

ENSEMBLE DISPARATE DE TRAVAUX ET
CONNAISSANCES RELATIFS À LA THÈSE DE DOCTORAT
« *Equations aux dérivées partielles en dynamique de
population et en neurosciences* »
encadrée par Danielle Hilhorst* et Delphine Salort†

Pierre Jules Abel Roux

*Directrice de Recherche au CNRS, au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay (UMR 8628)

†Professeure d'université au Laboratoire de Biologie Computationnelle et Quantitative de l'UPMC (CNRS UMR 7238)

SOMMAIRE

I	Modélisation des réseaux de neurones	5
I.	Physiologie des neurones	5
	1. Physiologie du neurone	6
	2. Les potentiels d'action	8
	3. Les réseaux neuronaux	10
II.	Modèles aux dérivées partielles en neurosciences	12
	1. Intègre et Tire avec Bruit et Fuite	12
	a. Origine de l'équation	12
	b. Présentation et notion de solution	14
	c. Existence de solutions fortes	16
	d. Propriétés qualitatives des solutions faibles	20
	e. Solutions fortes stationnaires	21
	f. Convergence pour le problème linéaire	22
	g. Estimées L^2 uniformes	22
	h. Convergence des solutions pour les faibles connectivités	23
	i. Sur-solutions et estimées dans L^∞	24
	2. Réseaux excitateur et inhibiteur couplés	25
	a. Description du modèle et notion de solution	25
	3. Modèle NNLIF avec délai de transmission	26
	a. Description du modèle	26
III.	Résultats techniques pour le modèle ITBFR	27
	1. égalité d'entropie	27
	2. Inégalités de type Poincaré	30
	3. Propriétés d'une fonction auxiliaire	31
	Références	37

Première partie

Modélisation des réseaux de neurones

"La fixité du milieu intérieur est la condition de la vie libre et indépendante... le mécanisme qui le permet est celui qui assure dans le milieu intérieur, le maintien de toutes les conditions nécessaires à la vie des éléments. Dans la vie constante, l'être vivant paraît libre et les manifestations vitales semblent produites et dirigées par un principe vital intérieur affranchi des conditions physiques ou chimiques extérieures. Cette apparence est une illusion. Tout au contraire, c'est particulièrement dans le mécanisme de la vie constante ou libre que ces relations étroites se montrent dans leur pleine évidence."

Claude Bernard *Leçons sur les phénomènes de la vie communs aux animaux et aux végétaux* (1878-1879)

I. PHYSIOLOGIE DES NEURONES

Le phénomène de prédiction a une importance capitale dans la capacité de survie de la plupart des animaux, en particulier des mammifères, et de nombreuses études ont montré (voir introduction et bibliographie de [?]) que le phénomène de prédiction par les réseaux neuronaux des stimuli extérieurs était un des piliers du fonctionnement du cerveau : des unités spécialisées dans la prédiction de certains événements pourraient être à l'origine de phénomènes de cognition très complexes. Il y a eu beaucoup de progrès depuis le modèle simpliste dit du *pandémonium*, inventé en 1958 par O. G. Selfridge (voir [98]), et on a abouti à des manières très sophistiquées de modéliser les interactions entre unités de reconnaissance spécialisées, même pour des processus aussi profonds et complexes que la conscience (voir par exemple les travaux de S. Dehaene et L. Naccache et leur modèle dit *d'espace de travail global*, voir [39]).

Cependant, il reste également énormément de travail à faire dans la compréhension de l'apprentissage au plus bas niveau, pour un réseau de neurones spécialisé dans la reconnaissance ou la prédiction d'un phénomène particulier. Différents modèles ont été inventés pour représenter l'évolution de réseaux de neurones lors de l'apprentissage (règle de Hebb, règle de la covariance, modèle d'Oja,...). Les rapports entre activité du réseau et évolution des connexions synaptiques ont également beaucoup été étudiés. Les synapses entre les cellules de Purkinje et les fibres parallèles (axones des cellules granulaires) dans le cortex cérébelleux font par exemple l'objet d'intenses recherches (voir notamment l'article récent [49]).

Dans le cerveau, les neurones, pourtant au nombre d'environ cent milliards, sont dix fois moins nombreux que les cellules gliales. Cependant, dans l'état actuel des connaissances, les cellules les plus importantes dans l'encodage et la transmission de l'information sont les neurones,

aussi nous intéresserons-nous uniquement à des modèles de réseaux neuronaux. Nous commençons par rappeler l'organisation globale de ces cellules, leur fonctionnement et les grandes lignes des principes qui régissent l'évolution de leurs connexions avant de commencer la modélisation mathématique.

1. Physiologie du neurone

Les neurones ont une structure particulière, fortement liée à leur fonction. Cela paraît évident aujourd'hui, mais il a fallu attendre les colorations de l'histologiste Camillo Golgi¹ avant d'avoir une idée de la structure des neurones.

Le neurone se divise en une partie centrale et des prolongements, les *neurites*. Plus précisément, on distingue :

- Le *corps cellulaire*², relativement sphérique et d'une taille souvent aux alentours de 20 μm , contient le *noyau* de la cellule et les divers organites que l'on trouve dans la plupart des cellules humaines (mitochondries, appareil de Golgi, réticulum endoplasmique, etc). Ces organites baignent dans un liquide aqueux chargé en potassium : le *cytosol*. Le noyau mesure 5 à 10 μm de diamètre. Notons que l'appareil de Golgi des neurones est chargé de la répartition des protéines dans les différentes parties de la cellule en plus de son rôle habituel³.
- L'*axone* est un neurite qui prend naissance sur le corps cellulaire, sa base étant appelée *cône axonique*. L'axone peut mesurer de moins d'un millimètre à plus d'un mètre de longueur et son diamètre varie entre 1 et 25 μm ⁴. La composition protéique de l'axone est très différente de celle du corps cellulaire. En outre, l'axone contient très peu, voire pas, de ribosomes libres, ce qui signifie que toutes les protéines utiles dans l'axone doivent être produites dans le corps cellulaire et transportées (par un phénomène complexe appelé *transport axoplasmique*).

Les axones se divisent en branches multiples, qui partent fréquemment de façon orthogonale, appelées les *collatérales axoniques*. À leurs bouts, les axones se ramifient en des *terminaisons axoniques*, aussi appelées *boutons terminaux*, qui font avec d'autres neurones des points de contact appelés *synapses*.

- Les *dendrites*⁵ sont des neurites qui prennent naissance sur le corps cellulaire et se ramifient considérablement. L'ensemble des dendrites est appelé *arborisation dendritique*.

La plupart des neurones ont des dendrites recouverts de formes rappelant des épines, les *épines dendritiques*, sur lesquelles les axones des autres neurones font beaucoup de synapses. Ces épines jouent un rôle très important, comme le prouvent les pathologies des individus qui ne les synthétisent pas correctement. La présence de ribosomes dans les dendrites juste sous les épines dendritiques indique un rôle particulier des synapses qui y font

1. Camillo Golgi (1843-1926), italien, fut co-lauréat du prix Nobel de physiologie en 1906, avec Santiago Ramón y Cajal, pour ses travaux sur la structure du système nerveux. Ses techniques de coloration montrèrent que les premières colorations des neurones, celles de Franz Nissl par exemple, donnaient à voir une structure incomplète, privée en particulier de l'arbre dendritique. Malheureusement, Golgi fit à partir de ses résultats l'interprétation erronée d'une continuité entre les neurones, ce qui ferait du cerveau un système comparable au système sanguin, alors qu'il n'en est rien, les neurones étant contigus seulement.

2. également appelé *soma* ou *périkaryon* (littéralement "autour du noyau").

3. L'appareil de Golgi est un intermédiaire entre le réticulum endoplasmique et la membrane extérieure, il modifie (par glycolyse, ajout d'acides gras, etc) et transporte des protéines (vers l'extérieur de la cellule, vers la membrane, vers le réticulum endoplasmique, etc).

4. Et jusqu'à 1 mm de diamètre chez certains calamars !

5. du grec *dendron* qui signifie "arbre".

contact.

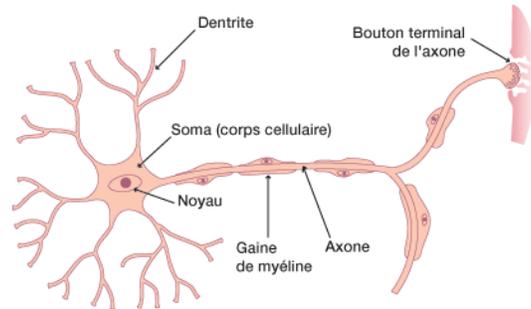


FIGURE 1 – Structure du neurone

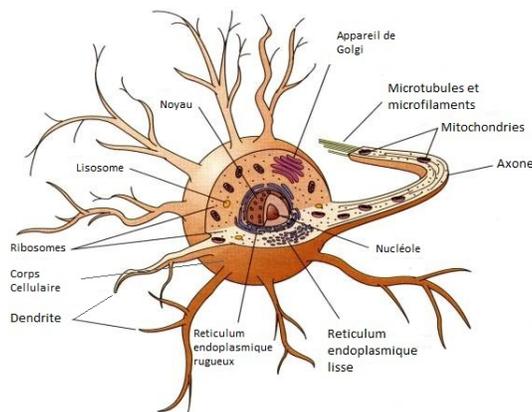


FIGURE 2 – Corps cellulaire

Il y a de nombreux "types" de neurones, qui peuvent être classés selon divers critères, comme par exemple le nombre de neurites qui prennent naissance au niveau du corps cellulaire : neurones unipolaires à un neurite, neurones bipolaires à deux neurites et neurones multipolaires à plus de deux neurites (la plupart des neurones). Mais parmi les neurones multipolaires, on trouve encore une grande variété de structures.

