. (1993).

[CHI] M.S. Child : A compléter. Vérifier l'existence du livre.

[CDV] Y. Colin de Verdière : Spectres de graphes, Cours spécialisés 4. Société Mathématique de France.

[CFKS] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon : Schrödinger operators with applications to quantum Mechanics and global geometry. Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag 1987.

[DISJ] M. Dimassi, J. Sjöstrand : Spectral Asymptotics in the semi-classical limit. London Mathematical Society. Lecture Note Series 268. Cambridge University Press (1999).

[DU] J.J. Duistermaat : *Fourier integral operators*, Courant Institut Math.Soc., New York University (1973).

[EMS] Partial Differential Equations. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Springer Verlag.

[EN] B-G Englert : Semiclassical Theory of Atoms. Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics 300 (1988)

[FEMAS] M.V. Fedoryuk, V.P. Maslov : *Semi-classical approximation in quantum mechanics*, Reidel (1981).

[FED] B. Fedosov : Deformation, quantization and index theory. Akademie Verlag 1996.

[GRSJ] A. Grigis, J. Sjöstrand : *Introduction to microlocal analysis*, Cambridge University press.

[GUST] V. Guillemin, S. Sternberg : *Geometric asymptotics*, Am. Math. Soc. Survey, Vol.14 (1977).

[GUT] M. Gutzwiller : Chaos in classical and quantum mechanics, Springer Verlag (1990)

[HE1] B.Helffer : *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*, Astérique n^{0}112 (1984).

[HE2] B.Helffer : *Introduction to the semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n^{0}1336 (1988).

[HE3] B. Helffer : Semiclassical analysis for Schrödinger operators, Laplace integrals and transfer operators in large dimension: an introduction. Cours de DEA, *Paris Onze Edition* (1995).

[HE4] B. Helffer : Semi-classical analysis, Witten Laplacians and Statistical mechanics. Series on Partial differential equations and Applications, Vol. 1. World Scientific (2002).

[HENI] B. Helffer, F. Nier : Hypoellipticity and Spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians. Preprint de l' université de Rennes 2003.

[HISI] P.D. Hislop, I.M. Sigal : Introduction to Spectral Theory — With applications to Schrödinger Operators — Applied Mathematical Sciences 113. *Springer* (1995).

[HOJE] : H. Holden et A. Jensen : Schrödinger operators. Proceedings of the Nordic Summer School in Mathematics held in Sönderborg, August 1–12, 1988. Edited by H. Holden and A. Jensen. Lecture Notes in Physics, 345. Springer-Verlag, Berlin, 1989. vi+458 pp.

[HO] L. Hörmander : *The Analysis of linear Partial Differential Operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag (1984).

[IV] V.Ivrii : Microlocal analysis and precise spectral asymptotics (1998) Springer Lecture Notes in Mathematics.

[KOK] V.N. Kolokoltsov : Semi-classical analysis for diffusions and stochastic processes. Lecture Notes in Mathematics 1724. Springer Verlag, Berlin 2000.

[LALI] L.D. Landau, E.M. Lifschitz : *Mécanique quantique* (Editions Mir).

[LAZ] V.F. Lazutkin : KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions. With an addendum by A. I. Shnirelman. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 24. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[LE] J. Leray : *Lagrangian Analysis and Quantum Mechanics*, MIT Press 1981.

[MAR] A. Martinez : An introduction to semi-classical and microlocal analysis. Springer (2002).

[MAS1] V.P. Maslov : *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod (1972).

[MAS2] V.P. Maslov : *The complex WKB method for nonlinear equations I*, Progress in Physics 16, Birkhäuser (1994).

[OL] F.W.J. Olver : Asymptotics and Special Functions", Academic Press (1974).

[PEI] R. Peierls : Surprises in theoretical physics. Princeton University Press, 1979. Princeton NJ.

[RASI] J. Rauch, B. Simon (editors) : Quasiclassical Methods. Proceedings of the IMA Workshop held at the University of Minnesota, Minneapolis, MN, May 22–26, 1995. Edited by Jeffrey Rauch and Barry Simon. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 95. Springer-Verlag, New York, 1997. x+224 pp.

[RESI] M. Reed, B. Simon : *Method of Modern Mathematical Physics*. Academic press.

[ROB] D.Robert : *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics n^0 68, Birkhäuser (1987).

[RSS] G.V. Rozenbljum, M.Z. Solomyak, M.A. Shubin : *Spectral theory of differential operators* (in Russian), Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya. VINITI, Moscow, 64 (1990) (also translation in Springer).

[SH] M. Shubin : *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Nauka Moscow (1978).

[SIM] B. Simon : *Functional integration and quantum physics*, Academic Press 1979.

[SJ1] J. Sjöstrand : *Singularités analytiques microlocales* Astérisque 95 (1982).

[SJ2] J. Sjöstrand : Lecture on Resonances. Preliminary version Avril 2002. Page Web de J. Sjöstrand.

[ZH] W. Zhang : Lectures on Chern-Weil theory and Witten deformations. Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 4. World Scientific 2001.

[ZJ] J. Zinn-Justin : Quantum field theory and critical phenomena. Third edition. International series of monographs on Physics 92. Oxford Science Publications (1995).

6 Surveys semi-classiques

Nous avons essayé de signaler les articles de Survey permettant l'entrée effective dans les sujets mentionnés auparavant.

Références

[AlArS] S. Albeverio, T. Arede : The relation between quantum mechanics and classical mechanics : a survey of some mathematical aspects. Preprint Université de Bielefeld. Unpublished.

[Bel91S] J. Bellissard: Le papillon de Hofstadter. Séminaire Bourbaki, $44^{ème}$ année, n^0 745 (1991).

[Burq97S] N. Burq : Mesures semi-classiques et mesures de défaut. Séminaire Bourbaki. Volume 1996/97. Exposés 820-834. Paris: Société Mathématique de France, Astérisque. 245, p. 167-195, Exp. No.826 (1997).

[Burq99S] N. Burq : Formules de trace, résonances et quasi-modes (d'après Sjöstrand-Zworski, Stefanov-Vodev et al.). S'eminaire Bourbaki. Volume 1998/99. Exposés 850-864. Paris: Société Mathématique de France, Astérisque. 266, 175-191

[BuFe99S] V. Buslaev, A. Fedotov : On the difference equations with periodic coefficients. Actes du congrès international de physique mathématique de Brisbane(1997). p. 303-308. International Press (1999).

[CdVS] Y. Colin de Verdière : Une introduction à la m/'ecanique semi-classique. Enseign. Math. (2) 44 (1998), no. 1-2, 23–51.

[FauS] F. Faure : "Adiabatic theory and topological indices in molecular physics and solid state physics" or "Geometric and topological aspects of slow and fast coupled dynamical systems in quantum and classical dynamics" Cours donné à Sacaly Avril 2002. http://lpm2c.polycnrs-gre.fr/faure.

[GuHeTr89S] J.P. Guillement, B. Helffer et P. Treton : Walk inside Hofstadter's butterfly. J. Phys. France 50, (1989), p. 2019-2058.

[Hel92S] B. Helffer : *Sur l'équation de Schrödinger,* Exposé à la journée annuelle de la SMF (23 Mai 1992) dans Mathématiques quantiques, Publications de la SMF (1992).

[Hel95S] B. Helffer : *h-pseudodifferential operators and applications: an introduction,* Tutorial lectures in Minneapolis. The IMA Volumes in Mathematics and its applications, Vol. 95,
Quasiclassical Methods, Springer Verlag (1997) p. 1-50.

[Hel02S] B. Helffer : Semi-classical methods in Ginzburg-Landau theory. Satellite Conference in Hanoi (Sept. 2002).

[Pau97S] T. Paul : Semi-classical methods with emphasis on coherent states. Quasiclassical methods (Minneapolis, MN, 1995), 51–88, IMA Vol. Math. Appl., 95, Springer, New York, 1997.

[Rie99S] M.A. Rieffel : Quantization annd operator algebras. Actes du congrès international de physique mathématique de Brisbane(1997). p. 254-259. International Press (1999).

[Rob86S] D. Robert : Analyse semi-classique de l'effet tunnel (d'après B. Helffer et J. Sjöstrand). Séminaire Bourbaki, 1985-1986.

[Rob98S] D. Robert : Semi-classical approximation in Quantum Mechanics. A survey of old and recent mathematical results. Hel. Phys. Acta 71 (1998) p. 44-116.

[Sim82S] B. Simon : Schrödinger semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), no. 3, 447–526.

[Sj91S] J. Sjöstrand : Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions. Springer Lect. Notes in Mathematics, 1495, p. 237-332 (1991).

[Sj97S] J. Sjöstrand : A trace formula and review of some estimates for resonances, Microlocal analysis and spectral theory, Nato ASI Série C, Vol. 490, p. 377-437 Kluwer (1997).

7 Articles de référence ou à forte composante semi-classique

Nous avons exploré les bibliographies de Survey ou ouvrages récents de B. Helffer, A. Martinez, D. Robert, T. Paul, M. Dimassi et J. Sjöstrand. Notre bibliographie est centrée sur le semi-classique mais elle n'a pas bien pris en compte tout ce qui correspond aux asymptotiques grande énergie (bibliographie considérable) ou dans le cadre probabiliste à ce qui relève des grandes déviations. De même, sur le sujet de la stabilité de la matière, nous avons surtout cité ce qui touche à la conjecture de Scott. Pour les problèmes non-linéaires notre liste est très incomplète.

Références

[AgCo71] J. Aguilar, J.M. Combes : A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians. Comm. Math. Phys. 22 (1971), p. 269-279.

[AiLi78] M. Aizenman, E. Lieb : On semi-classical bounds for eigenvalues of Schrödinger operators *Phys. Lett.* 66A, p.427-429, (1978)

[Ama] E. Amar-Servat : Solutions asymptotiques et résonances pour les opérateurs de Klein-Gordon et de Schrödinger Thèse 2002.

[AmCaKeNo03] L. Amour, C. Cancelier, P. Kerdelhue et J. Nourrigat : Mean energy of a crystal in the Quantum thermodynamic limit. Preprint 2003. Université de Reims.

[AmKeNo01] L. Amour, P. Kerdelhue et J. Nourrigat : Calcul pseudodifferentiel en grande dimension. Asymptot. Anal. 26 (2001), no. 2, 135–161.

[AnCha00] C. Anné, A.M. Charbonnel : Localization of the joint spectrum of several commuting h-pseudodifferential operators with a periodic flow on a given energy level. Preprint Université de Nantes 2000.

[AsFu788] K. Asada, D. Fujiwara : On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Japan J. Math.*(4), p. 299-361, (1978).

[Asc90] J. Asch : On the classical limit of Berry's phase for integrable systems, Comm. in Math. Physics 127 (1990), p. 637-651.

[AsDu93] J. Asch, P. Duclos : An elementary model of dynamical tunneling. In Differential equations with applications to mathematical physics (F. Ames, J.V. Herod, E. Harrell eds.), Academic Press (1993), p. 1-11.

[AveSe75] P. Aventini, R. Seiler : On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion. Comm. Math. Phys. 41, p. 119-134 (1975).

[Av81] J.E. Avron : Bender-Vu formulas for the Zeeman effect in hydrogen. Ann. of Physics 131 (1981), p. 73-94.

[Av82] J.E. Avron : Bender-Vu formulas and classical trajectories : higher dimensions and degeneracies. Int. J. of Quantum Chemistry 21 (1982), p. 119-124.

[AvHeSi78a] J.E. Avron, I. Herbst, B. Simon : Schrödinger operators with magnetic fields I. Duke Math. J. 45, p. 847-883 (1978).

[AvHeSi78b] J.E. Avron, I. Herbst, B. Simon : Schrödinger operators with magnetic fields II. Separation of center of mass in homogeneous magnetic fields. Ann. Physics 114, p. 431-451 (1978).

[AvHeSi81] J.E. Avron, I. Herbst, B. Simon : Schrödinger operators with magnetic fields III, Atoms in homogeneous magnetic fields. Comm. Math. Physics 79, p. 529-572 (1981).

[Ba89] V. Bach : A proof of the Scott's conjecture for ions, *Rep.Math.Phys.* 28(2), p. 213-248, October 1989.

[Ba92] V. Bach : Error bounds for the Hartree-Fock energy of atoms and molecules, Comm. Math. Phys. 147, p. 527-548 (1992).

[Ba93] V. Bach : Accuracy of Mean Field Approximations for Atoms and Molecules. Commun. Math. Phys. 155, (1993), p. 295-310.

[BaJeSj00] V. Bach, T. Jecko, J. Sjöstrand : Correlation asymptotics of classical lattice spin systems with nonconvex Hamilton function at low temperature. Ann. Henri Poincaré 1, p. 59-100 (2000).

[BaMo02] V. Bach, J. Schach Moeller : Correlation at low temperature I. Exponential decay.

[BalBlo70] R. Balian, C. Bloch : Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. I.: Three-dimensional problem with smooth boundary surface Ann. Phys. 60, 401-447 (1970). Errata Ann. of Phys. 84, 559 (1974).

[BalBlo71] R. Balian, C. Bloch : Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. II: Electromagnetic field. Riemannian spaces. Ann. Phys. 64, 271-307 (1971). Errata Ann. of Phys. 84, 559-562 (1974).

[BalBlo72] R. Balian, C. Bloch : Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. III: Eigenfrequency density oscillations. Ann. of Phys. 69, 76-160 (1972).

[BalBlo74] R. Balian, C. Bloch : Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths, *Ann. of Phys.*(85), p. 514-545, (1974).

[BaPaVo79] R. Balian, G. Parisi et A. Voros : Quartic oscillator. Feynman path integrals, Proc. int. Colloq., Marseille 1978, Lect. Notes Phys. 106, 337-360 (1979).

[BalKo85a] A. Balazard-Konlein : Asymptotique semi-classique du spectre pour des opérateurs à symbole opératoriel. CRAS (20), p. 903-906 (1985).

[BalKo85b] A. Balazard-Konlein : Asymptotique semi-classique du spectre pour des opérateurs à symbole opératoriel. Thèse de troisième Cycle à Nantes. 1985

[BalCom71] E. Balslev, J.M. Combes : Spectral properties of many-body Schrödinger Hamiltonians with dilation analytic interactions. Comm. Math. Phys. 22 (1971), p. 280-294.

[BamGraPa99a] D. Bambusi, S. Graffi et T. Paul : Normal forms and quantization formulae. Comm. Math. Phys. 207 (1999), no. 1, 173–195.

[BamGraPa99b] D. Bambusi, S. Graffi et T. Paul : Long time semiclassical approximation of quantum flows: a proof of the Ehrenfest time. Asymptot. Anal. 21 (1999), no. 2, 149–160.

[Be74] R. Beals : Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators II, *Comm. Pure Appl.* 27, p.161-205, (1974).

[Be75] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators, *Duke Math.J.* 42, $n^0 1$, p.1-42, (1975).

[Be79] R. Beals : Characterization of p. d . o and applications, *Duke Math.J.* 44, p.45-57, (1977), and Erratum Vol. 46, $n^0 1$, *Duke Math.J.*, (1979).

[BeFe74] R. Beals, C. Fefferman : Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, *Comm.in Pure Appl. Math.* 27, p.1-24, (1974).

[BelHelVer01] Y. Belaud, B. Helffer et L. Véron : Long-time vanishing properties of solutions of some semilinear parabolic equations. Annales IHP (Section Analyse non linéaire) 18, 1 (2001) p. 43-68.