D'autres critères sont possibles : la forme de l'arborescence dendritique, la présence ou non d'épines dendritiques (*neurones épineux* ou *neurones non épineux*), la longueur de l'axone, la nature et le nombre des connexions... Le type de neurone que l'on rencontre peut dépendre fortement de l'endroit du cerveau que l'on observe, et donc du rôle que ces neurones sont amenés à jouer, comme nous le verrons plus loin.

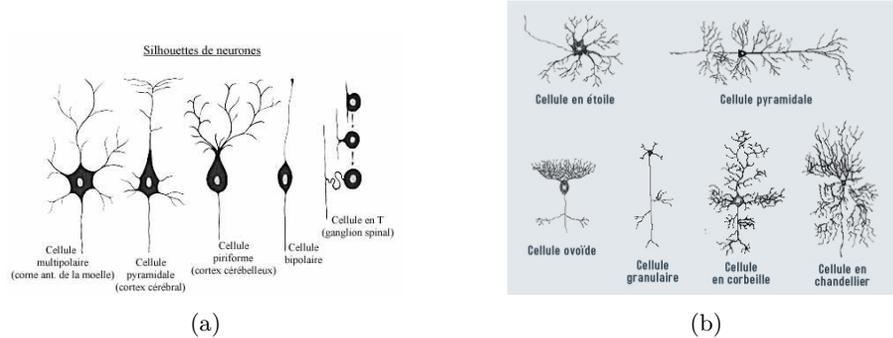


FIGURE 3 – Types de neurones

2. Les potentiels d'action

Si les axones des neurones rappellent des fils électriques, il n'ont pas le même fonctionnement. En effet, le cuivre des fils est isolé par l'air ou la gaine qui les entoure et transmet des électrons à la moitié de la vitesse de la lumière. Une telle prouesse est impossible pour des axones dont la conduction électrique se base sur les ions, lourds et patauds, et qui sont de surcroit entourés d'un liquide électriquement chargé. Les neurones utilisent pour transmettre l'information une méthode beaucoup plus élaborée qu'un transfert passif d'électrons : le potentiel d'action.

Deux des éléments fondamentaux du fonctionnement neuronal sont les ions et les canaux ioniques. Des ions sont naturellement présents de part et d'autre de la membrane, ils déterminent une différence de potentiel entre les milieux extracellulaire et intracellulaire : le *potentiel membranaire*. Les canaux ioniques sont des assemblages de protéines qui forment une ouverture dans la membrane capable de laisser passer les ions en réaction à certains stimuli. Chaque canal ionique est spécifique à certains ions. Les principaux ions en cause dans le fonctionnement du cerveau - les ions sodium (Na^+), potassium (K^+), calcium (Ca^{2+}) et chlore (Cl^-) - ont donc leurs canaux correspondants sur la membrane des neurones : canaux sodiques, potassiques, calciques, chloriques.

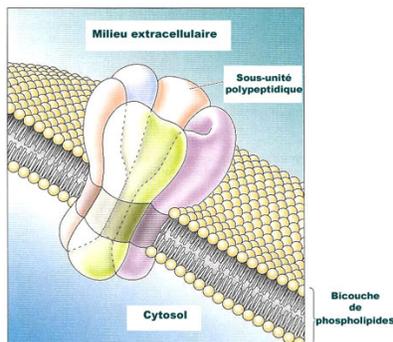


FIGURE 4 – Canal ionique

Lorsque les canaux ioniques sont ouverts, les ions traversent la membrane par diffusion sui-

vant le gradient de concentration et par l'effet du potentiel électrique. La diffusion des ions à travers les canaux par gradient de concentration entraîne une différence de potentiel qui la freine ensuite par une force électromotrice, et ce jusqu'à atteindre un état d'équilibre. Au repos, il y a donc une différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur de la membrane du neurone : le potentiel à l'intérieur est négatif par rapport à l'extérieur, une différence de 65 mV, soit un potentiel membranaire $V_m = -65mV$.

L'existence du gradient de concentration à travers la membrane est assurée par des pompes ioniques, situées elles aussi sur la membrane, qui utilisent de l'énergie, sous forme d'ATP, pour faire passer des ions à travers la membrane contre le gradient de concentration. Les pompes sodium-potassium et calcium sont particulièrement importantes dans le fonctionnement des neurones ; on estime que 70% de l'ATP utilisée dans le cerveau sert à faire fonctionner la pompe sodium-potassium.

Nous pouvons enfin décrire le mécanisme qu'utilisent les neurones pour communiquer : le potentiel d'action. C'est un évènement bref, de l'ordre de la milliseconde, qui se décompose en plusieurs phases :

- *phase de seuil* : un évènement extérieur provoque l'ouverture des canaux sodiques et le gradient de concentration élevé, maintenu par les pompes, cause une entrée d'ions Na^+ dans le neurone, ce qui change le potentiel membranaire ; la membrane se retrouve dépolarisée ; le niveau critique de dépolarisation qui cause le potentiel d'action s'appelle le *seuil* ;
- *Dépolarisation* : une fois le seuil atteint, une force électromotrice provoque une entrée massive d'ions Na^+ ; le potentiel membranaire augmente brutalement ;
- *Repolarisation* : les canaux sodiques se referment et les canaux potassiques s'ouvrent ; les ions K^+ sortent massivement du neurone et le potentiel chute très vite, plus bas encore qu'au repos ; la cellule est hyperpolarisée (le potentiel de la membrane redevient négatif) ;
- *post-hyperpolarisation* : les concentrations d'ions reviennent à l'équilibre et le potentiel revient "lentement" vers le potentiel de repos ;

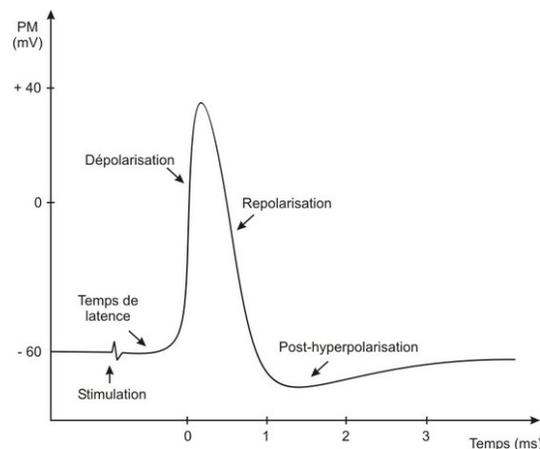


FIGURE 5 – Le potentiel d'action

Après avoir émis un potentiel d'action, le neurone entre dans une *période réfractaire* durant laquelle les canaux sodiques sont inactivés jusqu'au retour à un potentiel de membrane suffisamment négatif. Les neurones sont comme "fatigués" après l'émission d'un potentiel d'action. Les potentiels d'actions peuvent parfois être émis en salve avant que le neurone n'entre dans sa période réfractaire.

Le potentiel d'action a toujours la même forme, à peu près la même durée et une amplitude d'environ 100 mV. Il code donc l'information par sa fréquence : c'est un phénomène binaire, 1 ou 0. Il reste cependant à voir comment les neurones se transmettent l'information à partir des potentiels d'action.

3. Les réseaux neuronaux

Lorsqu'un potentiel d'action est initié dans un neurone, il se propage le long de l'axone, ce que l'on peut modéliser par la progression le long de l'axone d'un quadripole (voir figure 6).

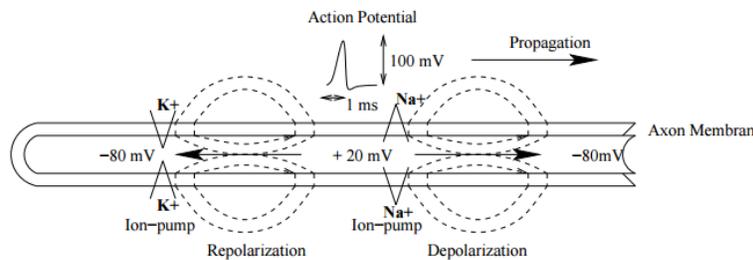


FIGURE 6 – Structure quadripolaire du potentiel d'action

Le principal moyen de communication des neurones, qui reçoit et transmet le potentiel d'action, est la synapse. Les axones font synapse sur les dendrites des autres neurones (en particulier sur les épines dendritiques) ou sur leur corps cellulaire, ce qui connecte l'ensemble des neurones en un immense réseau. Un neurone peut recevoir de l'information en provenance de milliers de synapses et doit alors intégrer le tout en une réponse qu'il transmet par ses propres synapses à d'autres neurones.

Il existe plusieurs types de synapses, les plus "simples" étant les *synapses électriques* qui laissent le courant ionique passer directement d'une cellule à l'autre. Pour ces synapses, l'espace entre la cellule pré-synaptique et la cellule post-synaptique est de l'ordre de 3 nm. Des protéines, les connexines, s'assemblent par six pour former un *connexon*. Deux connexons (un de la cellule pré-synaptique et l'autre de la cellule post-synaptique) se joignent et forment alors un canal grâce auquel les ions passent entre les deux cellules. Cependant, ces ponts fonctionnent dans les deux sens, ce qui donne une nature particulière à la connexion entre les deux neurones. Les deux cellules sont dites *couplées électrotoniquement*. Un potentiel d'action arrivant sur une synapse électrique déclenche donc toujours ce que l'on appelle un *potentiel post-synaptique*, de l'ordre de 1 mV, et plusieurs de ces potentiels, en provenance de plusieurs synapses, peuvent s'additionner pour engendrer dans la cellule post-synaptique un potentiel d'action (une fois atteint le seuil).

D'autres synapses sont dites *synapses chimiques*, elles sont très importantes dans le système nerveux. Pour celles-là, l'écart entre les membranes pré-synaptique et post-synaptique est beaucoup plus grand, entre 20 nm et 50 nm. La membrane de la cellule pré-synaptique contient des petites sphères appelées *vésicules synaptiques* (elles mesurent 50 nm de diamètre, mais certaines, différentes, font 100 nm de diamètre, ce sont les *granules de sécrétion*) qui contiennent des protéines messagères appelées *neurotransmetteurs*. La cellule post-synaptique contient, elle des récepteurs qui captent les neurotransmetteurs libérés, l'ensemble de ses récepteurs constitue la *densité post-synaptique*.

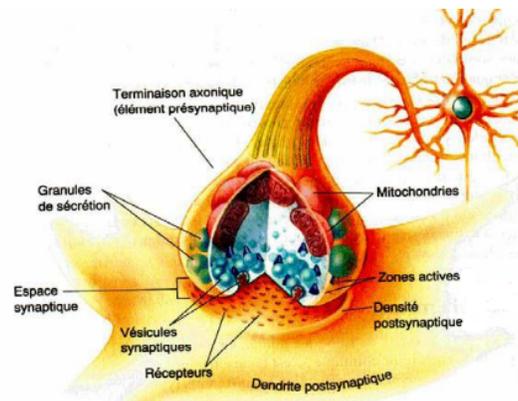


FIGURE 7 – Structure d'une synapse chimique

Les potentiels d'action de la cellule pré-synaptique, en arrivant sur la synapse chimique, causent la libération⁶ de neurotransmetteurs. Ces derniers engendrent dans la cellule post-synaptique un *potentiel post-synaptique d'excitation*, PPSE en abrégé. La cellule post-synaptique somme tous les PPSE qu'elle reçoit en même temps, c'est la *sommation spatiale*, et les PPSE qui arrivent dans un bref intervalle de temps sur la même synapse, soit 5 à 15 ms, c'est la *sommation temporelle*. Ces sommations peuvent conduire à un potentiel d'action dans la cellule post-synaptique.

Certaines synapses sont inhibitrices, elles n'engendrent pas dans la cellule post-synaptique un PPSE mais un *potentiel post-synaptique inhibiteur*, abrégé en PPSI. L'inhibition joue un rôle fondamental dans la régulation de l'activité des neurones.

6. Il y a ici en jeu des mécanismes moléculaires complexes, encore liés aux ions, aux pompes et aux canaux ioniques, que nous ne décrirons pas.

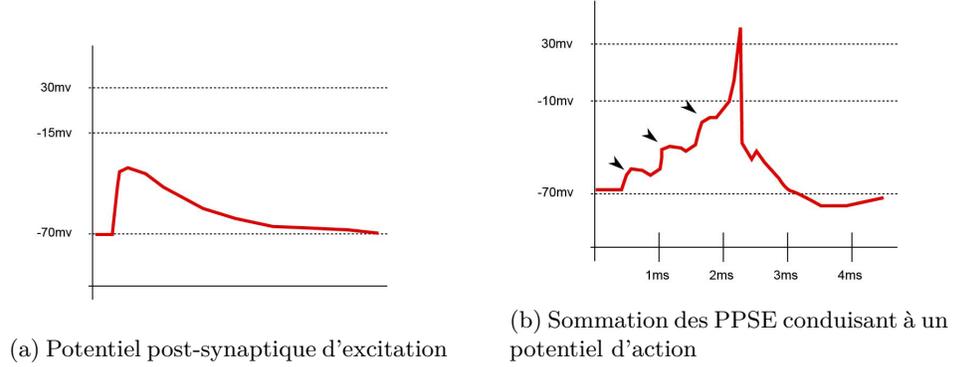


FIGURE 8

II. MODÈLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN NEUROSCIENCES

1. Intègre et Tire avec Bruit et Fuite

1.a. Origine de l'équation

Nous présentons ici les arguments historiques, heuristiques et de probabilité qui conduisent à établir l'équation Intègre et Tire avec Bruit et Fuite (NNLIF en anglais). Le contenu de cette section est en grande partie issu de l'introduction de l'article [23].

Considérons pour commencer le modèle de Lapicque pour la décharge des neurones. Datant de 1907, ce modèle de type intègre et tire décrit l'évolution du potentiel transmembranaire d'un neurone faisant partie d'un réseau :

$$C_m \frac{dV}{dt} = -g_L(V - V_L) + I(t), \quad (1)$$

où C_m est la capacité électrique de la membrane, g_L la conductance de fuite (en général considérée comme constante) et V_L le potentiel de fuite. Le temps caractéristique de relaxation $\tau_m = \frac{C_m}{g_L}$ est de l'ordre de $2ms$ et $V_L \simeq -70mV$. Le courant synaptique est un processus stochastique de la forme

$$I(t) = J_E \sum_{i=1}^{C_E} \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta(t - t_{E_j}^i) + J_I \sum_{i=1}^{C_I} \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta(t - t_{I_j}^i), \quad (2)$$

où δ est la mesure de Dirac en zéro, J_E et J_I sont les forces des synapses excitatrices et inhibitrice, C_E et C_I sont les nombres de neurones pré-synaptiques excitateurs et inhibiteurs, et $t_{E_j}^i$ et $t_{I_j}^i$ sont les temps des $j^{\text{ème}}$ décharges en provenance du $i^{\text{ème}}$ neurone pré-synaptique excitateur ou inhibiteur ; ces dernières valeurs sont aléatoires.

Lorsqu'un neurone atteint le potentiel de décharge $V_F \simeq -50mV$, il émet un potentiel d'action puis retourne immédiatement au potentiel $V_R \simeq -60mV$ de remise à zéro. On a en particulier $V_L < V_R < V_F$.

Chaque neurone décharge suivant une loi de Poisson stationnaire d'intensité ν ; ces lois sont supposées indépendantes. Avec ces hypothèses, on peut montrer que la moyenne de $I(t)$ vaut $\mu_C = b\nu$ où

$$b = C_E J_E - C_I J_I,$$

est la connectivité globale du réseau. Si $b < 0$ on dit que le réseau est globalement inhibiteur, si $b > 0$ on dit qu'il est globalement excitateur. La variance de $I(t)$ est donnée par

$$\sigma_C^2 = (C_E J_E^2 + C_I J_I^2) \nu.$$

On peut remplacer le processus (2), difficile à étudier, par un processus stochastique d'Orstein-Uhlenbeck de même moyenne et variance. On fait alors l'approximation diffusive

$$I(t) dt \simeq \mu_c dt + \sigma_C dB_t,$$

où B_t est le mouvement Brownien standard.

Nous choisissons dorénavant nos unité de voltage et de temps de sorte que $C_m = g_L = 1$ et nous obtenons l'équation

$$dV = (-V + V_L + \mu_C) dt + \sigma_C dB_t, \quad V < V_F \quad (3)$$

avec le processus de saut

$$\limsup_{t \rightarrow t_0^-} V(t) = V_F \implies \liminf_{t \rightarrow t_0^+} V(t) = V_R,$$

et l'intensité de décharge

$$\nu = \nu_{ext} + N(t),$$

où $N(t)$ est le flux de neurones qui traversent le potentiel de décharge V_F .