[Bel87] J. Bellissard: C^* algebras in solid state physics (2D electrons in a uniform magnetic fields), Warwick conference on operators algebras (1987).

[Bel89] J. Bellissard: Almost periodicity in solid state physics and C^*-algebras, in *The Harald Bohr centenary*, C.Berg and B.Flugede Eds., The danish Royal Acad.Sci, 42.3, p.35-75 (1989).

[BelNa90] J. Bellissard, S. Nakamura : Lower energy bands do not contribute to quantum Hall effect. Comm. Math. Phys. 131, p. 283-305 (1990).

[BelRa90] J. Bellissard, R. Rammal : Ground state of the Fermi gas of 2D lattices with a magnetic field. J. Phys. France 51 (1990), p. 2153-2165.

[BelSi82] J. Bellissard, B. Simon : Cantor spectrum for the almost Mathieu equation, J. Funct. An., 48, $n^0 3$, (1982).

[BelVi90] J. Bellissard, M. Vittot : Heisenberg's picture and non commutative geometry of the semi-classical limit in quantum mechanics. Ann. Inst. Poincaré (Section Phys. Théor.) 52, p. 175-236 (1990).

[BenCa96] G. Ben Arous et F. Castell : A probabilistic approach to semi-classical approximation. Journal of Functional Analysis (1996).

[BenMart01] A. (Lahmar)Benbernou, A. Martinez : On Helffer-Sjöstrand's theory of Resonances. Int. Math. Res. Notices, Volume 2001, issue 13 (2001)

[BeLo00] R. Benguria, M. Loss : A simple proof of a theorem of Laptev and Weidl. Math. Res. Lett. 7 (2000), no. 2-3, 195–203.

[BeRe71] F.A. Berezin : Wick and Anti-Wick Operator Symbols, Math. USSR Sbornik 15, p. 578-610 (1971).

[BeSt98] A. Bernoff and P. Sternberg : Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. J. Math. Phys. 39 (1998), p. 1272-1284.

[Ber85] M. Berry : Adiabatic angles and quantal adiabatic phase, J. Phys. A, Vol. 18 (1985) p 15-21.

[BerTa76] M. Berry, M. Tabor : Closed orbits and the regular bound spectrum. Proc. Roy. Soc. (1976) 349 101.

[Bis86] J.M. Bismut : The Witten complex and the degenerate Morse inequalities. Journal of differential equations, Vol. 23, No 3, (1986), p. 207-240.

[BisLeb91] J.M. Bismut, G. Lebeau : Complex immersions and Quillen metrics. Publ. Math. de l'IHES 74, p. 1-298 (1991).

[BlSt87] Ph. Blanchard, J. Stubbe : New estimates on the number of bound states of Schrödinger operators, *Letters Math. Phys.* 14, p. 215-225, (1987).

[Ble94] P.M. Bleher : Semi-classical quantization rules near separatrices, Comm. Math. Phys. 165 (1994), p. 621-640.

[Bod98] T. Bodineau : Transition de phase pour le modèle de Kac en dimension deux. Helv. Phys. Acta 71, No.5, 491-517 (1998).

[BoHel93] C. Bolley, B. Helffer : An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. Annales de l'IHP section Physique théorique, Vol. 58, No. 2, p. 189-233, (1993).

[Bonjf01] J.F. Bony : Résonances dans des domaines de taille h.. Int. Math. Res. Not. 2001, No.16, 817-847 (2001).

[Bonjf02] J.F. Bony : Minoration du nombre de résonances engendrées par une trajectoire fermée. Commun. Partial Differ. Equations 27, No.5-6, 1021-1078 (2002).

[BonSj01] J.F. Bony, J. Sjöstrand : Trace formula for resonances in small domains. J. Funct. Anal. 184, No.2, 402-418 (2001).

[BoOp27] M. Born, R. Oppenheimer : Zur Quantentheorie der Molekeln. Annal. Phys. 84, p. 457- (1927).

[BouRob02] A. Bouzouina, D. Robert : Uniform semi-classical estimates for the propagation of quantum observables. Duke Math. Journal 111(2), P. 223-252 (2002).

[BovEckGayKl01] A. Bovier, M. Eckhoff, V. Gayrard et M. Klein : Metastability in stochastic dynamics of disordered mean-field models. Prob. Theory and related fields 119 (1), p. 99-161 (2001).

[BovEckGayKl02a] A. Bovier, M. Eckhoff, V. Gayrard et M. Klein : Metastability in reversible diffusion processes I. Sharp asymptotics for capacities and exit times. Preprint 2002.

[BovEckGayKl02b] A. Bovier, M. Eckhoff, V. Gayrard et M. Klein : Metastability in reversible diffusion processes II Precise asymptotics for small eigenvalues. Preprint 2002.

[BreHi79] E. Brézin, S. Hikami: Large order behavior of $\frac{1}{N}$ expansion in zero and one dimensions. *J. Phys. A* **12** (6) (1979), p.759-770.

[BriComDu87a] P. Briet, J.M. Combes et P. Duclos : On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit. I. Resonances free domains. J. Math. Anal. Appl. 126 (1987), no. 1, 90–99.

[BriComDu87b] P. Briet, J.M. Combes et P. Duclos : Spectral properties of Schrödinger operators with trapping potentials in the semiclassical limit. Differential equations and mathematical physics (Birmingham, Ala., 1986), 55–72, Lecture Notes in Math., 1285, Springer, Berlin, 1987.

[BriComDu87c] P. Briet, J.M. Combes et P. Duclos : On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit II. Barrier top resonances. Comm. Partial Differential Equations 12 (1987), no. 2, 201–222. Erratum in Comm. Partial Differential Equations 13 (1988), no. 3, 377–381.

[BriComDu89] P. Briet, J.M. Combes et P. Duclos : Spectral stability under tunneling. Comm. Math. Phys. 126 (1989), no. 1, 133–156.

[BriCor02] P. Briet, H. Cornean : Locating the spectrum for magnetic Schrödinger and Dirac operators. Comm. Partial Differential Equations 27 (2002), no. 5-6, 1079–1101.

[BroHisMart93] R. Brown, P. Hislop et A. Martinez : Lower bounds on eigenfunctions and the first eigenvalue gap. Differential equations with applications to mathematical physics, 33–49, Math. Sci. Engrg., 192, Academic Press, Boston, MA, 1993.

[BroHisMart94] R. Brown, P. Hislop et A. Martinez : Lower bounds on the interaction between cavities connected by a thin tube. Duke Math. J. 73 (1994), no. 1, 163–176.

[BroHisMart95] R. Brown, P. Hislop et A. Martinez : Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions. J. Differential Equations 115 (1995), no. 2, 458–476.

[Bru91] R. Brummelhuis : Exponential decay in the semi-classical limit for eigenfunctions of Schrödinger operators with magnetic fields and potentials which degenerate at infinity, *Comm.in PDE*, (1991).

[BruL-BNo99] R. Brummelhuis, P. Levy-Bruhl et J. Nourrigat : Stationary scattering in the semi-classical limit for a Schrödinger operator in a gauge field. J. Funct. Anal. 165 (1999).

[BruPaUr95] R. Brummelhuis, T. Paul et A. Uribe : Spectral estimates around a critical level, *Duke Math. J.* 78 , p. 477-530 (1995) .

[BruUr91] R. Brummelhuis, A. Uribe : A semi-classical trace formula for Schrödinger operators, *Comm. Math. Phys.*(136), p. 567-584, (1991).

[BrunHel91] M. Brunaud et B. Helffer : Un problème de double puits provenant de la théorie statistico-mécanique des changements de phase, (ou relecture d'un cours de M. Kac). Preprint de l'ENS 1991.

[Brun99a] V. Bruneau : Riesz means of bounded states: semi-classical asymptotic. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 8, 643–647.

[Brun99b] V. Bruneau : Semi-classical behaviour of the scattering phase for trapping perturbations of the Laplacian. Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no. 5-6, 1095–1125.

[Brun00] V. Bruneau : Semi-classical asymptotics of Riesz means. J. London Math. Soc. (2) 62 (2000), no. 2, 613–624.

[BrunPet00] V. Bruneau, V. Petkov : Semiclassical resolvent estimates for trapping perturbations. Comm. Math. Phys. 213 (2000), no. 2, 413–4.

[BrunPet03] V. Bruneau, V. Petkov : Meromorphic continuation of the spectral shift function. Duke Math. J. Vol. 116, No 3, p. 389-430 (2003).

[BrunRo99] V. Bruneau, D. Robert : Asymptotics of the scattering phase for the Dirac operator: high energy, semi-classical and non-relativistic limits. Ark. Mat. 37 (1999), no. 1, 1–32.

[BuFeFrGrSt97] L. Bugliaro, C. Fefferman, J. Fröhlich, G.M. Graf et J. Stubbe : A Lieb-Thirring bound for a magnetic Pauli Hamiltonian, Comm. Math. Phys. 187 (3), p. 567-582 (1997).

[BuFeFrGr99] L. Bugliaro, C. Fefferman, J. Fröhlich et G.M. Graf : A Lieb-Thirring bound for a magnetic Pauli Hamiltonian. II, Rev. Mat. Iberoamericana 15 (3), p. 593-619 (1999).

[Burg97] D. Burghelea : Lectures on Witten-Helffer-Sjöstrand theory. Proceedings of the third internationaal workshop on differential geometry and its applications, the first german-romanian seminar on geometry (Sibiu, Romania, 1997) Gen. Math. 5, p. 85-99 (1997).

[Burq02a] N. Burq : Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries. Int. Math. Res. Not. 2002, No.5, 221-241 (2002).

[Burq02b] N. Burq : Lower bounds for shape resonances widths of long range Schrödinger operators. Am. J. Math. 124, No.4, 677-735 (2002).

[BurZ01] N. Burq, M. Zworski : Resonance expansions in semi-classical propagation. Commun. Math. Phys. 223, No.1, 1-12 (2001).

[Bus69] V. Buslaev : The generating integral and the canonical Maslov operator in the WKB method (Russian). Funkts. Anal. Prilozh. 3, No.3, 17-31 (1969).

[Bus84] V. Buslaev : Adiabatic perturbation of a periodic potential. Teoret. Mat. Fiz 58 p. 223-253 (1984).

[Bus87] V. Buslaev : Quasiclassical approximation for equations with periodic coefficients. Uspekhi Mat. Nauk 42 (1987), no. 6(258), 77–98, 248.

[BusDi89] V.S. Buslaev, A. Dimitrieva : A Bloch electron in an external field. Algebra i Analiz 1 (23), p. 1-29 (1989).

[BusFe93a] V. Buslaev, S. Fedotov: Complex WKB method for the Harper's equation, Preprint of the Mittag-Leffler Institute, $n^0 11$, (1993).

[BusFe93b] V. Buslaev, S. Fedotov : On a class of matrices related to Harper's equation, Preprint of the Mittag-Leffler Institute, $n^0 18$ (1993).

[BusGr98] V. Buslaev, A. Grigis : Imaginary parts of Stark-Wannier resonances. J. Math. Phys. 39, No.5, 2520-2550 (1998).

[BusGr01] V. Buslaev, A. Grigis : Turning points for adiabatically perturbed periodic equations. J. Anal. Math. 84, 67-143 (2001).

[BusPer] V. Buslaev, G. Perelman : A compléter. Solitons et Analyse semi-classique.

[But01] J. Butler : Semi-classical counting function with application to quantum current. Asymptot. Anal. 27 (2001), no. 3-4, 195–218.

[But02a] J. Butler : h-Fourier integral operators with complex-valued phase functions. Bull. London Math. Soc. 34 (2002), no. 4, 479–489.

[But02b] J. Butler : Semi-classical asymptotics of the spectral function of pseudodifferential operators. Comm. Partial Differential Equations 27 (2002), no. 1-2, 57–113.

[Cam02] B. Camus : semi-classical trace formula at a non degenerate critical level. A paraître au Jour. Funct. Analysis 2003.

[Can81] B. Candelphergher : Solutions asymptotiques de l'équation de Schrödinger stationnaire. J. Math. Pures Appl. (9) 60 (1981), no. 3, 323–339.

[CaNo80] B. Candelpergher, J.C. Nosmas : Solutions asymptotiques de l'équation de Schrödinger stationnaire associée à un potentiel central. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291 (1980), no. 2.

[CaNo84] B. Candelpergher, J.C. Nosmas : Propriétés spectrales d'opérateurs différentiels asymptotiques autoadjoints. Comm. Partial Differential Equations 9 (1984), no. 2, 137–167.

[Car90] U. Carlsson : An infinite number of wells in the semiclassical limit. Asymptotic Analysis 3 (1990), p. 189-214.

[CarmSim81] R. Carmona, B. Simon : Pointwise bounds on eigenfunctions. Comm. Math. Phys. 80, p. 59-98 (1981).

[Cha91] K. Chantelau : Schrödinger operators with singular potentials in the semiclassical limit. Thèse à Technische Universität Berlin 1991.

[Char83a] A.M. Charbonnel : Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. *Annales de Toulouse* 5, p. 109-147 (1983).

[Char83b] A.M. Charbonnel : Calcul fonctionnel à plusieurs variables pour des o.p.d sur $\mathbb{R}^n$, *Israel J. of Math.*, Vol.45, $n^0 1$, p.69-89, (1983).

[Char86] A.M. Charbonnel : Localisation du spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent, *Integral Equations and operator theory*, Vol.9, p.502-536, (1986).

[Char88] A.M. Charbonnel : Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent, Asymptotic Analysis 1, p.227-261, (1988).

[Char92] A.M. Charbonnel : Comportement semi-classique des systèmes ergodiques, *Annales de l'IHP, section Physique théorique*, Vol. 56, $n^0 2$, p. 187-214, (1992).

[CharPo99] A.M. Charbonnel, G. Popov : A semi-classical trace formula for several commuting operators. Comm. in PDE 5, p. 595-644 (1999).

[Charl00] L. Charles : Berezin-Toeplitz operators, a semi-classical approach. Preprint Ceremade 2000.

[Chaz74] J. Chazarain : Flot hamiltonien et spectre d'un opérateur elliptique. Sém. Goulaouic-Schwartz 1973-1974, Equ. dériv. part. Analyse fonct., Exp. XVI, 12 p. (1974).

[Chaz76] J. Chazarain : Spectre des opérateurs elliptiques et flots hamiltoniens. Sémin. Bourbaki 1974/75, Lect. Notes Math. 514, Exposé No.460, p. 111-123 (1976).

[Chaz77] J. Chazarain : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, *Inventiones Mathematicae* 24, p. 65-82, (1977).

[Chaz79a] J. Chazarain : Spectre d'un hamiltonien quantique et périodes des trajectoires classiques. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 288, p. 725-728 (1979)

[Chaz79b] J. Chazarain : Comportement du spectre d'un hamiltonien quantique. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 288, 895-897 (1979).

[Chaz79c] J. Chazarain : Comportement semi-classique du spectre d'un hamiltonien quantique. Journées "Equations aux dérivées partielles", Saint-Cast 1979, Conf. No.17, 6 p. (1979).

[Chaz80a] J. Chazarain : Comportement semi classique du spectre d'un Hamiltonien quantique. Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory, Proc. Colloq., Les Houches 1979, Lect. Notes Phys. 126, 130-135 (1980).

[Chaz80b] J. Chazarain : Spectre d'un Hamiltonien quantique et mécanique classique, *Comm. in P.D.E* 5(6), p. 595-644 (1980).

[Chi98] M.S. Child : Quantum states in a champagne bottle. J. Phys. A 31 (1998), no. 2, 657–670.

[ChiDoWa00] M.S. Child, Shi-Hai Dong et Xiao-Gang Wang : Quantum states of a sextic potential: hidden symmetry and quantum monodromy. J. Phys. A 33 (2000), no. 32, 5653–5661.

[Cole77] S. Coleman : The use of instantons. Proc. Int. School of Physics (Erice) 1977.

[Cdv73] Y. Colin de Verdière : Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II, *Comp. Math.* 27, p.159-184, (1973).

[Cdv77] Y. Colin de Verdière : Quasi-modes sur les variétes Riemanniennes. Invent. Math. 43, 15-52 (1977).

[Cdv78a] Y. Colin de Verdière : Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 286, 1195-1197 (1978).

[Cdv78b] Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs différentiels qui commutent. Sémin. Goulaouic-Schwartz 1977-78.

[Cdv79a] Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs qui commutent, *Duke Math. J.* 46, p.169-182, (1979).

[Cdv79b] Y. Colin de Verdière : Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristisques toutes périodiques, *Comm. Math. Helvetici* 54, p.508-522, (1979).

[Cdv80] Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs qui commutent, II le cas intégrable, *Math. Z.* 171, p.51-73, (1980).

[Cdv85] Y. Colin de Verdière : Ergodicité et fonctions propres du Laplacien *Comm.in Math. Phys.* 102, p.497-502, (1985).

[Cdv877] Y. Colin de Verdière : Construction de Laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. Ann. Sci. École Norm. Sup. 20 (4), p. 599-615 (1987).

[Cdv98] Y. Colin de Verdière : Une introduction à la mécanique semi-classique. Enseignement Mathématique II, Ser 44, No 1-2, p. 23-51 (1998).

[Cdv02] Y. Colin de Verdière : The level crossing problem in semi-classical analysis I the symmetric case. Preprint 2002.

[Cdv03] Y. Colin de Verdière : Singular Lagrangian manifolds and semiclassical analysis. Duke Math. J. 116 (2003), no. 2, 263–298.

[CdvLoPo99] Y. Colin de Verdière, M. Lombardi et P. Pollet : The microlocal Landau-Zener formula. Ann. Inst. Henri Poincaré 71 (1), p. 95-127 (1999).

[CdvPa94a] Y. Colin de Verdière, B. Parisse : Equilibre instable en régime semi-classique, I: Concentration microlocale, *Commun. in Partial Differential Equations* 19 (9-10), p.1535-1563, (1994).

[CdvPa94b] Y. Colin de Verdière, B. Parisse : Equilibre instable en régime semi-classique, II: Condition de Bohr-Sommerfeld, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 61 (1994), no. 3, 347–367.

[Com75] J.M. Combes : On the Born-Oppenheimer approximation. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics (Kyoto Univ., Kyoto, 1975), pp. 467–471. Lecture Notes in Phys., 39. Springer, Berlin, 1975.

[CoDuSe83a] J.M. Combes, P. Duclos, R. Seiler : Krein's formula and one dimensional multiple well. J. of Functional Analysis 52 (1983), p. 257-301.

[CoDuSe83b] J.M. Combes, P. Duclos, R. Seiler : Convergent expansions for tunneling. Comm. in Math. Phys. 92 (1983), p. 229-245.

[CoDuSe84] J.M. Combes, P. Duclos, R. Seiler : On the shape resonance. Resonances—models and phenomena (Bielefeld, 1984), 64–77, Lecture Notes in Phys., 211, Springer, Berlin, 1984.

[CoDuKlSe87] J.M. Combes, P. Duclos, M. Klein, R. Seiler : The shape resonance. Comm. Math. Phys. 110, p. 215-236 (1987).

[ComHis90] J.M. Combes, P. Hislop : Quantum tunnelling, nontrapping and the existence of Stark ladder resonances. J. Phys. A 23 (1990), no. 9, 1501–1511.

[ComSchrSei78] J.M. Combes, R. Schrader, R. Seiler : Classical bounds and limits for energy distributions of hamiltonian operators in electromagnetic fields, *Ann.of Physics* 111, p.1-18, (1978).

[ComSei78] J.M. Combes, R. Seiler : Regularity and asymptotic properties of the discrete spectrum of electronic Hamiltonians. Int. J. Quant. Chem. Vol. XIV, p. 213-229 (1978).

[ComSei80] J.M. Combes, R. Seiler : Spectral properties of atomic and molecular systems. Quantum dynamics of molecules (Proc. NATO Adv. Study Inst., Univ. Cambridge, Cambridge, 1979), pp. 435–482, NATO Adv. Study Inst. Ser., Ser. B: Physics, 57, Plenum, New York-London, 1980.

[Com87] M. Combescure : Trapping of quantum particles for a class of time-periodic potentials. A semi-classical approach. Ann. Phys. 173 (1987), p. 210-225.

[Com92] M. Combescure : The squeezed state approach of the semi-classical limit of the time dependent Schrödinger equation. J. Math. Phys. 93 (1992), p. 3870-3880.

[ComRaRo99] M. Combescure, J. Ralston, D. Robert : A proof of the Gutzwiller semiclassical trace formula using coherent states decomposition. Commun. Math. Phys. 202, No.2, 463-480 (1999).

[ComRo94] M. Combescure, D. Robert : Distribution of matrix elements and level spacings for classically chaotic systems, *Ann. IHP, Section Physique théorique*, Vol. 61, p. 443-483, (1994).

[ComRo95] M. Combescure, D. Robert : Semi-classical sum rules and generalized coherent states. J. Math. Phys. 36(12) (1995), p. 6596-6610.

[ComRo96] M. Combescure, D. Robert : Propagation d'états cohérents par l'équation de Schrödinger et approximation semi-classique, t. 323, Sér. I (1996), p. 871-876.

[ComRo97] M. Combescure, D. Robert : Semi-classical spreading of quantum wave packets and applications near unstable fixed points of the classical flow, Asymptotic analysis 14, p. 377-404 (1997).

[CorFeff] A. Cordoba, C. Fefferman : Wave packets and Fourier Integral Operators. Comm. in PDE 3 (11) (1978) p. 979-1005.

[Corn99] H. Cornean : On the essential spectrum of two-dimensional periodic magnetic Schrödinger operators. Lett. Math. Phys. 49 (1999), no. 3, 197–211.

[Corn00] H. Cornean : On the magnetization of a charged Bose gas in the canonical ensemble. Comm. Math. Phys. 212 (2000), no. 1, 1–27.

[CorNen98] H. Cornean, G. Nenciu On eigenfunction decay for two-dimensional magnetic Schrödinger operators. Comm. Math. Phys. 192 (1998), no. 3, 671–685.

[CorNen00] Two-dimensional magnetic Schrödinger operators: width of mini bands in the tight binding approximation. Ann. Henri Poincaré 1 (2000), no. 2, 203–222.

[Cyc]Cyc H.L. Cycon : Resonances defined by modified dilations. Helv. Phys. Acta 58 (1985), no. 6, 969–981.

[Cw] M. Cwikel : Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators, *Ann. of Math.* 106, p. 93-100, (1977).

[D'A] T. D'Aprile : Some existence and concentration results for nonlinear Schrödinger equations. Comm. on Pure and Applied Analysis 1 (4), p. 457-474.

[Da92] F. Daumer : Thése à Nantes 1992.

[Da93] F. Daumer : Equation de Schrödinger avec champ electrique périodique et champ magnétique constant dans l'approximation du tight-binding. Comm. in PDE 18, n^0 5-6, p. 1021-1041 (1993)

[Da96] F. Daumer : Equations de Schrödinger avec potentiels singuliers et à longue portée dans l'approximation de liaison forte. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. 64, n° 1, p. 1-31 (1996).

[Dav82] B. Davies : The twisting trick for double well Hamiltonians. Commun. Math. Phys. 85, 471-479 (1982).

[Dav02] B. Davies : Non-self-adjoint differential operators. Bull. London Math. Soc. 34 (2002), no. 5, 513–532.

[Deb95] S. Debièvre : Chaos, quantization and the classical limit on the torus. Quantization, coherent states, and Poisson structures (Białowieża, 1995), 19–39, PWN, Warsaw, 1998.

[DebDeg] S. Debièvre, M. Degli Esposti : Egorov theorems and equidistribution of eigenfunctions for the quantized sawtooth and baker maps. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 69 (1998), no. 1, 1–30.

[DebHo] S. Debièvre, J.-C. Houard et M. Irac-Astaud : Wave packets localized on closed classical trajectories. Differential equations with applications to mathematical physics, 25–32, Math. Sci. Engrg., 192, Academic Press, Boston, MA,

[DebRob03] S. Debièvre, D. Robert : Semiclassical propagation on $|\log h|$ time scales. Int. Math. Res. Not. 2003, no. 12, 667–696.

[DeBr] R. De la Bretèche : Preuve de la conjecture de Lieb-Thirring dans le cas des potentiels quadratiques strictement convexes. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. 70, No.4, 369-380 (1999).

[DeFe] M. del Pino, P.L. Felmer : Semi-classical states for nonlinear Schrödinger equations. J. Funct. Anal. 149, p. 245-265 (1997).

[DeFeSt] M. del Pino, P.L. Felmer and P. Sternberg : Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. Math. Phys. 210 (2000), p. 413-446.

[DeSjZw] N. Dencker, J. Sjöstrand, and M. Zworski : Pseudo-spectra of semiclassical (Pseudo)differential operators. Preprint 2003.

[DiFrMa] S. Didelot, L.S. Frank et L. Maigrot : On a degenerate elliptic singular perturbation. Asymptotic Analysis 15(2), p. 151-181 (1997).

[Dim1] M. Dimassi : Trace asymptotics formulas and some applications. Asymp. Analysis 18, p. 1-32 (1998).

[Dim2] M. Dimassi : Spectre discret des opérateurs périodiques perturbés par un opérateur différentiel à coefficients décroissants. CRAS 326, p. 1181-1184 (1998).

[Dim3] M. Dimassi : Développements asymptotiques de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique fort. Comm. in PDE 26, p. 595-627 (2001).

[DimGuRa02] M. Dimassi, J.C. Guillot, J. Ralston : Semi-classical asymptotics in magnetic Bloch bands. J. Phys. A 35 (2002), no. 35, 7597–7605.

[DimPet] M. Dimassi, V. Petkov : A paraître 2003.

[DimSj] M. Dimassi, J. Sjöstrand : Trace asymptotics via almost analytic extensions, Danish-Swedish seminar, PLNDE 21, Birkhäuser, p. 126-142.

[DoKo93] S.Yu. Dobrokhotov, V.N. Kolokoltsov : On amplitude of low energy levels splitting value for Schrödinger operator with double-well potential. *Theoretical and mathematical physics* **94** (3), (March 1993).

[DoKo94] S.Yu. Dobrokhotov, V.N. Kolokoltsov : The double-well splitting of the low energy levels for the Schrödinger operator of discrete Φ^4-models on tori. *Preprint* (1994).

[DoKoMa91] S.Yu. Dobrokhotov, V.N. Kolokoltsov, V.P. Maslov : The splitting of the low lying energy levels of the Schrödinger operator and the asymptotics of the fundamental solution of the equation $hu_t = \big(h^2\Delta/2 - V(x)\big)\,u$ (Russ.). *Teor. Mat. Fizika* **87** (3) (1991), p.323-375. (Engl. translation in Theor. Math. Phys.)

[DoKoMa92] S.Yu. Dobrokhotov, V.N. Kolokoltsov, V.P. Maslov: Quantization of the Bellman equation, exponential asymptotics and tunneling. *Advances in Soviet Math.* **13**, AMS (1992), p.1-47.

[Doz94a] S. Dozias : Opérateurs h-pseudodifférentiels à flot périodique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 318, Série I, p.1103-1108, (1994).

[Doz94b] S. Dozias : Opérateurs h-pseudodifférentiels à flot périodique, PHD thesis (Déc 1994).

[Doz94c] S. Dozias : Opérateurs h-pseudodifférentiels à flot périodique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 318 (1994), no. 12, 1103–1108.

[Doz94c] S. Dozias : Opérateurs h-pseudodifférentiels à flot périodique. Journées "Equations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1994), Exp. No. V, 9 pp., Ecole Polytech., Palaiseau, 1994.

[Doz97] S. Dozias : Clustering for the spectrum of h-pseudodifferential operators with periodic flow on an energy surface, J. Funct. Anal. 145 (1997), no. 2, 296–311.

[DucHo93] P. Duclos, H. Hogreve : On the semi-classical localization of the quantum probability. J. Math. Phys. 34 (5), p. 1681-1691 (1993).

[Du94] J.J. Duistermaat : Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities, *Comm. on Pure and applied Mathematics*,vol. 27, p.207-281, (1974).

[DuGu95] J.J. Duistermaat, V.V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic Operators and periodic bicharacteristics, *Inventiones Math.* 29, p. 39-79, (1975).

[Ego69] Y. V. Egorov : On canonical transformations of pesudodifferential operators. Uspehi Mat. Nauk. 25 (1969), p. 235-236.

[ElH83] Z. El Houakmi : Comportement semi-classique en présence de symétries: action d'un groupe fini. Thèse de troisième cycle à Nantes (1983).

[ElHel91] Z. El Houakmi, B. Helffer : Comportement semi-classique en présence de symétries: action d'un groupe compact, *Asymptotic Analysis* 5, p.91-113, (1991).

[ElsWa86] A. El Soufi, X.P. Wang : Quelques remarques sur la méthode de Witten: cas du théorème de Poincaré-Hopf et d'une formule d'Atiyah-Bott. Ann. of global analysis and geometry (1986).

[EmWe] C. Emmrich, A. Weinstein : Geometry of the transport equation in multicomponents WKB approximations. Comm. Math. Phys. 176 (1996), no. 3, 701–711.

[Erd95] L. Erdös : Magnetic Lieb-Thirring inequalities, *Comm. Math. Phys* 170 (3), p. 629-668 (1995).

[ErSol97] L. Erdős, J.P. Solovej : Semiclassical eigenvalue estimates for the Pauli operator with strong non-homogeneous magnetic Fields. II. Leading order asymptotic estimates. Comm. Math. Phys. 188 (3), p. 599-656 (1997).

[ErSol99] L. Erdős, J.P. Solovej : Semiclassical Eigenvalue Estimates for the Pauli Operator with Strong Nonhomogeneous Magnetic Fields. I. Nonasymptotic Lieb-Thirring-Type Estimate, Duke Math. J. 96 (1), p. 127-173 (1999).

[EvLe98] W.D. Evans et R.T. Lewis : Eigenvalue Estimates in the Semi-Classical Limit for Pauli and Dirac Operators with a Magnetic Field. Proc. R. Soc. Lond. 454, p. 1-35 (1998).

[ELSS] W. Desmond Evans, R.T. Lewis, H. Siedentop et J.P. Solovej : Counting Eigenvalues Using Coherent States with an Application to the Dirac Operator. Arkiv för matematik 34 (2), (1996).

[Fau93] F. Faure : Approche géométrique de la limite semi-classique par les états cohérents et mécanique quantique sur le tore. Thèse à Grenoble 1993.

[Fau00] F. Faure : Topological properties of quantum periodic Hamiltonians. J. Phys. A, Math. Gen 33, p. 531-555 (2000).

[Fef83] C. Fefferman : The uncertainty principle *Bull. Amer. Math. Soc.* 9, p.129-206, (1983).

[Fef86] C. Fefferman : The N-body problem in quantum mechanics. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 39, p.67-109, (1986).