Dans l'équation (3), on peut par des arguments heuristiques utilisant la formule d'Itô (voir ...) donner une équation aux dérivées partielle de type Fokker-Planck (aussi dite de Kolmogorov rétrograde) pour la densité de probabilité $(v, t) \mapsto p(v, t)$ de trouver au temps $t \in \mathbb{R}_+$ un neurone au potentiel $v \in]-\infty, V_F]$:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} \left[h(v, N(t)) p(v, t) \right] - a(N(t)) \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}(v, t) = \delta_{v=V_R} N(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, v \in]-\infty, V_F] \quad (4)$$

avec $h(v, N(t)) = -v + V_L + \mu_C$, $a(N(t)) = \frac{\sigma_C^2}{2}$, $p(V_F, t) = p(-\infty, t) = 0$ et

$$N(t) = -a(N(t)) \frac{\partial p}{\partial v}(V_F, t).$$

Cette dernière expression exprime que le taux de décharge $N(t)$ est le flux de neurones qui traversent le potentiel V_F . Ces neurones sont remis au potentiel de remise à zéro V_R *via* la distribution de Dirac au point V_R dans le second membre de l'équation. Le comportement de l'équation dépendra aussi de l'état initial du réseau :

$$p(v, 0) = p^0(v).$$

Pour plus de commodité, on change une dernière fois les variables de temps et de voltage (translation de v d'une valeur $V_L + b\nu_{ext}$) afin d'avoir

$$h(v, N) = -v + bN \quad \text{et} \quad a(N) = a_0 + a_1 N.$$

1.b. Présentation et notion de solution

Soit $V_R, V_F \in \mathbb{R}$ tels que $V_R < V_F$. On étudie le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} [h(v, N(t))p] - a(N(t)) \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} &= \delta_{v=V_R} N(t), \\ N(t) = -a(N(t)) \frac{\partial p}{\partial v}(V_F, t), \quad p(V_F, t) = 0, \quad p(-\infty, t) &= 0, \\ p(v, 0) = p^0(v) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{V_F} p^0(v) dv &= 1. \end{aligned} \tag{5}$$

On posera le plus souvent

$$h(v, N) = -v + bN \quad \text{et} \quad a(N) = a,$$

avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, ou parfois la version plus générale

$$h(v, N) = -v + b_0 + bN \quad \text{et} \quad a(N) = a_1 N + a_0,$$

avec $b_0, b \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}_+$ et $a_1 \in \mathbb{R}_+$.

Ces choix seront soit précisés comme hypothèses dans les théorèmes, soit supposés en début d'une section et donc supposés, sauf mention contraire, dans tous les résultats de ladite section.

Ce modèle a été présenté et étudié dans les articles [23], [24] et [28], en autres.

Pour ce système, on peut définir des solutions dites fortes.

Définition 1. On appelle *solution forte* (à décroissance rapide), ou *solution régulière*, ou *solution classique* du système (5) sur $[0, T[$, $T \in \mathbb{R}_+^* \cap \{+\infty\}$ tout couple de fonctions (p, N) tel que

- $p \in \mathcal{C}^0(]-\infty, V_F]) \times [0, T[) \cap \mathcal{C}^{2,1}([)-\infty, V_R[\cup]V_R, V_F]) \times [0, T[) \cap \mathbb{L}^\infty([0, T[, \mathbb{L}^1(]-\infty, V_F])$) et $N \in \mathcal{C}^0([0, T[)$;
- $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lim_{v \rightarrow -\infty} Q(v)p(v) = 0$ et $\lim_{v \rightarrow -\infty} Q(v) \frac{\partial p}{\partial v}(v) = 0$ (décroissance rapide) ;
- Les fonctions p et N vérifient (5) au sens classique sur $] -\infty, V_R[\cup]V_R, V_F]$ et au sens des distributions sur $] -\infty, V_F]$.

On peut montrer par le calcul et la théorie élémentaire des distributions que vérifier (5) au sens classique sur $] -\infty, V_R[\cup]V_R, V_F]$ et au sens des distributions sur $] -\infty, V_F]$ est équivalent à vérifier l'équation au sens classique de part et d'autre de V_R et à demander pour tout temps t à la fonction $\partial_v p(\cdot, t)$ d'avoir des limites à gauche et à droite en V_R et un saut de taille $\frac{N(t)}{a(N(t))}$, au point V_R , c'est-à-dire

$$\forall t \in [0, T[, \quad \lim_{v \rightarrow V_R^+} \left(\frac{\partial p}{\partial v}(v, t) \right) - \lim_{v \rightarrow V_R^-} \left(\frac{\partial p}{\partial v}(v, t) \right) = \frac{N(t)}{a(N(t))}.$$

On notera également que cette définition de solution forte suppose le fait d'être à décroissance rapide. On trouve souvent dans la littérature des hypothèses de décroissance uniquement sur la condition initiale p^0 . Il s'avère – on peut le vérifier manuellement lors de la construction de solutions fortes – que les hypothèses de décroissance sur la condition initiale se propagent dans une large mesure à toute la solution ; il est équivalent de l'inclure dans la définition ou de le demander pour la condition initiale ; nous y reviendrons.

Remarquons également que dans le cas où $a(N)$ n'est pas constant, une obstruction à l'existence de solutions en temps long peut être l'absence de solution au problème de point fixe

$$N(t) = -a(N(t)) \frac{\partial p}{\partial v}(V_F, t),$$

ou au contraire l'existence de solutions multiples.

Il est également possible de donner une notion plus faible de solution.

Définition 2. Soit $T^* \in \mathbb{R}_+ \cap \{+\infty\}$. Soit $p \in \mathbb{L}^\infty([0, T^*[, \mathbb{L}_+^1(]-\infty, V_F[)])$ et $N \in \mathbb{L}_{loc,+}^1([0, T^*])$. Le couple (p, N) est une solution faible du système (5) si pour tout $T \in]0, T^*[$ et pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, V_F] \times [0, T])$ telle que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\left(\phi(\cdot, t)p(\cdot, t), \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}(\cdot, t)p(\cdot, t), h(\cdot, N(t)) \frac{\partial \phi}{\partial v}(\cdot, t)p(\cdot, t) \right) \in \left(\mathbb{L}^1(]-\infty, V_F[) \right)^3, \quad (6)$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{V_F} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + h(v, N(t)) \frac{\partial \phi}{\partial v} + a(N(t)) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] p(v, t) dv dt \\ = \int_0^T N(t) \left(\phi(V_R, t) - \phi(V_F, t) \right) dt \\ + \int_{-\infty}^{V_F} p^0(v) \phi(0, v) dv + \int_{-\infty}^{V_F} p(v, T) \phi(T, v) dv \end{aligned} \quad (7)$$

Une solution faible est dite à décroissance rapide si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, V_F])$, si il existe un polynôme de deux variables réelles P vérifiant $\forall t \in [0, T], \forall v \in]-\infty, V_F], \phi(v, t) \leq P(v, t)$, alors, pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, (6) est vraie.

En raison de la densité des fonctions à variables séparées dans l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur un produit cartésien d'intervalles réels et du théorème de convergence dominée, on peut écrire la définition équivalente suivante de solution faible.

Définition 3 (Bis). Soit $T^* \in \mathbb{R}_+ \cap \{+\infty\}$. Soit $p \in \mathbb{L}^\infty([0, T^*[, \mathbb{L}_+^1(]-\infty, V_F[)])$ et $N \in \mathbb{L}_{loc,+}^1([0, T^*])$. Le couple (p, N) est une solution faible du système (5) si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, V_F])$ telle que pour presque tout $t \in [0, T^*]$,

$$\left(\phi(\cdot)p(\cdot, t), \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}(\cdot)p(\cdot, t), h(\cdot, N(t)) \frac{\partial \phi}{\partial v}(\cdot, t)p(\cdot, t) \right) \in \left(\mathbb{L}^1(]-\infty, V_F[) \right)^3, \quad (8)$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{V_F} p(v, t) \phi(v) dv = \int_{-\infty}^{V_F} \left[(-v + bN(t)) \frac{\partial \phi}{\partial v} + a(N(t)) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] p(v, t) dv \\ + N(t) \left(\phi(V_R) - \phi(V_F) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

où la dérivée en temps est prise au sens des distributions et où l'on suppose $\lim_{t \rightarrow 0} \|p(\cdot, t) - p^0(\cdot)\|_{\mathbb{L}^1} = 0$.

Une solution faible est dite à décroissance rapide si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, V_F])$, si il existe un polynôme P vérifiant $\forall v \in]-\infty, V_F], \phi(v) \leq P(v)$, alors, pour presque tout $t \in [0, T^*]$, (6) est vraie.

Théorème 4

Toute solution forte à décroissance rapide de (5) est une solution faible à décroissance rapide de (5).

Démonstration : Étant donnée une solution forte à décroissance rapide définie en temps sur $[0, T^*]$, on peut multiplier la première équation de (5), prise au sens classique sans le second membre singulier, par une fonction test indéfiniment dérivable à croissance polynomiale et intégrer sur $] \alpha, \beta[\times] 0, T[$ et sur $] \gamma, \delta[\times] 0, T[$ pour tout temps $T \in [0, T^*[$.

On somme ensuite les deux égalités obtenues et on intègre ensuite par partie une ou deux fois suivant les termes.

Enfin, on prend les limites pour α, β . On vérifie que toutes les limites des termes de bords soit sont nulles soit égalent des termes que l'on peut écrire explicitement en fonction ■

Remarque 5. Si l'on prend la fonction test constante $\phi = 1$, on a la loi de conservation pour les solutions faibles

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{V_F} p(v, t) dv = 0,$$

c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{V_F} p(v, t) dv = \int_{-\infty}^{V_F} p^0(v) dv = 1.$$

Toute solution forte étant faible, on a la même loi de conservation de la masse pour les solutions fortes.

1.c. Existence de solutions fortes

Dans toute cette section, on suppose que la fonction a est une constante strictement positive, encore appelée a .

Théorème 6

Soit (p, N) une solution forte de (5) pour les paramètres $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$, $V_F \in \mathbb{R}$, $V_R \in \mathbb{R}$, et $h : (v, N) \mapsto -v + bN$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Posons

$$\bar{p}(v, t) = \alpha p(\beta v + \gamma, t), \quad \bar{N}(t) = -\frac{\alpha}{\beta} N(t),$$

alors (\bar{p}, \bar{N}) est solution forte de (5) pour les paramètres

$$\bar{b}_0 = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \bar{b} = \frac{ab}{\alpha\beta^2}, \quad \bar{a} = \frac{a}{\beta^2}, \quad \bar{V}_R = \frac{V_R - \gamma}{\beta}, \quad \bar{V}_F = V_F - \gamma,$$

et $h : (v, N) \mapsto -v + \bar{b}_0 + \bar{b}N$.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial v}(v, t) &= \alpha\beta \frac{\partial p}{\partial v}(\beta v + \gamma, t), \\ \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial v^2}(v, t) &= \alpha\beta^2 \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}(\beta v + \gamma, t), \\ \bar{N}(t) &= -\frac{a}{\beta^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial v}(V_F - \gamma, t) = -\frac{\alpha}{\beta} a \frac{\partial p}{\partial v}(V_F, t) = \frac{\alpha}{\beta} N(t), \end{aligned}$$

On calcule alors, sachant que au sens des distributions, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(v, t) &= \alpha \frac{\partial p}{\partial t}(\beta v + \gamma, t) \\
 &= \alpha \left(-bN(t) \frac{\partial p}{\partial v}(\beta v + \gamma, t) + p(\beta v + \gamma, t) + (\beta v + \gamma) \frac{\partial p}{\partial v}(\beta v + \gamma, t) \right. \\
 &\quad \left. + a \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}(\beta v + \gamma, t) + N(t) \delta(\beta v + \gamma - V_R) \right) \\
 &= -\frac{b}{\beta} N(t) \frac{\partial \bar{p}}{\partial v}(v, t) + \bar{p}(v, t) + \left(v + \frac{\gamma}{\beta}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial v}(v, t) \\
 &\quad + \frac{a}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial v^2}(v, t) + \frac{\alpha}{\beta} N(t) \delta\left(v - \frac{V_R - \gamma}{\beta}\right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(v - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{b}{\beta} N(t)\right) \bar{p} \right](v, t) + \frac{a}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial v^2}(v, t) + \frac{\alpha}{\beta} N(t) \delta\left(v - \frac{V_R - \gamma}{\beta}\right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(v - \frac{\gamma}{\beta} + \frac{ab}{\beta} \frac{\partial p}{\partial v}(\gamma, t)\right) \bar{p} \right](v, t) + \frac{a}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial v^2}(v, t) + \bar{N}(t) \delta\left(v - \frac{V_R - \gamma}{\beta}\right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(v - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{ab}{\alpha y^2} \bar{N}(t)\right) \bar{p} \right](v, t) + \frac{a}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial v^2}(v, t) + \bar{N}(t) \delta\left(v - \frac{V_R - \gamma}{\beta}\right).
 \end{aligned}$$

Si l'on pose,

$$\bar{b}_0 = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \bar{b} = \frac{ab}{\alpha \beta^2}, \quad \bar{a} = \frac{a}{\beta^2}, \quad \bar{V}_R = \frac{V_R - \gamma}{\beta}, \quad \text{et} \quad \bar{V}_F = V_F - \gamma$$

on obtient

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left[(-v + \bar{b}_0 + \bar{b} \bar{N}(t)) \bar{p} \right] - \bar{a} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial v^2} = \bar{N}(t) \delta_{\bar{V}_R}(v), \quad \blacksquare$$

Ce résultat permet de démontrer sans perte de généralité l'existence des solutions fortes dans le cas plus simple $V_F = 0$ et $a = 1$. C'est ce que fait l'article [27].

La méthode utilisée est de faire le changement de variable

$$y = e^t v \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1),$$

que l'on peut écrire également sous la forme

$$v = \frac{y}{\sqrt{2\tau + 1}} \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{2} \ln(2\tau + 1),$$

qui permet de rendre équivalent le système (5) à un problème de Stefan à frontière libre. On pose alors,

$$w(y, \tau) = \alpha(\tau) p\left(y\alpha(\tau), -\ln(\alpha(\tau))\right),$$

ou de manière équivalente

$$p(v, t) = e^t w\left(e^t v, \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)\right),$$

où

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\tau + 1}},$$

On définit ensuite la quantité

$$M(\tau) = \alpha(\tau)^2 N(t) = -\frac{dw}{dy}(0, \tau),$$

puis, on pose

$$x = y - b_0(\sqrt{1 + 2\tau} - 1) - b \int_0^\tau \frac{M(s)}{\alpha(s)} ds.$$

et

$$u(x, \tau) = w(y, \tau).$$

Le couple (u, M) est alors solution du problème à frontière libre de type Stefan suivant.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, \tau) + M(\tau) \delta_{s(\tau) + \frac{V_R}{\alpha(\tau)}}(x) & x \in] - \infty, s(\tau)], \tau \in \mathbb{R}_+ \\ M(\tau) = -\frac{\partial u}{\partial x}(s(\tau), \tau) & \tau \in \mathbb{R}_+ \\ s(\tau) = s(0) - b_0(\sqrt{1 + 2\tau} - 1) - b \int_0^\tau \frac{M(s)}{\alpha(s)} ds & \tau \in \mathbb{R}_+ \\ u(-\infty, \tau) = u(s(\tau), \tau) = 0 & \tau \in \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in] - \infty, s(0)]. \end{cases} \quad (10)$$

Pour ce système, nous donnons la définition suivante de solution classique, donnée presque à l'identique dans [27].

Définition 7 (Solutions du problème de type Stefan). *Soit $u^0(x)$ une fonction positive dans $C^0((-\infty, 0]) \cap C^1(]-\infty, V_R[\cup]V_R, 0]) \cap L^1(]-\infty, 0])$ telle que $u^0(0) = 0$. Supposons que $\frac{du^0}{dx}$ tend (rapidement⁷) vers 0 en $-\infty$ et admet des limites finies à droite et à gauche en V_R . On dit que u est une solution classique de (10) avec donnée initiale u^0 sur l'intervalle $J = [0, T[$ ou $J = [0, T]$, pour un temps $T > 0$ si :*

1. M est une fonction continue sur J ,
2. u est continue dans le domaine $\{(x, \tau) : -\infty < x \leq s(\tau), \tau \in J\}$ et pour tout $\tau \in J$, $u \in L^1((-\infty, s(\tau)))$,
3. Si nous notons $s_1(\tau) := s(\tau) + \frac{V_R}{\alpha(\tau)}$, $\partial_{xx}u$ et $\partial_\tau u$ sont continues dans le domaine $\{(x, \tau) : -\infty < x < s_1(\tau), t \in J \setminus \{0\}\} \cup \{(x, \tau) : s_1(\tau) < x < s(\tau), \tau \in J \setminus \{0\}\}$,
4. Les valeurs $\partial_x u(s_1(\tau)^-, \tau)$, $\partial_x u(s_1(\tau)^+, \tau)$, $\partial_x u(s(\tau)^-, t)$ sont bien définis et finies,
5. $\partial_x u$ décroît (rapidement) à $-\infty$,
6. Les équations (10) sont vérifiées.

Il est possible de prouver l'existence de solutions à partir d'un argument de point fixe et du noyau de la chaleur. Posons

$$G(x, \tau, \xi, \eta) = \frac{1}{(4\pi(\tau - \eta))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4(\tau - \eta)}}.$$

On a alors pour des solutions régulières l'égalité

$$\begin{aligned} M(\tau) = & -2 \int_{-\infty}^0 G(s(\tau), \tau, \xi, 0) \frac{du^0}{dx}(\xi) d\xi \\ & + 2 \int_0^\tau M(\eta) \frac{\partial}{\partial x} G(s(\tau), \tau, s(\eta), \eta) d\eta \\ & - 2 \int_0^\tau M(\eta) \frac{\partial}{\partial x} G(s(\tau), \tau, s(\eta) + \frac{V_R}{\alpha(\eta)}, \eta) d\eta \quad (11) \end{aligned}$$

7. plus vite que tout polynôme

et la formule de Duhamel

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^0 G(x, \tau, \xi, 0) u^0(\xi) d\xi - \int_0^\tau M(\eta) G(x, \tau, s(\eta), \eta) d\eta + \int_0^\tau M(\eta) G(x, \tau, s(\eta) + \frac{V_R}{\alpha(\eta)}, \eta) d\eta. \quad (12)$$

Cela permet, par un argument de point fixe sur M de démontrer l'existence de solutions au problème (10)

Théorème 8

Soit $u^0 \in \mathcal{C}^0(]-\infty, 0]) \cap \mathcal{C}^1(]-\infty, V_R[\cup]V_R, 0[)$ une donnée initiale. Supposons que u^0 est positive, à décroissance rapide en $-\infty$, de dérivée à décroissance rapide en $-\infty$ et que $\frac{du^0}{dx}$ admet une dérivée à gauche et à droite en V_R . Alors il existe une unique solution classique maximale au problème (10) au sens de la définition 7.