[Fef95] C. Fefferman : Stability of Coulomb systems in a Magnetic Field, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 92(11), p. 5006-5007 (1995).

[Fef96] C. Fefferman : On Electrons and Nuclei in a Magnetic Field. mp_arc 96-376 (1996).

[FevSec90] C. Fefferman, L. Seco : On the energy of a large atom, *Bull. AMS*, 23(2), p.525-530, (1990).

[FevSec92] C. Fefferman, L. Seco : Eigenvalues and eigenfunctions of ordinary differential operators, *Advances in Math.*, 95(2), p. 145-305, October 1992.

[FevSec94a] C. Fefferman, L. Seco : The density in a one-dimensional potential, *Advances in Math.*, 107(2), p. 187-364, September 1994.

[FevSec94b] C. Fefferman, L. Seco : The eigenvalue sum for a one-dimensional potential, *Advances in Math.*, 108(2), p. 263-335, October 1994.

[FevSec95] C. Fefferman, L. Seco : The density in a three-dimensional radial potential, *Advances in Math.*, 111(1), p. 88-161, March 1995.

[FevSec94c] C. Fefferman, L. Seco : On the Dirac and Schwinger corrections to the ground-state energy of an atom, *Advances in Math.*, 11(1), p. 1-188, August 1994.

[FevSec93] C. Fefferman, L. Seco : Aperiodicity of the hamiltonian flow in the Thomas-Fermi potential, *Revista Mathematica Iberoamericana*, 9(3), p. 409-551, (1993).

[Fer02] C. Fermanian : Wigner measures and molecular propagation through generic energy level crossings. Preprint Oct. 2002.

[FerGer02] C. Fermanian, P. Gérard : A Landau-Zener formula for non-degenerated involutive codimension 3 crossings. Preprint Sept. 2002. A paraître Annales Henri Poincaré.

[FlWe86] A. Floer, A. Weinstein : Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. J. Funct. Analysis 69, p. 397-408 (1986).

[Fou98] S. Fournais : Semiclassics of the quantum current. Comm. in PDE 23 (3&4), p. 601-628 (1998).

[Fou01a] S. Fournais : The magnetisation of large atoms in strong magnetic fields. Comm. Math. Phys. 216 (2), p. 375-393 (2001).

[Fou01b] S. Fournais : Semiclassics of the quantum current in a strong constant magnetic field. Comm. in PDE 26 (7&8), p. 1427-1496 (2001).

[Fou01c] S. Fournais : On the semi-classical asymptotics of the current and magnetisation of a non-interacting electron gas at zero temperature in a strong constant magnetic field. Ann. Henri Poincaré 2, p. 1189-1212 (2001).

[Fou03] S. Fournais : Semiclassics of the quantum current in a very strong constant magnetic field. A paraître aux Ann. Inst. Fourier 2003.

[Fu] S. Fujiie : Semiclassical representation of the scattering matrix by a Feynman integral. Comm. Math. Phys. 198 (1998), no. 2, 407–425.

[FuRa98] S. Fujiie, T. Ramond : Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. 69, No.1, 31-82 (1998).

[FuRa00] S. Fujii, T. Ramond : Exact WKB analysis and the Langer modification with application to barrier top resonances. Howls, Christopher J. (ed.) et al., Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear non-linear. Papers from the symposium on algebraic analysis of singular perturbations, Kyoto, Japan, November 30-December 5, 1998. Kyoto: Kyoto University Press. 15-31 (2000).

[Fuj91] D. Fujiwara: The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension. *Nagoya Math. Journal* **124** (1991), p. 61-97.

[GerGri88] C. Gérard, A. Grigis : Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier. J. Differential Equations 72 (1988), no. 1, 149–177.

[GerMar89] C. Gérard, A. Martinez : Semi-classical asymptotics for the spectral function of long range Schrödinger operators. J. of functional analysis, Vol. 84, No 1 (1989) p. 81-110.

[GerMarSj91] C. Gérard, A. Martinez et J. Sjöstrand : A mathematical approach to the effective hamiltonian in pertturbed periodic problems. Comm. in Math. Physics 142 (2) (1991).

[GerMarRob89] C. Gérard, A. Martinez et D. Robert : Breit-Wigner formulas for the scattering phase and the total scattering cross section in the semi-classical limit. Comm. in Math. Phys. 121 (1989) p. 323-336.

[GerRob90] C. Gérard, D. Robert : La limite semi-classique de la phase de Berry. Note aux CRAS, Paris, Sér. I, 310, No 9 (1990),p. 677-682.

[GerSi92] C. Gérard, I. Sigal : Space-time picture of semiclassical resonances. Comm. Math. Phys. 145 (1992), no. 2, 281–328.

[GerSj87] C. Gérard, J. Sjöstrand : Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type. Comm. Math. Phys. 108 (1987),p. 391-421.

[GerSj88] C. Gérard, J.Sjöstrand : Résonances en limite semiclassique et exposants de Lyapunov. Commun. Math. Phys. 116, No.2, 193-213 (1988).

[GerP91] P. Gérard : Mesures semi-classiques et ondes de Bloch. Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique, Exposé XVI, 1990-91.

[GerLei92] P. Gérard, E. Leichtnam : Ergodicité de fonctions propres pour des problèmes aux limites. Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique, 1991–1992, Exp. No. XIV, 14 pp., Ecole Polytech., Palaiseau, 1992.

[GerLei93] P. Gérard, E. Leichtnam : Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem, *Duke Math. Journal*, Vol. 71, $n^0 2$, August 1993 559–607.

[GeMaMaPo00] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J. Mauser et F. Poupaud. Homogenization limits and Wigner transform. Comm. Pure Appl. Math. 50, p. 323-379 (2000). Erratum: Comm. Pure Appl. Math. 53, p. 280-281 (2000).

[GGM78] V. Glaser, H. Grosse et A. Martin : Bounds on the number of eigenvalues of the Schrödinger operator, *Comm. Math. Phys.* 59, p.197-212,(1978).

[GrMar95] V. Grecchi, A. Martinez : Non-linear Stark effect and molecular localization. Comm. Math. Phys. 166 (1995), no. 3, 533–548.

[GrMaSa96a] V. Grecchi, A. Martinez et A. Sachetti : Splitting instability : the unstable double well J. Phys. A: Math. Gen. 29, 4561-4587 (1996)

[GrMaSa96b] V. Grecchi, A. Martinez et A. Sachetti : Double well Stark effect : crossing and anticrossing of resonances Asymptotic Analysis Vol. 13 n.4, 373-391 (1996).

[GrMaSa02] V. Grecchi, A. Martinez et A. Sachetti : Destruction of the beating effect for a non-linear Schrödinger equation. Comm. Math. Phys. 227 (2002), no. 1, 191–209.

[Gri87] A. Grigis : Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 20 (1987), p. 641-672.

[Gri91] A. Grigis : Analyse semi-classique de l'opérateur de Schrödinger sur la sphère. Séminaire sur les équations aux Dérivées Partielles, 1990–1991, Exp. No. XXIV, 9 pp., Ecole Polytech., Palaiseau, 1991.

[Gro77] H. Grosse : Quasi-classical estimates of the energy levels *Acta Phys. Austr.* 52, p.89-105, (1980).

[Gui77] V.V. Guillemin : Lectures on spectral properties of elliptic operators, *Duke Math. J.*, p.485-517, (1977).

[Gui85] V.V. Guillemin : A new proof of Weyl's formula on the asymptotic distribution of eigenvalues. *Advances in Math.* 55, p.131-160, (1985).

[Gui86] V.V. Guillemin : Quasiclassical aspects of reduction, Proc. of the VIII International Congress on Math. Physics 1986, World Scientific publishers

[GuiMel79] V.V. Guillemin, R. Melrose : The Poisson summation formula for manifolds with boundary, *Advances in Math.* 32, p.204-232, (1979).

[GuiMel81] V.V. Guillemin, S. Sternberg : The metaplectic representation, Weyl operators and spectral theory, *Journal of Functional Analysis* 42, p.128-225, (1981).

[GuiUh81] V. Guillemin, G. Uhlmann : Oscillatory integrals with singular symbols *Duke Math. J.* 48, p.251-267, (1981).

[GuiUr87] V.V. Guillemin, A. Uribe : Reduction, the trace formula, and semiclassical asymptotics, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 84 , p.7799-7801, (1987).

[GuiUr88] V.V.Guillemin, A. Uribe : The Laplace operator on the n-th power of a line bundle : eigenvalues which are uniformly bounded in n. Asymptotic analysis 1 (2), p. 105-114 (1988).

[GuiUr89a] V.V. Guillemin, A. Uribe : Circular symmetry and the trace formula, *Inv. Math.* 96, p. 385-423, (1989).

[GuiUr89b] V.V. Guillemin, A. Uribe : Monodromy in the quantum spherical pendulum, *Commun. Math. Phys.* 122, p.563-574, (1989).

[GuiRalTru88] J.C. Guillot, J. Ralston et E. Trubowitz : Semi-classical asymptotics in solid state physics. Comm. in Math. Phys. 116, p. 401-4415 (1988).

[Gut71] M. Gutzwiller : Periodic orbits and classical quantization conditions, *J. Math. Phys.*(12), p.343-358, (1971).

[Hag80] G. Hagedorn : Semi-classical quantum mechanics I, Comm. Math. Phys. 71, p. 77-93 (1980).

[Hag81a] G. Hagedorn : Semiclassical quantum mechanics. II. The large mass asymptotics for coherent states. Trends in applications of pure mathematics to mechanics, Vol. III (Edinburgh, 1979), 111–119, Monogr. Stud. Math., 11, Pitman, Boston, MA, 1981.

[Hag81b] G. Hagedorn : Semi-classical quantum mechanics III, Ann. Phys. 135 (1981) p. 58-70.

[Hag85] G. Hagedorn : Semi-classical quantum mechanics IV, Ann. Inst. Poincaré 42 (1985), p. 363-374.

[HagJoy98] G. Hagedorn, A. Joye : Landau-Zener transitions through small electronic eigenvalue gaps in the Born-Oppenheimer approximation. Ann. Inst. Henri Poincaré 68 (1), p. 85-134 (1998).

[HagJoy99a] G. Hagedorn, A. Joye : Semiclassical dynamics with exponentially small error estimates. Comm. Math. Phys. 207 (1999), no. 2, 439–465.

[HagJoy99b] G. Hagedorn, A. Joye : Molecular propagation through small avoided crossings of electron energy levels. Rev. Math. Phys. 11 (1), p. 41-101 (1999).

[Har78] E. Harrell : On the rate of asymptotic eigenvalue degeneracy. Comm. in Math. Phys. 60 (1978), p. 73-95.

[Har79] E. Harrell : The band structure of a one dimensional periodic system in the scaling limit. Ann. Phys. 119, p. 351-369 (1979).

[Har80] E. Harrell : Double wells. Comm. Math. Phys. 75, p. 239-261 (1980)

[HarKl83] E. Harrell, M. Klaus : On the double well problem for Dirac operators. Ann. Inst. Henri Poincaré 38 (2), p. 153-166 (1983).

[HarSim80] E. Harrell, B. Simon : The mathematical theory of resonances whose widths are exponentially small. Duke Math. Journal, Vol. 47, No 4 (1980).

[Hel88a] B. Helffer : *Etude du Laplacien de Witten associé à une fonction de Morse dégénérée,* Publications de l'université de Nantes, Séminaire EDP 87-88.

[Hel88b] B. Helffer : *Effet d'Aharonov-Bohm pour un état borné,* Comm. in Math. Phys. 119, p. 315-329, (1988).

[Hel90] B. Helffer : Remarks on the Lieb-Thirring conjecture, Séminaire Geometrie und Physik (Berlin 1990).

[Hel91] B. Helffer : *Décroissance exponentielle pour les fonctions propres d'un modèle de Kac en dimension* > 1, Actes du colloque de Lambrecht (Décembre 1991), Operator Theory : Advances and Applications, Vol.57 (1992), p. 99-115.

[Hel92] B. Helffer : *Problèmes de doubles puits provenant de la théorie statistico-mécanique des changements de phase II Modèles de Kac avec champ magnétique, étude de modèles près de la température critique,* (Preprint ENS Octobre 1992).

[Hel93] B. Helffer : *On Schrödinger equation in large dimension and connected problems in statistical mechanics,* Proceedings of the Atlanta Conference (1992) in Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, p. 153-167, Mathematics in Science and Engineering n° 192, Academic Press,

[Hel94a] B. Helffer : Around a stationary phase theorem in large dimension. J. Funct. Analysis 119, p 217-252 (1994).

[Hel94b] B. Helffer : *Universal estimate of the gap for the Kac Operator in the convex case,* Comm. in Math. Physics, Vol. 161, n°3, (1994), p. 631-643.

[Hel95] B. Helffer : *Spectral properties of the Kac operator in large dimension,* Proceedings on Mathematical quantum theory II: Schrödinger operators, (August 1993), edited by J. Feldman, R. Froese, and L.M. Rosen, CRM Proceedings and lecture Notes, Vol 8, p. 179-211 (1995).

[Hel96a] B. Helffer : *Correlation decay and gap of the transfer matrix,* Algèbre et Analyse, 8 (1) (1996), p. 192-210,
ou dans la "traduction" dans St Petersburg Math. Journal.

[Hel96b] B. Helffer : *Around the transfer operator and the Trotter-Kato formula,* Proceedings of the conference in Holzhau, Birkhäuser, Series of

Operator Theory: Advances and Applications, p. 161-174, M. Demuth et B.-W. Schulze(editors).

[Hel96c] B. Helffer : *Recent results and open problems on Schrödinger operators,* Laplace integrals and transfer operators in large dimension. Advances in PDE, Schrödinger operators, Markov semigroups, Wavelet analysis, Operator algebras, édité par M. Demuth, B.W. Schulze, E. Schrohe et J. Sjöstrand, Akademie Verlag, Vol 11, p. 11-162 (1996).

[Hel96d] B. Helffer : *On Laplace integrals and transfer operators in large dimension: examples in the non convex case,* Letters in Math. Physics 38, p. 297-312 (1996).

[Hel96e] B. Helffer : *Semi-classical analysis for transfer operators: WKB constructions in dimension 1,* Partial differential equations and mathematical Physics, The danish-swedish analysis seminar (1995), Progress in nonlinear differential equations and their applications, Vol. 21, Birkhäuser (1996), p. 168-180.

[Hel97a] B. Helffer : *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator with magnetic wells,* (after R. Montgomery, B.Helffer-A. Mohamed), Proceedings of the conference in Minneapolis.
The IMA Volumes in Mathematics and its applications, Vol. 95,
Quasiclassical Methods, Springer Verlag (1997) p. 99-114.

[Hel97b] B. Helffer : *Semi-classical analysis for transfer operators: WKB constructions in large dimension.* Comm. in Math. Physics 187, 81-113 (1997).

[Hel97c] B. Helffer : *Splitting in large dimension and infrared estimates*, Dans "Microlocal Analysis and Spectral Theory". Edité par L. Rodino. NATO ASI Series. Series C: Mathematical and Physical Sciences- Vol. 490. Kluwer Academic Publishers, p. 307-348 (1997).

[Hel98a] B. Helffer : *Splitting in large dimension and infrared estimates II Moment estimates,* Journal of Mathematical Physics, Vol. 39, No 2, February 98, p. 760-776.

[Hel98b] B. Helffer : Remarks on the decay of correlations and Witten's Laplacians I: Brascamp-Lieb inequalities and the semi-classical limit. J. Funct. Analysis 155, p 571-586 (1998).