L'article donne un critère utile pour continuer les solutions de (10) dans le temps

Théorème 9

Soit $u^0 \in \mathcal{C}^0(]-\infty, 0]) \cap \mathcal{C}^1(]-\infty, V_R[\cup]V_R, 0[)$ une donnée initiale. Supposons que u^0 est positive, à décroissance rapide en $-\infty$, de dérivée à décroissance rapide en $-\infty$ et que $\frac{du^0}{dx}$ admet une dérivée à gauche et à droite en V_R . Soit (u, M) une solution de (10) au sens de la définition 7 définie sur $[0, T[$. Supposons que

$$U_0 = \sup_{x \in]-\infty, s(\tau_0 - \varepsilon)]} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau_0 - \varepsilon) \right| < +\infty$$

et

$$M^* = \sup_{\tau \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0[} M(\tau) < +\infty$$

alors il existe une constante K dépendant uniquement de U_0 et M^* telle que

$$\sup \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \mid x \in]-\infty, s(\tau)], \tau \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0[\right\} \leq K.$$

Ce théorème permet de donner un critère d'explosion en temps fini pour les solutions de (10) :

Théorème 10

Soit $u^0 \in \mathcal{C}^0(]-\infty, 0]) \cap \mathcal{C}^1(]-\infty, V_R[\cup]V_R, 0[)$ une donnée initiale. Supposons que u^0 est positive, à décroissance rapide en $-\infty$, de dérivée à décroissance rapide en $-\infty$ et que $\frac{du^0}{dx}$ admet une dérivée à gauche et à droite en V_R . Le temps d'existence maximal T^* de l'unique solution classique de (10) vérifie

$$T^* = \sup \{ \tau \in \mathbb{R}_+ \mid M(\tau) < +\infty \}.$$

On peut aussi, avec le théorème 9 démontrer l'existence globale dans le cas inhibiteur

Théorème 11

Soit $u^0 \in \mathcal{C}^0(]-\infty, 0]) \cap \mathcal{C}^1(]-\infty, V_R[\cup]V_R, 0[)$ une donnée initiale. Supposons

que u^0 est positive, à décroissance rapide en $-\infty$, de dérivée à décroissance rapide en $-\infty$ et que $\frac{du^0}{dx}$ admet une dérivée à gauche et à droite en V_R . Si $b < 0$, il existe une unique solution classique maximale au problème (10) au sens de la définition 7 et elle est globale en temps.

Grâce au changement de variables, ces résultats ont des équivalents pour les solutions de (5) :

Théorème 12

Soit $p^0 \in \mathcal{C}^0(]-\infty, 0]) \cap \mathcal{C}^1(]-\infty, V_R[\cup]V_R, 0])$. Supposons que p^0 est positive, à décroissance rapide en $-\infty$, de dérivée à décroissance rapide en $-\infty$ et que $\frac{dp^0}{dv}$ admet une dérivée à gauche et à droite en V_R . Il existe une unique solution maximale forte à décroissance rapide (p, N) de (5) et son temps d'existence maximal T^* vérifie

$$T^* = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \mid N(t) < +\infty\}.$$

Si de plus $b < 0$, on a $T^* = +\infty$.

1.d. Propriétés qualitatives des solutions faibles

On trouve dans [23] les deux résultats suivants.

Théorème 13 (*Explosion en temps fini*)

Supposons que pour tout $v \in]-\infty, V_F]$ et tout $N \in \mathbb{R}_+$,

$$h(v, N) \geq -v + bN \quad \text{et} \quad a(N) \geq a_m > 0,$$

et que $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\mu > \max(\frac{V_F}{a_m}, \frac{1}{b})$ un réel positif. Si

$$\int_{-\infty}^{V_F} e^{\mu v} p^0(v) dv$$

est assez proche de $e^{\mu V_F}$, il n'y a aucune solution faible globale au problème (5).

Ce qui se résume à dire que pour tout b strictement positif, les solutions dont la condition initiale est assez concentrée au voisinage de V_F explosent en temps fini. Ce théorème se démontre en raisonnant par l'absurde à partir d'une fonction test exponentielle.

Théorème 14 (*Estimées a priori*)

Supposons $h(v, N) = -v + bN$, $b \in \mathbb{R}$ et $a(N) = a_1N + a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $a_1 \in \mathbb{R}_+$. Soit (p, N) une solution faible à décroissance rapide de (5) définie sur $[0, T^*[$. On a alors, pour tout $T \in [0, T^*[$,

- Si $b \geq V_F - V_R$, alors $\forall t \in [0, T]$

$$\int_{-\infty}^{V_F} (V_F - v)p(v, t) dv \leq \max\left(V_F, \int_{-\infty}^{V_F} (V_F - v)p^0(v) dv\right)$$

et

$$(b - V_F + V_R) \int_0^T N(t) dt \leq V_F T + \int_{-\infty}^{V_F} (V_F - v)p^0(v) dv.$$

- Si $b < V_F - V_R$, alors $\forall t \in [0, T]$

$$\int_{-\infty}^{V_F} (V_F - v)p(v, t) dv \geq \min \left(V_F, \int_{-\infty}^{V_F} (V_F - v)p^0(v) dv \right)$$

Si de plus $a(N) = a_0 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une constante C dépendant de V_F, V_R, a_0, p^0 telle que

$$\int_0^T N(t) dt \leq (1 + T)C.$$

1.e. Solutions fortes stationnaires

L'article [23] caractérise également les états stationnaires réguliers de l'équation, c'est-à-dire les solutions fortes qui ne dépendent pas du temps. D'abord, on peut donner une expression implicite à ces états stationnaires réguliers pour des paramètres assez généraux, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 15

Supposons $h(v, N) = -v + V_0(N)$ pour une fonction V_0 quelconque. Soit (p_∞, N_∞) un état stationnaire régulier de (5), alors il s'écrit

$$p_\infty(v) = \frac{N_\infty}{a(N_\infty)} e^{-\frac{(v - V_0(N_\infty))^2}{2a(N_\infty)}} \int_{\max(v, V_R)}^{V_F} e^{-\frac{(w - V_0(N_\infty))^2}{2a(N_\infty)}} dw.$$

où N_∞ vérifie

$$\frac{1}{N_\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s} \left(e^{s \frac{V_F - V_0(N_\infty)}{\sqrt{a(N_\infty)}}} - e^{s \frac{V_R - V_0(N_\infty)}{\sqrt{a(N_\infty)}}} \right) ds.$$

Ensuite, pour des cas particuliers des formes de h et a , on a des résultats d'existence précis, que voici :

Théorème 16

Supposons $h(v, N) = -v + bN$ et $a(N) = a_0$. Alors,

- pour $b < 0$ ou $b > 0$ assez petit, il existe un unique état stationnaire pour l'équation (5).

- Si

$$0 < b < V_F - V_R \quad \text{ou} \quad 0 < 2a_0b < (V_F - V_R)^2 V_R,$$

il existe au moins un état stationnaire régulier pour l'équation (5).

- Si

$$b > V_F - V_R \quad \text{et} \quad 0 < 2a_0b < (V_F - V_R)^2 V_R,$$

il existe au moins deux états stationnaires réguliers pour l'équation (5).

- Si,

$$b > \max \left(2(V_F - V_R), 2V_F \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{e^{\frac{sV_F}{\sqrt{a_0}}} - e^{\frac{sV_R}{\sqrt{a_0}}}}{s} ds \right),$$

il n'y a aucun état stationnaire régulier pour l'équation (5).

et

Théorème 17

Supposons $h(v, N) = -v + bN$ et $a(N) = a_0 + a_1N$. Alors,

- Si

$$b < V_F - V_R \quad \text{ou} \quad \left(2a_0b + 2a_1V_R < (V_F - V_R)^2V_R \quad \text{et} \quad b > 0 \right),$$

il existe au moins un état stationnaire régulier pour l'équation (5).

- Si

$$b > V_F - V_R \quad \text{et} \quad 2a_0b + 2a_1V_R < (V_F - V_R)^2V_R,$$

il existe au moins deux états stationnaires réguliers pour l'équation (5).

- Si,

$$b > \max \left(2(V_F - V_R), 2V_F \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{e^{\frac{sV_F}{\sqrt{a_0}}} - e^{\frac{sV_R}{\sqrt{a_0}}}}{s} ds \right),$$

il n'y a aucun état stationnaire régulier pour l'équation (5).

1.f. Convergence pour le problème linéaire

On suppose dans cette section $h(v, N) = -v$ et $a(N) = a \in \mathbb{R}_+^*$. Le problème devient alors linéaire. On peut écrire plus simplement l'unique état stationnaire :

$$p_\infty(v) = \frac{N_\infty}{a} e^{-\frac{v^2}{2a}} \int_{\max(v, V_R)}^{V_F} e^{-\frac{w^2}{2a}} dw.$$

L'article [23] démontre le résultat suivant :

Théorème 18

Pour toute solution forte (à décroissance rapide) telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $p(v, t) < Cp_\infty(v)$, il existe $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p(v, t) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv \leq e^{-2\nu t} \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p^0(v) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv$$

La démonstration de ce résultat utilise deux résultats techniques que l'on peut trouver dans l'annexe (théorème ** et théorème **). Il est à noter que l'article [23] invite à vérifier que l'hypothèse $p(v, t) < Cp_\infty(v)$ peut être remplacée par $p^0 \leq Cp_\infty$ grâce à des méthodes d'entropie relative générale présentées dans l'article [72].

1.g. Estimées L^2 uniformes

Dans le cas du système non-linéaire, des estimées uniformes dans L^2 du taux de décharge ont été obtenues par l'article [28]. En comparant les solutions à un état stationnaire fixe, les auteurs obtiennent le résultat suivant.

Théorème 19

Soit $b_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'il existe au moins un état stationnaire (p_∞^1, N_∞^1) associé. Soit

$V_M \in]V_R, V_F[$ et notons

$$S(b_1, V_M) = \int_{V_M}^{V_F} \frac{(p^0(v))^2}{p_\infty^1(v)} dv.$$

Pour toute condition initiale p^0 telle que $S(b_1, V_M) < +\infty$,

- Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ indépendante de $S(b_1, V_M)$ et $T \in \mathbb{R}_+$ qui dépend uniquement de V_M et $S(b_1, V_M)$ tel que pour tout intervalle $I \subset]T, +\infty[$ et pour tout $b \in]-\infty, 0]$,

$$\int_I N(t)^2 dt \leq C(1 + |I|).$$

- Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Si b est assez petit relativement à $S(b_1, V_M)$ et V_M , il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$,

$$\int_I N(t)^2 dt \leq C(1 + |I|).$$

1.h. Convergence des solutions pour les faibles connectivités

Pour les faibles connectivités, on peut obtenir sans trop d'effort l'égalité d'entropie et l'inégalité de type Poincaré utilisées dans le cas linéaire. Les preuves de ces résultats ne comportent pas de difficulté conceptuelle supplémentaire par rapport au cas linéaire, mais n'ont pas été faites en détail dans la littérature. On peut les trouver dans l'annexe (théorème ** et théorème **).

Armé de ces outils et des estimées \mathbb{L}^2 de la section précédente, l'article [28] démontre deux résultats de convergence pour les solutions fortes lorsque la connectivité est assez faible relativement à la condition initiale :

Théorème 20

Supposons que $|b|$ est assez petit, il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ telle que si

$$\int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p^0(v) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv \leq \frac{1}{2|b|},$$

alors

$$\int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p(v, t) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv \leq e^{-\mu t} \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p^0(v) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv.$$

et (nous avons apporté une correction que nous jugeons nécessaire dans l'énoncé du théorème, avec la bénédiction de l'un des auteurs)

Théorème 21

Soit $b_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'il existe au moins un état stationnaire (p_∞^1, N_∞^1) associé. Soit

$V_M \in]V_R, V_F[$ et notons

$$S(b_1, V_M) = \int_{V_M}^{V_F} \frac{(p^0(v))^2}{p_\infty^1(v)} dv.$$

Pour toute condition initiale p^0 telle que $S(b_1, V_M) < +\infty$,

- Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant uniquement de $S(b_1, V_M)$ et V_M et une constante $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $b \in [0, C]$,

$$\int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p(v, t) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv \leq e^{-\mu t} \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p^0(v) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv.$$

- Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ indépendante de $S(b_1, V_M)$, une constante $T \in \mathbb{R}_+$ qui dépend uniquement de V_M et $S(b_1, V_M)$ et une constante $\mu^n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $t \in [T + 1, +\infty[$ et pour tout $b \in]-C, 0]$,

$$\int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p(v, t) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv \leq e^{-\mu(t-T)} \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p(v, T) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)} \right)^2 dv.$$

1.i. Sur-solutions et estimées dans L^∞

L'article [28] montre comment obtenir des estimées pour la norme de la convergence uniforme à l'aide d'une notion adaptée de sur-solution. En effet, considérons la définition suivante.

Définition 22. Soit $b \in \mathbb{R}_-$, $V_0 \in]-\infty, V_F[$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle sur-solution universelle (classique) sur $[V_0, V_F] \times [0, T]$ un couple (\bar{p}, \bar{N}) tel que

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} (v \bar{p}(v, t)) - a \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial v^2}(v, t) \geq \bar{N}(t) \delta_{V_R}(v),$$

sur $]V_0, V_F[\times]0, T[$ au sens des distributions et sur $(V_0, V_F \setminus \{V_R\}) \times]0, T[$ au sens classique, avec $\bar{N}(t) = -a \frac{\partial \bar{p}}{\partial v}(V_F, t) \geq 0$ et $\bar{p}(\cdot, t)$ décroissant sur $[V_0, V_F]$ pour tout $t \in [0, T]$.

On a alors le théorème de comparaison suivant.

Théorème 23

Soit $b \in \mathbb{R}_-$, $V_0 \in]-\infty, V_F[$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. Soit \bar{p} une sur-solution universelle classique et p une solution classique sur $[V_0, V_F] \times [0, T]$, et supposons

$$\forall v \in [V_0, V_F], \quad \bar{p}(v, 0) \geq p^0(v) \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T], \quad \bar{p}(V_0, t) \geq p(V_0, t).$$

Alors $\bar{p} \geq p$ sur $[V_0, V_F] \times [0, T]$ et si $\bar{p}(\cdot, 0) - p^0$ n'est pas identiquement nulle alors $\bar{p} > p$ sur $[V_0, V_F] \times]0, T]$.

L'article [28] donne alors dans un premier temps le cas particulier de sur-solution que voici :

$$P(v, t) = \begin{cases} e^t & v \in [V_R, V_F] \\ e^t \frac{V_F - v}{V_F - V_R} & v \in]-\infty, V_R[, \end{cases}$$

qui permet de démontrer d'une autre manière que dans l'article [27] l'existence en temps long dans le cas inhibiteur.

Ce n'est cependant pas suffisant pour démontrer des estimées uniformes. Il faut alors considérer une autre sur-solution, constante en temps : la fonction Q qui est égale à Q_1 sur $]V_R, V_F[$ et à Q_2 sur $]0, V_R[$, où

$$\begin{cases} -aQ'_1 - vQ_1 = a & \text{sur }]V_R, V_F[, & Q_1(V_F) = 0, \\ -aQ'_2 - vQ_2 = 0 & \text{sur }]0, V_R[, & Q_2(V_R) = Q_1(V_R). \end{cases}$$

On peut alors démontrer le théorème suivant.

Théorème 24

Soit $b \in \mathbb{R}_-$ et $p_0 \in L^1_+ \cap L^\infty(]-\infty, V_F]) \cap \mathcal{C}^1(]-\infty, V_F])$ tel que $p^0(V_F) = 0$. Pour toute solution classique p associée à p^0 ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|p(\cdot, t)\|_\infty < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} N(t) < +\infty.$$

2. Réseaux excitateur et inhibiteur couplés

2.a. Description du modèle et notion de solution

On considère deux populations de neurones interconnectées, l'une excitatrice et l'autre inhibitrice. On note $p_I(v, t)$ (respectivement $p_E(v, t)$) la probabilité au temps t de trouver un neurone de potentiel transmembranaire v dans la population inhibitrice (respectivement excitatrice).

$$\begin{cases} \frac{\partial p_I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} [h^I(v, N_E, N_I)p_I] - a_I(N_E, N_I) \frac{\partial^2 p_I}{\partial v^2} = N_I(t) \delta_{V_R}, \\ \frac{\partial p_E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} [h^E(v, N_E, N_I)p_E] - a_E(N_E, N_I) \frac{\partial^2 p_E}{\partial v^2} = N_E(t) \delta_{V_R}, \\ N_\alpha(t) = -a_\alpha(N_E(t), N_I(t)) \frac{\partial p_\alpha}{\partial v}(V_F, t), & \alpha = E, I \\ p_\alpha(V_F, t) = 0, \quad p_\alpha(-\infty, t) = 0, \quad p_\alpha(v, 0) = p_\alpha^0(v), & \alpha = E, I \\ \int_{-\infty}^{V_F} p_\alpha^0(v) dv = 1, & \alpha = E, I \end{cases} \quad (\mathfrak{D})$$

On considérera dans la plupart des cas que

$$\begin{aligned} h^\alpha(v, N_E, N_I) &= -v + b_E^\alpha N_E - b_I^\alpha N_I, \\ a_\alpha(N_E, N_I) &= a_0^\alpha + a_E^\alpha N_E + a_I^\alpha N_I, \quad \alpha = E, I \end{aligned}$$

où $b_E^E, b_E^I, b_I^E, b_I^I, a_E^E, a_E^I, a_I^E, a_I^I, a_0^E$ et a_0^I sont des constantes réelles positives ou nulles.