[Hel99a] B. Helffer : *Semi-classical analysis in large dimension.* Actes du congrès international de physique mathématique de Brisbane(1997). p. 267-272. International Press (1999).

[Hel99b] B. Helffer : Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians –Analysis of the dependence on the interaction–. Rev. in Math. Physics. Vol. 11, No 3 (1999), p. 321-336.

[Hel99c] B. Helffer : Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians –Application to Log-Sobolev inequalities–. Annales de l'IHP (Section Probabilités-Statistiques), Vol. 35, No. 4, 1999, p. 483-508.

[Hel02] B. Helffer : Bouteilles magnétiques et supraconductivité (d'après Helffer-Morame, Lu-Pan, Helffer-Pan). Séminaire Equations aux dérivées partielles de l'Ecole Polytechnique. Serveur: www.math.polytechnique.fr.

[HelKer95] B. Helffer, P. Kerdelhue *On the total bandwidth for the rational Harper's equation,* Comm. in Math. Physics, Vol. 173, n° 2, (1995), p. 335-336.

[HelKerSj90] B. Helffer, P. Kerdelhue et J. Sjöstrand. *Le papillon de Hofstadter revisité,* Mémoire de la SMF, n°43, Tome 118, Fasc.3, 1990.

[HKSW92] B. Helffer, A. Knauf, H. Siedentop, R. Weikard : On the absence of a first order correction for the number of bound states of a Schrödinger operator with coulombic singularity, *Comm. in PDE*, Vol. 17 (3-4), p. 615-639 (1992).

[HelLaf02] B. Helffer et O. Lafitte : Asymptotics methods for the eigenvalues of the Rayleigh equation. Preprint March 2002. To appear in Asymptotic Analysis (2002).

[HelMar87] B. Helffer et A. Martinez : *Comparaison entre les différentes notions de résonances,* Acta Physica Helvetica, vol.60, (1987), p. 992-1003.

[HelMar02] B. Helffer et A. Martinez : Phase transition in the semi-classical limit. Rev. in Math. Physics, Vol. 12 (11) (2000), p. 1429-1450 .

[HelMarRob87] B. Helffer, A. Martinez et D. Robert : Ergodicité et limite semi-classique, *Comm. in Math. Physics* 109, p.313-326, (1987).

[HelMo96] B. Helffer et A. Mohamed : Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells, Journal of Functional Analysis 138, N^o 1 (1996), p. 40-81.

[HelMo01] B. Helffer et A. Morame : Magnetic bottles in connection with superconductivity. Journal of Functional Analysis, Vol. 185, No 2, October, p. 604-680 (2001).

[HelMo02a] B. Helffer et A. Morame : Magnetic bottles for the Neumann problem: the case of dimension 3, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Mathematical Section, Vol. 112, No 1, February (2002).

[HelMo02b] B. Helffer et A. Morame : Magnetic bottles for the Neumann problem: curvature effect in the case of dimension 3 (General case). Preprint mp_arc 2002-145. A paraître Annales de l'ENS.

[HelNo88] B. Helffer, J. Nourrigat : Remarques sur le principe d'incertitude, *Journal of Functional Analysis*, vol.80 , n^{0}1, p.33-46, Sept. 1988.

[HelNo92] B. Helffer, J. Nourrigat : Décroissance à l'infini des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger avec champ électromagnétique polynômial. *Journal d'Analyse Mathématique de Jérusalem* 58, p.263-275, (1992).

[HelPa90] B. Helffer, B. Parisse : Riesz means of bound states and semi classical limit connected with a Lieb-Thirring's conjecture-III, Preprint LMENS, november 1990.

[HelPa94] B. Helffer, B. Parisse : *Effet tunnel pour Klein-Gordon,* Annales de l'IHP, Section Physique théorique, Vol.60, n°2, p. 147-187 (1994).

[HelRam] B. Helffer, T. Ramond : Semi-classical expansion for the thermodynamical limit of the groundstate energy of Kac's operator. Actes du colloque EDP de Nantes (Juin 2000). et sous une version plus détaillée:
in Long time behaviour of classical and quantum systems (Ed. S.Graffi, A.Martinez), World Scientific Publishing. (2001) p. 140-171.

[HelRob81] B. Helffer, D. Robert : Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques, *Annales de l'institut Fourier* 31(3), p. 169-223, (1981).

[HelRob82a] B. Helffer, D. Robert : Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques, *Annales de l'ENS de Pise*, Série IV, Vol IX, $n^0 3$, (1982).

[HelRob82b] B. Helffer, D. Robert : Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$, *Comm. in P.D.E*, p.795-882, (1982).

[HelRob83] B. Helffer, D. Robert : Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et applications, *Journal of functional Analysis*, Vol.53, $n^0 3$, oct. 1983.

[HelRob84a] B. Helffer, D. Robert : Etude du spectre pour un opérateur globalement elliptique dont le symbole présente des symétries, I action des groupes finis. *American Journal of Math.* 106, $n^0 5$, p. 1199-1236, (1984).

[HelRob84b] B. Helffer, D. Robert : Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique, *Annales de l'IHP (Physique théorique)*, Vol.41, $n^0 3$, p.291-331, (1984).

[HelRob86] B. Helffer, D. Robert : Etude du spectre pour un opérateur globalement elliptique dont le symbole présente des symétries, II action des groupes compacts *American Journal of Math.* 108, p.973-1000, (1986).

[HelRob90a] B. Helffer, D. Robert : Riesz means of bound states and semi-classical limit connected with a Lieb-Thirring conjecture I, *Asymptotic analysis* 3, p.91-103, (1990).

[HelRob90b] B. Helffer, D. Robert : Riesz means of bound states and semi-classical limit connected with a Lieb-Thirring conjecture II *Annales de l'IHP (Physique théorique)* 53, $n^0 2$, p.139-147, (1990).

[HelSie96] B. Helffer, H. Siedentop : A generalization of the Kustaanheimo-Stiefel transform for two-center systems, *Bull. London Math. Soc.* 28 (1996), no. 1, 33–42.

[HelSj84] B. Helffer, J. Sjöstrand : Multiple wells in the semi-classical limit I, *Comm. in PDE*, 9(4), p.337-408, (1984).

[HelSj85a] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Puits multiples en limite semi-classique II - Interaction moléculaire-Symétries-Perturbations,* Annales de l'IHP (section Physique théorique), Vol. 42, n°2, 1985, p. 127-212.

[HelSj85b] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Multiple wells in the semi-classical limit III,* Math. Nachrichten 124 (1985) p. 263-313.

[HelSj85c] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Puits multiples en limite semi-classique IV -Etude du complexe de Witten -,* Comm. in PDE, Vol.10, n°3, 1985, p. 245-340.

[HelSj85d] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique I,* Série de conférences aux journées EDP de Saint-Jean de Monts (Juin 1985)

[HelSj86a] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Puits multiples en limite semiclassique V - le cas des minipuits -,* dans Current topics in Partial Differential Equations, Papers dedicated to Professor S. Mizohata on the occasion of his sixtieth birthday, edited by Y. Ohia, K. Kasahara and N. Shimakura (1986) Kinokuniya company LTD, Tokyo, p. 133-186. (annoncé au séminaire de l'école Polytechnique exposé n°10, 1985-86).

[HelSj86b] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique II,* Advances in microlocal Analysis, p. 291-323, NATO Series - Mathematics, Vol.168, D.Reidel.

[HelSj86c] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Résonances en limite semi-classique,* Mémoires de la SMF, (1986), Tome 114, Fasc.3.

[HelSj87a] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Puits multiples en limite semi-classique VI - le cas des puits variétés -,* Annales de l'IHP (section physique théorique) vol.46, 4,1987,p. 353-373.

[HelSj87b] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol. 14, n°4, p. 625-657 (1987).

[HelSj88a] B. Helffer, J. Sjöstrand : *A proof of the Bott inequalities,* (dans volume en l'honneur de M. Sato), Algebraic Analysis, Vol.1, Academic Press, (1988).

[HelSj88b] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Etude semiclassique pour l'équation de Harper,* Exposé au séminaire EDP de l'Ecole polytechnique, exposé n°17, 1987-1988 et exposé n°6 des journées EDP de St Jean de Monts (Juin 1987).

[HelSj88c] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Structure cantorienne du spectre de l'opérateur de Harper,* Séminaire EDP de l'Ecole polytechnique (exposé 12, 1987-1988),

[HelSj88d] B. Helffer, J. Sjöstrand : Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique) *Mémoire de la SMF*, $n^0 34$, Tome 116, Fasc.4, (1988).

[HelSj89] B. Helffer, J. Sjöstrand : Analyse semi-classique pour l'équation de Harper III *Mémoire de la SMF*, $n^0 39$. Supplément du Bulletin de la SMF, Tome 117, Fasc. 4 (1989).

[HelSj90a] B. Helffer, J. Sjöstrand : Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II Comportement semi-classique près d'un rationnel *Mémoire de la SMF*, $n^0 40$. Supplément du Bulletin de la SMF, Tome 118, Fasc.1, (1990).

[HelSj89] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper,*

Partie I *Champ magnétique fort,*,
Partie II *Champ magnétique faible, l'approximation de Peierls,*
Lecture notes in Physics, n°345 (éditeurs A. Jensen et H. Holden), p. 118-198 (1989).

[HelSj90b] B. Helffer, J. Sjöstrand : On diamagnetism and de Haas-van Halphen effect *Ann.Inst.Henri Poincaré, Physique théorique*, Vol.52, n^{0}4, p.303-375, (1990).

[HelSj92a] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Semiclassical expansions of the thermodynamic limit for a Schrödinger equation,* Actes du colloque Méthodes semi-classiques à l'université de Nantes, 24 Juin-30 Juin 1991, Astérisque 210 (1992), p. 135-181.

[HelSj92b] B. Helffer, J. Sjöstrand : *Semiclassical expansions of the thermodynamic limit for a Schrödinger equation II,* Helv. Phys. Acta Vol.65 (1992), p. 748-765, Erratum Helv. Phys. Acta Vol.67 (1994), p. 1-3.

[HelSj94] B. Helffer, J. Sjöstrand : *On the correlation for like Kac models in the convex case,* Journal of Statistical Physics (1994), Vol. 74, n°1-2, p. 349-369.

[Hep74] K. Hepp : The classical limit for quantum mechanical correlation function. Comm. in Math. Phys. 35 (1974), p. 265-277.

[HerNi02] F. Herau, F. Nier : Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential, prépublication de l'Université de Rennes I, avril 2002. A paraître Archive for rational mechanics and analysis 2003.

[HerbSim]] I. Herbst, B. Simon : Dilation analyticity in constant electric field. II. N-body problem, Borel summability. Comm. Math. Phys. 80 (1981), no. 2, 181–216.

[HisNak89] P.D. Hislop, S. Nakamura : Semiclassical resolvent estimates. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 51 (1989), no. 2, 187–198.

[HisSig87] P.D. Hislop, I.M. Sigal : Shape resonances in quantum mechanics. Differential equations and mathematical physics (Birmingham, Ala., 1986), 180–196, Lecture Notes in Math., 1285, Springer, Berlin, 1987.

[HisSig89] P.D. Hislop, I.M. Sigal : Semiclassical theory of shape resonances in quantum mechanics. Mem. Amer. Math. Soc. 78 (1989), no. 399, 123 pp.

[Hof76] D. Hofstadter: Energy levels and wave functions for Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, Phys.Rev.B 14, p.2239-2249, (1976).

[HolKusStr] R. Holley, S. Kusuoka, D. Stroock : Asymptotics of the spectral gap with applications to the theory of simulated annealing. J. Funct. Anal. 83, No.2, 333-347 (1989).

[Ho66] L. Hörmander : On the Riesz Means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators, Yeshiva University Conference, Nov.1966.

[Ho68] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator, *Acta Mathematica* 121, p.193-218, (1968).

[Ho71] L. Hörmander : Fourier integral operators I, *Acta Mathematica* 127, p.79-183, (1971).

[Ho79] L. Hörmander : The Weyl Calculus of pseudodifferential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* 32, p.359-443, (1979).

[Ho81] L. Hörmander : On the Asymptotic distribution of eigenvalues of p.d.o in $\mathbb{R}^n$, *Arkiv för Math.* 17, $n^0 3$, p.169-223, (1981).

[Hor91] W. Horn : Semi-classical constructions in Solid State Physics. Comm. in PDE 16 (2-3), p. 255-289 (1991).

[HovSpTe01] F. Hövermann, H. Spohn et S. Teufel : Semiclassical limit for the Schrödinger equation with a short scale periodic potential. Comm. Math. Phys. 215 (2001), no. 3, 609–629.

[Hug90] W. Hughes : An atomic energy lower bound that gives Scott's correction. PHD thesis, Princeton, Dep. of mathematics (1986), *Adv. in Math.* 79, p.213-, (1990).

[HLW00] D. Hundertmark, A. Laptev et T. Weidl : New bounds on the Lieb-Thirring constants. Invent. Math. 140 (3), p. 693-704 (2000).

[HLT98] D. Hundertmark, E. Lieb et L.E. Thomas : A Sharp Bound for an Eigenvalue Moment of the One-Dimensional Schrödinger Operator. Adv. Theor. Math. Phys. 2 (4), p. 719-731 (1998).

[Hun86] W. Hunziker : Distorsion analyticity and molecular resonance curves, Ann. Inst. H. Poincaré (Section Phys. Théorique) 45, p. 339-358 (1986).

[Hux88] B.D. Huxtable : Absence of a Scott correction for the total binding energy of non interacting fermions in a smooth potential well, PHD thesis, Pasadena, (1988).

[IaSjZw02] A. Iantchenko, J. Sjöstrand, M. Zworski : Birkhoff normal forms in semi-classical inverse problems. Math. Res. Lett. 9, No.2-3, 337-362 (2002).

[IaSj02] A. Iantchenko, J. Sjöstrand : Birkhoff normal forms for Fourier integral operators. II. Am. J. Math. 124, No.4, 817-850 (2002).

[Iv82] V. Ivrii : On the sharp quasi-classical spectral asymptotics for the Schrödinger Operator on Manifold with boundary. Soviet Math. Doklady 26(2), p. 285-289 (1982).

[Iv86a] V. Ivrii : Les estimations pour le nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger, *Notes aux CRAS*, t.302, n^0 13, 14 and 15; p. 467-470, 491-494 and 535-538, (1986).

[Iv86b] V. Ivrii : Estimates for number of the negative eigenvalues of the Schrödinger operator with singular potentials, Congrès international des Mathématiciens (1986) (Berkeley).

[Iv87] V. Ivrii : Estimates for a number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator with intensive magnetic field, Proc. of St Jean de Monts, June 1987.

[Iv90] V. Ivrii : Spectral asymptotics with highly accurate remainder estimates, Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique 1989-1990.

[Iv92] V. Ivrii : Méthodes semi-classiques, volume 1, Ecole d'été, Nantes Juin 1991, *Astérisque* **207** (1992).

[Iv95] V. Ivrii : Asymptotics of the ground state energy of heavy molecules in the strong magnetic field. Quasiclassical methods (Minneapolis, MN, 1995), 125–138, IMA Vol. Math. Appl., 95, Springer, New York, 1997.

[Iv96] V. Ivrii : Heavy molecules in the strong magnetic field. Russian J. Math. Phys. 4 (1996), no. 4, 449–455.

[Iv98] V. Ivrii : Asymptotics of the ground state energy of heavy molecules in a strong magnetic field. II. Russian J. Math. Phys. 5 (1997), no. 3, 321–354 (1998).

[Iv99] V. Ivrii : Heavy molecules in a strong magnetic field. III. Estimates for ionization energy and excessive charge. Russ. J. Math. Phys. 6 (1999), no. 1, 56–85.

[Iv00] V. Ivrii : Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients. Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 22, 1155–1166.

[IvSig95] V.Ya. Ivrii, I.M. Sigal : Asymptotics of the ground state energies of large Coulomb systems, *Annals of Mathematics* 138, p. 243-335, (1995).

[JeKlWa01] T. Jecko, M. Klein et X.P. Wang : Existence and Born-Oppenheimer asymptotics of the total scattering cross-section in ion-atom collisions. Long time behaviour of classical and quantum systems (Bologna, 1999), 220–237, Ser. Concr. Appl. Math., 1, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.

[JoMaSc81] G. Jona-Lasinio, F. Martinelli, E. Scoppola : New approach to the semiclassical limit of quantum mechanics. I. Multiple tunnelings in one dimension. Comm. Math. Phys. 80 (1981), no. 2, 223–2

[JoMaSc84] G. Jona-Lasinio, F. Martinelli, E. Scoppola : Quantum particle in a hierarchical potential with tunneling over arbitrary large scales. J. Phys. A (Math. Gen.) 17 635 (1984).

[JoMaSc85] G. Jona-Lasinio, F. Martinelli, E. Scoppola : Multiple tunneling in d-dimensions: a quantum particle in a hierarchical potential. Ann. Inst. Poincaré (Section Phys. Théorique) 42 (1), p. 73 (1985).

[JoPrSj95] G. Jona-Lasinio, C. Presilla, J. Sjöstrand : On Schrödinger equations with concentrated non linearities. Ann. Physics 240 (1), p. 1-21 (1995).

[Joy85] A. Joye : Proof of the Landau-Zener formula. Asymptotic analysis 9, p. 209-258 (1994).

[Jun97] K. Jung : Adiabatik und Semiklassik bei Regularität vom Gevrey-typ, PHD Thesis (TU Berlin) (1997).

[Ka62] M. Kac : Statistical mechanics of some one-dimensional systems. Studies in mathematical analysis and related topics: *Essays in honor of Georges Polya*, Stanford University Press, Stanford, California (1962), p.165-169.

[Ka66a] M. Kac : Can you hear the shape of a drum. Amer. Math. Monthly 73, p. 1-23 (1966).

[Ka66b] M. Kac : Mathematical mechanisms of phase transitions. Brandeis lectures (1966), Gordon and Breach.

[Kahel63] M. Kac and E. Helfand: Study of several lattice systems with long-range forces. *J. Math. Phys.* **4** (1963), p.1078-1088 .

[KaTh66] M. Kac, C. Thompson: On the mathematical mechanism of phase transition. *Proc.N.A.S.* **55** (1966), p.676-683 and Erratum **56** (1966), p.1625.

[KaTh69] M. Kac, C. Thompson: Phase transition and eigenvalue degeneracy of a one dimensional anharmonic oscillator. *Studies in Applied Mathematics* **48** (1969), p.257-264.

[KaiKe00] N. Kaidi, P. Kerdelhue : Forme normale de Birkhoff et résonances. Asymptotic Anal. 23, No.1, 1-21 (2000).

[KaiRou900] N. Kaidi, M. Rouleux : Multiple resonances in the semi-classical limit. Commun. Math. Phys. 133, No.3, 617-634 (1990).

[KaiRou93] N. Kaidi, M. Rouleux : Forme normale d'un hamiltonien à deux niveaux près d'un point de branchement (limite semi-classique). C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 317, No.4, 359-364 (1993).

[Kar02] U. Karlsson : Semi-classical approximation of quantum mechanical problems. PHD from KTH (2002).

[Ke58] J.B. Keller : Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for non separbale systems, Ann. Phys. 4, p. 180-208 (1958).

[KeWe85] J.B. Keller, A. Weinstein : Hill's equation with a large potential. J. App. Math. 45 (2), 1985.

[Ker92] P. Kerdelhué: Spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique avec symétrie d'ordre 6, Mémoire de la SMF $n^0 51$; Tome 120, Fasc.4, (1992).

[Ker95] P. Kerdelhué: Equation de Schrödinger magnétique avec symétrie d'ordre 6: mesure du spectre II, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. 62, No.2, 181-209 (1995).

[Kh96] D. Khuat-Duy : Formules de trace semi-classiques pour une éneergie critiques et construction de quasi-modes à l'aide d'états cohérents. Thèse de doctorat de l'Université de Dauphine (1996).

[Kh97] D. Khuat-Duy : A semi-classical formula for Schrödinger operators in the case of a critical energy level. Journ. Funct. Analysis 146 (2), p. 299-351 (1997).

[KiSi85a] W. Kirsch, B. Simon : Universal lower bounds on eigenvalue splittings for one dimensional Schrödinger operators. Comm. Math. Phys. 97, p. 453-460 (1985).

[KiSi85b] W. Kirsch, B. Simon : Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators. J. Funct. Analysis, 75, p. 396-410 (1985).

[Kla] . Klaus : A completer

[Kle86] M. Klein : On the absence of resonances for Schrödinger operators with nontrapping potentials in the classical limit. Comm. Math. Phys. 106 (1986), no. 3, 485–494.

[Kle87] M. Klein : On the mathematical theory of predissociation. Ann. Physics 178 (1987), no. 1, 48–73.

[KMW93] M. Klein, A. Martinez et X.P. Wang : On the Born-Oppenheimer approximation of wave operators in molecular scattering theory. Comm. Math. Phys. 152 (1993), no. 1, 73–95.

[KMW97] M. Klein, A. Martinez et X.P. Wang : On the Born-Oppenheimer approximation of diatomic wave operators. II. Singular potentials. J. Math. Phys. 38 (1997), no. 3, 1373–1396.

[KMSW92] M. Klein, A. Martinez, R. Seiler et X.P. Wang : On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules, Comm. Math. Phys. 143, p. 607-639 (1992).

[KlSc90] M. Klein et E. Schwarz : An elementary approach to formal WKB expansions in R^n. Rev. Math. Phys. 2 (1990), no. 4, 441–456.

[Klo91] F. Klopp : Etude semi-classique d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique. Ann. Inst. Henri Poincaré, sér. Phys. Théor., Vol. 55, p. 459-509 (1991).

[Klo94] F. Klopp : Resonances for perturbations of a semi-classical periodic Schrödinger operator, Ark. Mat., Vol. 32, p. 323-371 (1994).

[Klo95] F. Klopp : Localisation pour des opérateurs de Schrödinger dans $L^2(\mathbb{R}^d)$: un modèle semi-classique. Ann. Inst. Fourier, Vol. 45, p. 265-316 (1995).

[Klo97] F. Klopp : Etude semi-classique d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique : cas d'un nombre fini de perturbations. Asympt. Anal., Vol. 15, p. 55-102 (1997).

[Kn87] A. Knauf : Ergodic and topological properties of coulombic periodic potentials. Comm. in Math. Phys. 100 (1987), p. 89-112.

[Kn89] A. Knauf : Coulombic Periodic Potentials. Ann. Physics 191(2), p. 205-240 (1989).

[Ko59] W. Kohn : Theory of Bloch functions in a magnetic field : the effective hamiltonian. Phys. Rev. 115 (6) (1959).

[KoMaSh03] Y. Kordyukov, V. Mathai et M. Shubin : Equivalence of spectral projections in semi-classical limit and a vanishing theorem for higher traces in K-theory. Preprint 2003.

[Lan30] L.D. Landau : Zeitschrift Physik 64, p. 629 (1930). Collected papers (p. 35), Gordon and Breach, Ter Haar editor.

[LapWe00] A. Laptev, T. Weidl : Sharp Lieb-Thirring inequalities in high dimensions. Acta Math. 184 (1), p. 87-111 (2000).

[LaWi92] Y. Last, M. Wilkinson: A sum rule for the dispersion relations of the rational Harper equation, J.Phys.A: Math.Gen.25, p.6123-6133, (1992).

[Laz73a] V.F. Lazutkin : Existence of caustics for the billiard problem in a convex domain. Izv. Akad. Nauk SSSR Tome 37, No 1, p. 186-216 (1973).

[Laz73b] V.F. Lazutkin : Asymptotic analysis of the eigenvalues of the Laplace operator, and quasimodes. A series of quasimodes that corresponds to a system of caustics that are close to the boundary of the domain. Izv. Akad. Nauk SSSR Tome 37, No 2, p. 437–465 (1973).

[LiYa83] P. Li, S. T. Yau : On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, *Comm. in Math. Phys.* 88, p.309-318, (1983).

[Lie73] Elliott H. Lieb : The Classical Limit of Quantum Spin Systems. Commun. Math. Phys. 31, p. 327-340 (1973).

[Lie76a] Elliott H. Lieb : The Stability of Matter. Rev. Mod. Phys. 48, p. 553-569 (1976).

[Lie76b] Elliott H. Lieb : Bounds on the Eigenvalues of the Laplace and Schrödinger Operators". Bull. Amer. Math. Soc. 82, p. 751-753 (1976).

[Lie80] E.H. Lieb : The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem, *A.M.S. Proc. Symp. in Pure Math.* 36, p. 241-251, (1980).

[Lie84] E.H Lieb : On characteristic exponents in turbulence, *Comm. Math. Phys.* 92, p. 473-480, (1984).

[Lie86] E.H. Lieb : Bounds on Schrödinger operators and generalized Sobolev type inequalities, Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique, 1985-86.

[Lie88] E.H. Lieb : Kinetic energy bounds and their application to the study of the matter, *Lecture notes in Physics,* $n^0$345, Schrödinger operators, Proceedings, Sonderborg, Denmark, p.371-382, (1988).

[Lie90] E.H. Lieb : The stability of matter : from atoms to stars, *Bulletin of the AMS*, Vol.22, $n^0$1, January 1990.

[Lie92] E.H. Lieb : Large atoms in large magnetic fields, *Astérisque* 210, méthodes semi-classiques, Volume 2, Colloque International (Nantes, Juin 1991) (1992).

[LieSim77a] E. Lieb, B. Simon : The Thomas-Fermi theory of atoms, molecules and solids, *Adv. in Math.* 23, p.22-116, (1977).

[LieSim77b] E. Lieb, B. Simon : The Hartree-Fock theory for Coulomb systems, *Comm. in Math. Phys.* 53, p.185-194, (1977).

[LySoYn94a] E. Lieb, J.P. Solovej et J. Yngason : Asymptotics of Heavy Atoms in High Magnetic Fields I. Lowest Landau Band Regions. Commun. Pure Applied Math. 47(4), p. 513-591 (1994).

[LySoYn94b] E. Lieb, J.P. Solovej et J. Yngason : Asymptotics of heavy atoms in high magnetic fields II. Semiclassical regions. Comm. Math. Phys. 161 (1994), p. 77-124.

[LieTh76] E.H. Lieb, W.E. Thirring : Bound for the kinetic energy of fermions which proves the stability of matters, *Phys. Rev. Lett.* 35, p.687-689, (1975).

[LieTh76] E.H. Lieb, W.E. Thirring : Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger equation and their relation to Sobolev inequalities, Studies in Mathematical Physics (E. Lieb, B. Simon, A. Wightman eds), Princeton University Press (1976).

[LitFl92] R.G. Littlejohn, W.G. Flynn : Semi-classical theory of spin-orbit coupling. Phys. Rev. A 1992.

[LuPa99a] K. Lu, X-B. Pan : Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Physica D 127 (1999), p. 73-104.

[LuPa99b] K. Lu, X-B. Pan : Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. Journal of Math. Physics, Vol. 40, N^o 6, June 1999, p. 2647-2670.

[LuPa99c] K. Lu, X-B. Pan : Ginzburg-Landau system and surface nucleation of superconductivity. Proceeding of the IMS Workshop on Reaction-Diffusion systems. Chinese University of Hong-Kong, December 6-11 (1999).

[LuPa00a] K. Lu, X-B. Pan : Gauge invariant eigenvalue problems on $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2_+$. Trans. AMS, 352 (3), 2000, p. 1247-1276.

[LuPa00b] K. Lu, X-B. Pan : Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. of Differential Equations 168(2), (2000) p. 386-452.

[Lut51] J.M. Luttinger : The effect of a magnetic field on electrons in a periodic potential. Phys. Rev. 84 (4), p. 814-817 (1951).

[Mai99] L. Maigrot : Encadrement de la première valeur propre d'un opérateur de Schrödinger dégénéré. Prépublication université de Reims 99-06 (1999).

[Mar72] A. Martin : *Helv. Phys. Acta* 45, p. 140, (1972).

[Mar90] A. Martin : New results on the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and applications, *Comm. in Math. Phys.* 129, p.161-168, (1990).

[Mart87] A. Martinez : Estimations de l'effet tunnel pour le double puits, I. J. Math. Pures Appl., 66, p. 195-215 (1987).

[Mart88] A. Martinez : Estimations de l'effet tunnel pour le double puits, II. Bull. Soc. Math. Fr., 116, p. 199-229 (1988).

[Mart89] A. Martinez : Développements asymptotiques et effet tunnel dans l'approximation de Born-Oppenheimer, Ann. Inst. H. Poincaré, Vol.49 (3), p. 239-257 (1989).

[Mart91] A. Martinez : Résonances dans l'approximation de Born-Oppenheimer.
I. J. Diff. Eq. 91, p. 204-234 (1991).
II. Comm. Math. Phys. 135, p. 517-530 (1991).

[Mart92] A. Martinez : Estimations sur l'effet tunnel microlocal, Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique (1991-92).

[Mart94a] A. Martinez : Precise exponential estimates in adiabatic theory, J. Math. Phys. 35(8); p. 3889-3915 (1994).

[Mart94b] A. Martinez : Estimates on complex interactions in phase space, Math. Nachr. 167, p. 203-254 (1994).

[Mart97] A. Martinez : Microlocal exponential estimates and applications to tunneling, in Microlocal Analysis and Spectral theory, NATO ASI Series C, Vol. 490 (L. Rodino ed.), Kluwer Acad. Publ., p. 349-376 (1997).

[Mart02] A. Martinez : Resonance free domains for non globally analytic potentials, Ann. Henri Poincaré 4 (2002), p. 739-756.

[MartMes94] A. Martinez, B. Messirdi : Resonances for diatomic molecules in the Born-Oppenheimer Approximation Comm. Part. Diff. Eq. 19 (7/8), 1139-1162 (1994).

[MartRou88] A. Martinez, M. Rouleux : Effet tunnel entre puits dégénérés. Comm. in PDE, 13, p. 1157-1187 (1988).

[MartSord99] A. Martinez, V. Sordoni : Microlocal WKB expansions, J. Functional Analysis 168, p. 380-402 (1999).

[MartSord02] A. Martinez, V. Sordoni : A general reduction scheme for the time-dependent Born-Oppenheimer approximation. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 185-188

[Marz92] C. März : Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum . Asymptotic Analysis 5(3), p. 221-267 (1992).

[Mas84] V.P. Maslov : Global exponential asymptotics of the solutions of the tunnel equations and the large deviation problems (Russ.). *Tr. Mosk. Inst. Akad. Nauk* **163** (1984), p.150-180. (Engl. transl. in *Proc. Stecklov Inst. Math* **4** (1985).)

[MathShu02] V. Mathai, M. Shubin : Semiclassical asymptotics and gaps in the spectra of magnetic Schrödinger operators. Geom. Dedicata 91, 155-173 (2002).

[Mat95] H. Matsumoto : Semiclassical asymptotics of eigenvalues for Schrödinger operators with magnetic fields. Journal of Functional Analysis (1995).

[Mein90] E. Meinrenken : Differential geometrische Methoden in der Kurzwellen Asymptotik, Diplomarbeit, Universität Freiburg, November 1990.

[Mein92] E. Meinrenken : Semiclassical principal symbols and Gutzwiller's trace formula *Reports on Math. Phys.*(3), p. 279-295, (1992).

[MelSj74] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier integral operators with complex valued phase functions, Springer Lecture Notes in Math. 459, p. 120-223 (1974).

[MelSj01] A. Melin, J. Sjöstrand : Determinants of pseudo-differential operators and complex deformation of phase space. Preprint 2001.

[Mess94] B. Messirdi : Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la prédissociation moléculaire (cas des potentiels réguliers). Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. 61, No.3, 255-292 (1994).

[Mi] L. Miclo : Comportement de spectres d'opérateurs à basse température. Bull. Sci. Math. 119 (1995), p. 529-553.

[Mill96] L. Miller : Propagation d'ondes semi-classiques à travers une interface et mesures 2-microlocales. Thèse à l'Ecole Polytechnique (1996).

[Millw] . Miller : Physicien de Berkeley. A completer.

[Mo88] A. Mohamed : Quelques remarques sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique. Comm. in PDE 13 (1988), p. 1415-1430.

[Mo91] A. Mohamed : Estimations semi-classiques pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel de type coulombien et avec champ magnétique. Asymptotic analysis 4 (1991), p. 235-255.

[MoOuPa] A. Mohamed, Outassourt, Parisse. A completer.

[Mol01a] J. Schach Moller : The low-temperature limit of transfer operators in fixed dimension. Ann. Henri Poincaré 2 (2001), no. 6, 1099–1137.

[Mol01b] J. Schach Moller : Low-temperature localization for continuous spin-systems. Preprint (2001).

[Mont95] R. Montgomery : Hearing the zerolocus of a magnetic field. Comm. Math. Physics 168, p. 651-675 (1995).

[NaSp97] A. Naddaf, T. Spencer : On Homogenization and Scaling Limit of Some Gradient Perturbations of a Massless Free Field. Commun. Math. Phys. 183 (1), p. 55-84 (1997)

[Nak86] S. Nakamura : A remark on eigenvalue splittings for one-dimensional double-well Hamiltonians. Letters in Math. Phys. 11, p. 337-340 (1986).

[Nak95a] S. Nakamura : On an example of phase-space tunneling, Ann. Inst. H. Poincaré, Vol. 63, No 2 (1995).

[Nak95b] S. Nakamura : On Martinez' method of phase space tunneling, Rev. Math. Phys., Vol. 7, No 3, p. 431-441 (1995).

[NatNie98] F. Nataf et F. Nier, Convergence of domain decomposition methods via semi-classical calculus Comm. Partial Differential Equations 23 (5-6), p. 1007-1059 (1998).

[Ned96] L. Nedelec : Résonances semi-classiques pour l'opérateur de Schrödinger matriciel en dimension 2. Ann. Inst. H. Poincaré (Section Phys. Th.) 65(2), p. 129-162 (1996).

[Ned02] L. Nedelec : Resonances for matrix Schrödinger operators. Duke Math. Journal (to appear 2002).

[Ned03] L. Nedelec : Asymptotique du nombre de résonances de l'opérateur de Schrödinger avec potentiel linéaire et matriciel. To appear in Asymptotic Analysis 2003.

[Nen88] G. Nenciu : Bloch electrons in a magnetic field : rigorous justification of the Peirels-Onsager effective hamiltonian. A compléter (1988).

[NenSor02] G. Nenciu, V. Sordoni : En préparation 2002

[Nie96] F. Nier : A semi-classical picture of quantum scattering. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série 29, p. 149-183 (1996).

[Nos82] J.C. Nosmas : Approximations semi-classiques du spectre de systèmes différentiels asymptotiques. CRAS Paris, 295 (1982), p. 253-256.

[Nou01] J. Nourrigat : Pseudodifferential calculus and thermodynamic limits. mp_arc 01.219 (2001).

[RoyNou02] J. Nourrigat, C. Royer : Thermodynamic limits for hamiltonians defined as pseudo-differential operators. Preprint Janvier 2003.

[Oh90] Y.J. Oh : On positive multibump bound states of nonlinear Schrödinger equation under multiple well potential. Comm. Math. Phys. 131, p. 223-253 (1990).

[Oh98] Y.J. Oh : Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equation with potential on the class $(V)_a$. Comm. Part. Diff. Eq. 13, p. 1499-1519 (1998).

[Olv61] F. W. J. Olver : Error Bounds for the Lioville-Green (or WKB) Approximation", Proc. Camb. Phil. Soc. (57), p. 790-810 (1961).

[Ons52] L. Onsager : Interpretation of the de Haas-van Alphen effect. Phil. Mag. 43, p. 1006-1008 (1952).

[Out84] A. Outassourt : Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 299, 491-494 (1984).

[Out85] A. Outassourt : Perturbation d'un potentiel périodique en limite semi-classique. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 301, 65-68 (1985).

[Out86] A. Outassourt : Effet tunnel pour les opérateurs de Schrödinger et Dirac à potentiel périodique. Thèse de doctorat à Nantes (1986).

[Out87] A. Outassourt : Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique. J. Funct. Anal. 72 (1987), p. 65-93.

[Pank84] T.F. Pankratova: Quasimodes and splitting of eigenvalues (Russ.). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **276**:4 (1984), p. 795-798. (Engl. translation in *Sov. Math. Dok* **29** (1984).)

[PaUr91] T. Paul, A. Uribe : Sur la formule semi-classique des traces, *Note aux CRAS* 313, p. 217-222, (1991).

[PaUr93] T. Paul, A. Uribe : A construction of quasimodes using coherent states. Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique) p. 357-381 (1993).

[PaUr95] T. Paul, A. Uribe : The semi-classical trace formula and propagation of wave packets, *J. Funct. Analysis*132 (1), (1995), p. 192-249.

[PaUr96] T. Paul, A. Uribe : On the pointwise behaviour of semi-classical measures, *Comm. in Math. Physics* 175 (1996), p. 229-258.

[Par91] B. Parisse : Thèse de doctorat. Résonances pour l'équation de Dirac. Thèse à Orsay (1991).

[Par90a] B. Parisse : Résonances paires pour l'opérateur de Dirac. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 310, No.5, 265-268 (1990).

[Par90b] B. Parisse : Liens entre les résonances pour l'opérateur de Dirac et de Schrödinger. Journ. équations Dériv. Partielles, St. Jean-De-Monts 1990, No.12, 7 p. (1990).

[Par95] B. Parisse : Effet d'Aharonov-Bohm sur un état borné de l'opérateur de Dirac. Asymptotic Anal. 10, No.3, 199-224 (1995)

[Pei33] R. Peierls : Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselectronen. Z. für Physik 80, p. 763-791 (1933).

[Per01] G. Perelman : On the formation of singularities of the critical nonlinear Schrödinger equation. Ann. Henri Poincaré 2 (4), p. 605-673 (2001).

[Pett97] P. Pettersson : WKB expansions for systems of Schrödinger operators with crossing eigenvalues. Asymptotic Anal. 14 (1), p. 1-48 (1997).

[PetPop96] V. Petkov, G. Popov : Une formule de trace semi-classique et asymptotique de valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 323, No.2, 163-168 (1996).

[PetPov98] V. Petkov, G. Popov : Semiclassical trace formula and clustering of eigenvalues for Schrödinger operators. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. 68, No.1, 17-83 (1998).

[PetRob85] V. Petkov, D. Robert : Asymptotique semi-classique du spectre d'hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques, *Comm. in P.D.E.* 10 (4), p.365-390, (1985).

[PetZw00] V. Petkov, M. Zworski : Breit-Wigner approximation and the distribution of resonances. Comm. Math. Phys. 204, p. 329-351 (1999). Erratum: Comm. Math. Phys. 214, p. 733-735 (2000).

[PetZw02] V. Petkov, M. Zworski : Semi-classical estimates on the scattering determinant. Ann. Henri Poincaré 2 (2001), no. 4, 675–711.

[Pha84] F. Pham : Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique. IRMA, RCP 25, Vol. 32 (1984).

[PrSj96] C. Presilla, J. Sjöstrand : Transport properties in resonant tunneling heterostructures. J. Math. Physics 37 (1), p. 4816-4844 (1996).

[PrSj97] C. Presilla, J. Sjöstrand : Non linear resonant tuneling in systems coupled to quantum reservoirs. Phys. Rev. B 55 (15), p. 9310-9313 (1997).

[Ral76] J. Ralston : On the construction of quasimodes associated with stable periodic orbits. Comm. Math. Phys. 51 (1976), p. 219-242.

[Ral92] J. Ralston : Magnetic breakdown. Méthodes semi-classiques, Vol. 2, Astérisque 210, p. 263-282 (1992).

[Ram93] T. Ramond : Intervalles d'instabilité pour une équation de Hill à potentiel méromorphe. Bull. Soc. Math. Fr. 121, No.3, 403-444 (1993).

[Ram96] T. Ramond : Semiclassical study of quantum scattering on the line. Commun. Math. Phys. 177, No.1, 221-254 (1996).

[Rob78] D. Robert : Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels *Comm. in P.D.E.* 3(9), p.755-826, (1978).

[Rob82] D. Robert : Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et application. *J. of Functional Analysis*, Vol. 45, $n^0 1$ (Jan. 82), p.74-84.

[Rob94] D. Robert : Relative time delay for perturbation of elliptic operators and semi-classical asymptotics. J. of Funct. Analysis, Vol. 126, No 1 (1994), p. 36-82.

[RobSor96] D. Robert, V. Sordoni : Trace formulas and Dirichlet-Neumann problems with variable boundariey : The scalar case. Helvetica Physica Acta, Vol. 69 (1996), p. 158-176.

[RobSor97] D. Robert, V. Sordoni : Generalized determinants for Sturm-Liouville problems on the real line. Greiner, Peter C. (ed.) et al., Partial differential equations and their applications. Lectures given at the 1995 annual seminar of the Canadian Mathematical Society, Toronto, Canada, June 12–23, 1995. Providence, RI: American Mathematical Society. CRM Proc. Lect. Notes. 12, 251-259 (1997).

[RobTam87] D. Robert, H. Tamura : Semi-classical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross sections. Ann. Inst. H. Poincaré, Vol. 46, No 4 (1987), p. 415-442.

[RobTam88] D. Robert, H. Tamura : Semi-classical asymptotics for local spectral densities and time delay problems in scattering process. J. of Funct. Anal., Vol. 80 (1) (1988), p. 124-147.

[Rou96] M. Rouleux : Résonances de Feshbach en limite semi-classique. Sémin. Equ. Dériv. Partielles, Ec. Polytech., Cent. Math., Palaiseau Sémin. 1995-1996, Exp. No.19, 11 p. (1996).

[Rou98] M. Rouleux : Resonances for a semi-classical Schrödinger operator near a non trapping energy level. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 34, No.6, 487-523 (1998).

[Rou99] M. Rouleux : Tunneling effects for h-pseudodifferential operators, Feshbach resonances, and the Born-Oppenheimer approximation. Demuth, Michael (ed.) et al., Evolution equations, Feshbach resonances, singular Hodge theory. Berlin: Wiley-VCH. Math. Top. 16, 131-242 (1999).

[Rou01] M. Rouleux : Absence of resonances for semiclassical Schrödinger operators with Gevrey coefficients. Hokkaido Math. J. 30, No.3, 475-517 (2001).

[Roy99] C. Royer : Etude de la trace pour un modèle de Heisenberg généralisé. Prépublication 99-09 Université de Reims (1999).

[Roz72] G.V. Rozenbljum : Distribution of the discrete spectrum of singular differential operators. *Dokl. Akad.Nauk SSSR* 202, p.1012-1015, (1972), (for details see *Sov.Math.* 20, p.63-71, (1976)).

[Roz74] G.V. Rozenbljum : Asymptotics of the eigenvalues of the Schrödinger operator, *Math.USSR Sb.* 22, p.349-371, (1974).

[Roz76] G.V. Rozenbljum : The distribution of the discrete spectrum for singular differential operators, *Isvestya Math.* 164, $n^0 1$, (1976).

[Roz77] G.V. Rozenbljum : An asymptotic of the negative discrete spectrum of the Schrödinger operator, *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 21, p.222-227, (1977).

[Schni74] A. Schnirelman : Ergodic properties of eigenfunctions. *Usp. Math. Nauk* 29, p.181-182 (1974).

[Sc84] R. Schrader, M. Taylor : Small h asymptotics for quantum partition functions associated to particles in external Yang-Mills potentials, *Comm. in Math. Physics* 92, p.555-594 (1984).

[Sc89] R. Schrader, M. Taylor : Semiclassical asymptotics, gauge fields and quantum chaos, *Journal of Functional Analysis* 83, p.258-316 (1989).

[Schw61] J. Schwinger : On the bound states of a given potential. *Proc. Nat. Acad . Sci.* 47, p.122-129 (1961).

[Sco52] J.M.C. Scott : The binding energy of the Thomas-Fermi atom *Phil. Mag.* 43, p 859-867 (1952).

[See] R. Seeley : Complex powers of an elliptic operator and singular integrals. Proc. Symposia Pure Math. 10. AMS (1967), p. 288-307.

[Sh] M. Shubin : Semi-classical asymptotics on covering manifolds and Morse inequalities. Geom. Anal. and Funct. Anal. 6, N0 2 (1996), p. 370-409.

[ShTu73] M. Shubin, V. Tulovskii : On the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudo-differential operators in $\mathbb{R}^n$, *Math. USSR Sbornik* 21, p.565-573, (1973).

[SieWe86] H. Siedentop, R. Weikard : On some basic properties of density functionals for angular momentum channels, *Rep. Math. Phys.*, 28, p.193-218, (1986).

[SieWe87] H. Siedentop, R. Weikard : On the leading energy correction for the statistical model of the atom : interacting case, *Comm. in Math. Phys.* 112, p. 471-490, (1987).

[SieWe89a] H. Siedentop, R. Weikard : On the leading correction of the Thomas-Fermi model : lower bound, *Invent. Math.* 97, p. 159-193, (1989).

[SieWe89b] H. Siedentop, R. Weikard : On the leading correction for the Thomas-Fermi model : lower bound- with an appendix by A.M.K.Müller, *Invent.Math.* 97, p. 159-193, (1989).

[SieWe91] H. Siedentop, R. Weikard : A new phase space localization technique with application to the sum of negative eigenvalues of Schrödinger operators, *Annales de l'ENS* 24(2), p. 215-225, (1991).

[Sig93] I. Sigal : Lectures on large Coulomb systems, Proceedings on Mathematical Quantum Theory II : Schrödinger Operators, (August 1993), edited by J.Feldman, R.Froese, and L.M.Rosen. CRM Proceedings and Lecture Notes, p. 73-107.

[Sim76a] B. Simon : On the number of bound states of two body Schrödinger operator, A review, Vol. in Honor of V.Bargmann; *Studies in Math. Physics*; Princeton University Press (1976).

[Sim76b] B. Simon : The bound state of a weakly coupled Schrödinger in one or two dimensions, *Ann. of Physics* 97, p.279-288, (1976).

[Sim80] B. Simon : The classical limit of quantum partition functions. Comm. Math. Phys. 71 (1980), no. 3, 247–276.

[Sim83a] B. Simon : Instantons, double wells and large deviations, *Bull. AMS* 8, p.323-326, (1983).

[Sim83b] B. Simon : Semi-classical analysis of low lying eigenvalues, I.. Non-degenerate minima: Asymptotic expnasions. Ann. Inst. Poincaré (Phys. Théor.) 38, p. 296-307 (1983). Errata: Ann. Inst. Poincaré (Phys. Théor.) 40 (1984), no. 2, 224.

[Sim84a] B. Simon : Semi-classical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling. Ann. Math., 120, p. 89-118 (1984).

[Sim84b] B. Simon : Semi-classical analysis of low lying eigenvalues, III. Width of the ground state band in strongly coupled solids. Ann. Phys., 158, p. 415-420 (1984).

[Sim85a] B. Simon : The theory of Schrödinger operators : what's it all about, in the journal : engineering and science/ May 1985.

[Sim85b] B. Simon : Semi-classical analysis of low lying eigenvalues, IV. The flea of the elephant. Journal of Functional Analysis 63 (1), p. 123-136 (1985).

[Sim92] B. Simon : The Scott correction and the quasiclassical limit, *Astérisque* 210, méthodes semi-classiques, Volume 2, Colloque International (Nantes, Juin 1991), (1992).

[Sj87] J. Sjöstrand : Semiclassical resonances generated by a non-degenerate critical point. Springer Lect. Notes in Math. 1256, p. 402-429 (1987).

[Sj91] J. Sjöstrand: Schrödinger in high dimensions. asymptotic constructions and estimates. Proceeding of the french-japanese symposium on algebraic analysis and singular perturbations, CIRM, Luminy, France, (October 1991).

[Sj92a] J. Sjöstrand : Semi-excited states in non degenerate potential wells, Asympt. Anal., 6, p. 29-43 (1992).

[Sj92b] J. Sjöstrand: Exponential convergence of the first eigenvalue divided by the dimension for certain sequences of Schrödinger operator. *Astérisque* **210** (1992), p.303-326.

[Sj92c] J. Sjöstrand: On ferromagnetic Laplace integrals and maximum principles. *Ann. Inst. Fourier* **44**(2) (1992), p.601-628.

[Sj93a] J. Sjöstrand : Projecteurs adiabatiques du point de vue pseudo-différentiel. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 317, No.2, 217-220 (1993).

[Sj93b] J. Sjöstrand : Potential wells in high dimensions I. *Ann. Inst. Poincaré*, Section Physique théorique **58** (1), (1993), p.1-41.

[Sj93c] J. Sjöstrand : Potential wells in high dimensions II, more about the one well case. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section Physique théorique **58** (1), (1993), p.42-53.

[Sj93d] J. Sjöstrand : Estimations sur les corrélations et principes du maximum. *Séminaire Equations aux dérivées partielles de l'Ecole Polytechnique*, October 1993.

[Sj94] J. Sjöstrand: Evolution equations in a large number of variables. Mathematische Nachrichten 166, p. 17-53 (1994).

[Sj96] J. Sjöstrand : Correlation asymptotics and Witten Laplacians. St. Petersburg Math. J. (1996), No 1, p. 160-185.

[Sj97] J. Sjöstrand : A trace formula for resonances and application to semi-classical Schrödinger operators. Séminaire EDP Ecole Polytechnique. 96-97

[Sj00] J. Sjöstrand : Complete asymptotics for correlations of Laplace integrals in the semi-classical limit. Mém. Soc. Math. France 83 (2000).

[Sj01a] J. Sjöstrand : Quantum resonances and trapped trajectories. Graffi, Sandro (ed.) et al., Long time behaviour of classical and quantum systems. Proceedings of the Bologna APTEX international conference, Bologna, Italy, September 13-17, 1999. Singapore: World Scientific. Ser. Concr. Appl. Math. 1, 33-61 (2001).

[Sj01b] J. Sjöstrand : Resonances for bottles and trace formulae. Math. Nachr. 221, 95-149 (2001).

[Sj02] J. Sjöstrand : Resonances associated to a closed hyperbolic trajectory in dimension 2. Preprint de l'Ecole polytechnique 2002.

[SjWa99a] J. Sjöstrand, Wei Min Wang : Exponential decay of averaged Green functions for random Schrödinger operators. A direct approach. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., IV. Sér. 32, No.3, 415-431 (1999).

[SjWa99b] J. Sjöstrand, Wei Min Wang : Supersymmetric measures and maximum principles in the complex domain. Exponential decay of Green's functions. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., IV. Sér. 32, No.3, 347-414 (1999).

[SjZw91] J. Sjöstrand, M. Zworski : Complex scaling and the distribution of scattering poles, J. Amer. Math. Soc., 4, p. 729-769 (1991).

[SjZw92] J. Sjöstrand, M. Zworski : Distribution of scattering poles near the real axis. Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 5-6, 1021–1035.

[SjZw93a] J. Sjöstrand, M. Zworski : Estimates on the number of scattering poles near the real axis for strictly convex obstacles. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), no. 3, 769–790.

[SjZw93b] J. Sjöstrand, M. Zworski : Lower bounds on the number of scattering poles. Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), no. 5-6, 847–857.

[SjZw94] J. Sjöstrand, M. Zworski : Lower bounds on the number of scattering poles. II. J. Funct. Anal. 123 (1994), no. 2, 336–367.

[SjZw95] J. Sjöstrand, M. Zworski : The complex scaling method for scattering by strictly convex obstacles. Ark. Mat. 33 (1995), no. 1, 135–172.

[SjZw96] J. Sjöstrand, M. Zworski : Density of resonances for strictly convex analytic obstacles. With an appendix by M. Zworski. Canad. J. Math. 48 (1996), no. 2, 397–447.

[SjZw99] J. Sjöstrand, M. Zworski : Asymptotic distribution of resonances for convex obstacles. Acta Math. 183 (1999), no. 2, 191–253.

[Sob94] A.V. Sobolev : The quasi-classical asymptotics of local Riesz means for the Schrödinger operator in a strong homogeneous magnetic field. *Duke Math. J.* 74(2), p. 319-429, (1994).

[Sob95] A.V. Sobolev : Magnetic Lieb-Thirring inequalities, Workshop in Minneapolis or Preprint (1995).

[Sok81] J.B. Sokoloff : Phys. Rev.B 23, p. 2039-2041 (1981).

[Sok85] J.B. Sokoloff : Unusual band structure, wave functions and electrical conductance in crystals with incommensurate periodic potentials, Physics reports (review section of Physics letters), 126, $n^0 4$, p. 189-244 (1985).

[SolSpi02a] J.P. Solovej, W. Spitzer : New coherent states and a new proof of the Scott correction, To appear in Proceedings of the 2002 international conference on partial differential equations and mathematical physics held at the University of Alabama Birmingham. AMS Contemporary Mathematics series.

[SolSpi02b] J.P. Solovej, W. Spitzer : A new coherent states approach to semiclassics which gives Scott's correction. Preprint 2002

[SonWi51] E.H. Sondheimer, A.H. Wilson : The diamagnetism of free electrons. Proc. Roy. Soc. A- 210, p. 173 (1951).

[Sor95] V. Sordoni : Born-Oppenheimer expansion for excited states of diatomic molecules. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 320, No.9, 1091-1096 (1995).

[Sor96a] V. Sordoni : Schrödinger operators in high dimensions: convex potentials. Asymptotic Anal. 13, No.2, 109-129 (1996).

[Sor96b] V.Sordoni : Anharmonic oscillators in high dimension, Asymptotic Anal. 13, No.2, 131-166 (1996).

[Sor97] V. Sordoni : Instantons et splitting. J. Math. Phys. 38, No.2, 770-795 (1997).

[Sor01] V. Sordoni : Born-Oppenheimer approximation for the Brown Rawenhall equation. Rev. Math. Phys 13 (8), p. 921-951 (2001).

[SpTe01] H. Spohn, S. Teufel : Adiabatic decoupling and time dependent Born-Oppenheimer theory. Comm. Math. Phys. 224, P. 113-132 (2001).

[SpTe02] H. Spohn, S. Teufel : Semiclassical motion of dressed electrons. Rev. Math. Phys. 14 (2002), no. 1, 1–28.

[TanZw98] S.H. Tang, M. Zworski : From quasimodes to resonances. Math. Res. Lett. 5 (1998), p. 261-272.

[TayUr92] M. Taylor, A. Uribe : Semi-classical spectra of gauge fields, Journal of Functional Analysis, Vol. 110, No 1, p. 1-46 (1992).

[Tot98] J.A Toth : Eigenfunction decay estimates in the quantum integrable case. Duke Math. J. 93, No.2, 231-255 (1998). Erratum: Duke Math. J. 96 (1999), no. 2, 469.

[TotZel02] J.A. Toth, S. Zelditch : Riemannian manifolds with uniformly bounded eigenfunctions. Duke Math. J. 111 (2002), no. 1, 97–132.

[Ue94] N. Ueki : Lower bounds for the spectra of Schrödinger operators with magnetic fields. J. of Funct. Analysis 120, p. 344-379 (1994).

[UrZe93] A. Uribe, S. Zelditch : Spectral statistics on Zoll surfaces, Comm. Math. Phys. 154, p. 313-346 (1993).

[Va77] B.R. Vainberg : Quasi-classical approximation in stationary scattering problems, Funct. Anal. Appl. 11 (1977), p. 6-18 (en russe).

[Vor77] A. Voros : Développements semi-classiques, Thèse d'état (1977).

[Vor78] A. Voros : An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics. J. Funct. Anal. 29, 104-132 (1978).

[Vor79a] A. Voros : Symbol calculus by symbolic computation and semi-classical expansions. Symbolic and algebraic computation, EUROSAM '79, int. Symp., Marseille 1979, Lect. Notes Comput. Sci. 72, 45-51 (1979).

[Vor79b] A. Voros : Semi-classical ergodicity of quantum eigenstates in the Wigner representation. Stochastic behavior in classical and quantum Hamiltonian systems, Volta mem. Conf., Como 1977, Lect. Notes Phys. 93, 326-333 (1979).

[Vor80] A. Voros : Oscillateur quartique et méthodes semi-classiques. Semin. Goulaouic-Schwartz, Equations Dériv. Partielles 1979-1980, Exposé No.6, 6 p. (1980).

[Vu98] San Vu Ngoc : Conditions de Bohr-Sommerfeld pour les singularités focus-focus et monodromie quantique. Jourées "équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1998), Exp. No. XIV, 13 pp., Univ. Nantes, Nantes, 1998.

[Vu99] San Vu Ngoc : Quantum monodromy in integrable systems. Comm. Math. Phys. 203 (1999), no. 2, 465–479.

[Vu00a] San Vu Ngoc : Formes normales semi-classiques des systèmes complétement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment. Asymptot. Anal. 24 (2000), no. 3-4, 319–342.

[Vu00b] San Vu Ngoc : Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), no. 2, 143–217.

[Vu01a] San Vu Ngoc : Quantum monodromy and Bohr-Sommerfeld rules. Topological and geometrical methods (Dijon, 2000). Lett. Math. Phys. 55 (2001), no. 3, 205–217.

[Vu01b] San Vu Ngoc : Invariants symplectiques et semi-classiques des systèmes int'egrables avec singularités. Séminaire: équations aux Dérivées Partielles, 2000–2001, Exp. No. XII, 16 pp., Ecole Polytech., Palaiseau, 2001.

[Wa85] X.P. Wang : Puits multiples pour l'opérateur de Dirac. Ann. IHP (Sect. Phys. Th.) 43, p. 260-319 (1985).

[Wa87] X.P. Wang : Time-decay of scattering solutions and classical trajectories, Ann. Inst. H. Poincaré, Section Phys. Théorique 47 (1987), p. 25-37.

[Wa91] X.P. Wang : Semi-classical resolvent estimates for N-body Schrödinger operators. J. of Funct. Anal. 97 (1991), p. 466-483.

[Weid96] T. Weidl : On the Lieb-Thirring constants $L_{\gamma,1}$ for $\gamma \geq \frac{1}{2}$, Comm. Math. Phys. 178, p. 135-146 (1996).

[Wein77] A. Weinstein : Asymptotics of the eigenvalues clusters for the Laplacian plus a potential, *Duke Math. J.* 44, p. 883-892, (1977).

[Wey11] Hermann Weyl : Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, (1911) p. 110-117.

[Wey12] H. Weyl : Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit Anwendungen auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), Math. Ann. 71, p. 441-479 (1912).

[Wil84a] M. Wilkinson : Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems, Proc. R. Soc. London A391, p.305-350, (1984).

[Wil84b] M. Wilkinson : An example of phase holonomy in WKB theory, J. Phys. A. Math.Gen.17 (1984), p.3459-3476.

[Wil87] M. Wilkinson : An exact renormalisation group for Bloch electrons in a magnetic field, Journal of Phys.A, 20, $n^0 7$, p.1791-., (1987).

[Wit82] E. Witten : Supersymmetry and Morse Theory. J. diff. Geom. 17 (1982), p. 661.

[Yaj79] K. Yajima : The quasi-classical limit of quantum scattering theory, Comm. Math. Phys. 69 (1979), p. 101-129.

[Yaj81] K. Yajima : The quasi-classical limit of quantum scattering theory II, Long range scattering. Duke Math. J. 48 (1981), p. 1-22.

[Zel87] S. Zelditch : Uniform distribution of eigenfunctions on a compact hyperbolic surface, *Duke Math. J.* 55, p.919-946, (1987).

[Zel92] S. Zelditch : On a quantum chaos theorem of R. Schrader and M. Taylor, *Journal of Functional Analysis* 109, p. 1-21, (1992).

[Zel94] S. Zelditch : On the rate of quantum ergodicity II: lower bounds. Comm. PDE (9&10), p. 1565-1579 (1994).

[Zel96] S. Zelditch : Quantum ergodicity of C^* dynamical systems, Comm. Math. Phys. 177 (2), p. 507-528 (1996).

[Zel97] S. Zelditch : Level spacings for some completely integrable systems. XIIth International Congress of Mathematical Physics (ICMP '97) (Brisbane), 279–289, Internat. Press, Cambridge, MA, 1999.

[Zel02] S. Zelditch : Asymptotics of polynomials and eigenfunctions. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 733–742, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[ZelZw96] S. Zelditch, M. Zworski : Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards, *Comm. Math. Phys.* 175 p. 673-682 (1996).

[Zie99] L. Zielinski : Sharp spectral asymptotics and Weyl formula for elliptic operators with non-smooth coefficients. Math. Phys. Anal. Geom. 2 (1999), no. 3, 291–321.

[Zie02a] L. Zielinski : Asymptotic distribution of eigenvalues for a class of second-order elliptic operators with irregular coefficients in $\mathbb{R}^d$. Math. Phys. Anal. Geom. 5 (2002), no. 2, 145–182.

[Zie02b] L. Zielinski : Sharp spectral asymptotics and Weyl formula for elliptic operators with non-smooth coefficients. II. Colloq. Math. 92 (2002), no. 1, 1–18.

[ZJ82] J. Zinn-Justin : The principles of instanton calculus: a few applications. Les Houches, Session XXXIX (1982), Recent advances in field theory and statistical mechanics, *Elsevier Science Publishers*.

[Zom84] D. Zoma : Spectre conjoint pour les opérateurs pseudo-différentiels qui commutent, Thèse de troisième cycle, Université de Nantes, (1984).

[Zw99] M. Zworski : Resonances in physics in geometry. Notices Amer. Math. Soc. 46, p. 319-328 (1999)