Définition 25. On appelle solution faible de (\mathfrak{D}) tout quadruplet (p_E, p_I, N_E, N_I) telle que, pour $\alpha \in \{E, I\}$, $p_\alpha \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+, L^1_+(]-\infty, V_F])$, $N_\alpha \in \mathbb{L}^1_{loc,+}(\mathbb{R}_+)$ et pour toute fonction test

$$\phi \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, V_F] \times [0, T]),$$

vérifiant $v \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \in \mathbb{L}^\infty(]-\infty, V_F] \times [0, T])$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{-\infty}^{V_F} p_\alpha(v, t) \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial v} h^\alpha(v, N_E(t), N_I(t)) - a_\alpha(N_E(t), N_I(t)) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] dv dt = \\ & \int_0^T N_\alpha(t) \left[\phi(V_R, t) - \phi(V_F, t) \right] dt + \int_{-\infty}^{V_F} p_\alpha^0(v) \phi(v, 0) dv - \int_{-\infty}^{V_F} p_\alpha(v, T) \phi(v, T) dv, \quad (13) \end{aligned}$$

On pourra aussi considérer des fonctions tests de la forme $\phi(v)\psi(t)$, ce qui donne pour définition des solutions faibles : pour toute fonction test

$$\phi \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, V_F]) \text{ telle que } v \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \in \mathbb{L}^\infty(]-\infty, V_F]),$$

on a,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{V_F} \phi(v) p_\alpha(v, t) dv &= N_\alpha(t) \left(\phi(V_R) - \phi(V_F) \right) \\ &+ \int_{-\infty}^{V_F} p_\alpha(v, t) \left[\frac{\partial \phi}{\partial v} h^\alpha(v, N_E(t), N_I(t)) + a_\alpha(N_E(t), N_I(t)) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] dv. \quad (14) \end{aligned}$$

Remarque 26. Si l'on applique la définition avec la fonction test $\phi = 1$, on obtient pour $\alpha = E, I$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{-\infty}^{V_F} p_\alpha(v, t) dv = \int_{-\infty}^{V_F} p_\alpha^0(v) dv = 1$$

3. Modèle NNLF avec délai de transmission

3.a. Description du modèle

Soit V_R, V_F tq $V_R < V_F$. Soit $d \in \mathbb{R}_+^*$. On étudie le système

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left[(-v + bN(t-d))p \right] - a(N(t-d)) \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = \delta_{v=V_R} N(t), \quad v \in]-\infty, V_F[, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (\mathcal{Q})$$

$$N(t) = -a(N(t)) \frac{\partial p}{\partial v}(V_F, t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad ; \quad N(t) = N^0(t) \geq 0, \quad t \in [-d, 0[,$$

$$p(v, 0) = p^0(v) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{V_F} p^0(v) dv = 1, \quad p(V_F, t) = 0, \quad p(-\infty, t) = 0, \quad N(0) = N^0(0).$$

On posera en général $h(v, N) = -v + bN + \nu_{ext}$ avec $b \in \mathbb{R}$, $\nu_{ext} \in \mathbb{R}_+$ et $a(N) = a_0 + a_1 N$ avec $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $a_1 \in \mathbb{R}_+$.

III. RÉSULTATS TECHNIQUES POUR LE MODÈLE ITBFR

1. égalité d'entropie

Théorème 27 (Egalité d'entropie)

Pour toute fonction convexe $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et toute condition initiale (ρ^0, N^0) satisfaisant les hypothèses du théorème ??, s'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\forall v \in (-\infty, V_F], \quad \rho^0(v) \leq C_0 \rho_\infty(v),$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $C(t)$ tel que pour tout $v \in]-\infty, V_F]$, $\rho(v, t) \leq C_0 \rho_\infty(v)$ et la solution forte à décroissance rapide ρ de (??)-(??)-(??) vérifie alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{V_F} \rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) dv &= -a \int_{-\infty}^{V_F} \rho_\infty \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right]^2 G''\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) dv \\ &\quad - N_\infty \left[G\left(\frac{N}{N_\infty}\right) - G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) - \left(\frac{N}{N_\infty} - \frac{\rho}{\rho_\infty}\right) G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right] \Big|_{v=V_F} \\ &\quad + b(N(t-d) - N_\infty) \int_{-\infty}^{V_F} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \left[G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) - \frac{\rho}{\rho_\infty} G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right] dv. \end{aligned}$$

Démonstration : D'après le théorème (CITER THEOREME) et l'article (CITER ARTICLE), pour (sans perte de généralité d'après le théorème CITER THEOREME) $a = 1$, $V_F = 0$ et $t < d$, si on note ici

$$\mathcal{G}(x, \tau, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\tau - \eta)}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4(\tau - \eta)}}$$

le noyau de la chaleur rétrograde, la solution ρ vérifie

$$\begin{aligned} \rho(v, t) &= e^{2t} \int_{-\infty}^0 \mathcal{G}\left(e^t v - \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} e^{-s} \mu(s-d) ds, \frac{1}{2}(e^{2t}-1), \xi, 0\right) \rho^0(e^t \xi) d\xi \\ &\quad - e^t \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} M(\eta) \mathcal{G}\left(e^t v - \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} e^{-s} \mu(s-d) ds, \frac{1}{2}(e^{2t}-1), s(\eta), \eta\right) d\eta \\ &\quad + e^t \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} M(\eta) \mathcal{G}\left(e^t v - \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} e^{-s} \mu(s-d) ds, \frac{1}{2}(e^{2t}-1), s_1(\eta), \eta\right) d\eta, \quad (15) \end{aligned}$$

où M ne dépend que de N^0 tant que $t < d$

D'après les expressions de \mathcal{G} et de ρ_∞ , les deux derniers termes décroissent à l'infini au moins aussi vite que ρ_∞ . Le premier terme vérifie

$$\begin{aligned} &e^{2t} \int_{-\infty}^0 \mathcal{G}\left(e^t v - \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} e^{-s} \mu(s-d) ds, \frac{1}{2}(e^{2t}-1), \xi, 0\right) \rho^0(e^t \xi) d\xi \\ &\leq e^{2t} C_0 \int_{-\infty}^0 \mathcal{G}\left(e^t v - \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} e^{-s} \mu(s-d) ds, \frac{1}{2}(e^{2t}-1), \xi, 0\right) \rho_\infty(e^t \xi) d\xi, \\ &= e^t C_0 \int_{-\infty}^0 \mathcal{G}\left(e^t v - \int_0^{\frac{1}{2}(e^{2t}-1)} e^{-s} \mu(s-d) ds, \frac{1}{2}(e^{2t}-1), e^{-t} \xi, 0\right) \rho_\infty(\xi) d\xi. \quad (16) \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $C(t)$ tel que

$$\forall v \in (-\infty, V_F], \rho(v, t) \leq C(t)\rho_\infty(v).$$

As we said previously, it's then true for all a, V_F, t using changes of variables and successive time intervals of length less than d .

Supposons maintenant, sans perte de généralité, que $b_0 = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{\rho}{\rho_\infty^2} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v}$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = \rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v},$$

et

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = \rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + 2 \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial^2 \rho_\infty}{\partial v^2}.$$

Ces expressions permettent de mener le calcul suivant.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\infty G \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right] &= \frac{\partial \rho}{\partial t} G' \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial v} \left[(v - bN(t-d))p \right] + a \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} + \delta_{V_R} N \right) G' \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \\ &= \left(v \rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + v \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} + p - bN(t-d) \rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) - bN(t-d) \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{V_R} N + a \rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + 2a \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + a \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial^2 \rho_\infty}{\partial v^2} \right) G' \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \\ &= \left(\left(v \rho_\infty + 2a \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + a \rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho}{\rho_\infty} \left[v \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} + \rho_\infty + a \frac{\partial^2 \rho_\infty}{\partial v^2} \right] - bN(t-d) \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \right. \\ &\quad \left. - bN(t-d) \rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + \delta_{V_R} N \right) G' \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right). \end{aligned}$$

Or, par définition de ρ_∞ ,

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_\infty} \left[v \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} + \rho_\infty + a \frac{\partial^2 \rho_\infty}{\partial v^2} \right] - bN(t-d) \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} &= \frac{\rho}{\rho_\infty} \left[bN_\infty \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} - \delta_{V_R} N_\infty \right] - bN(t-d) \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \\ &= b(N_\infty - N(t-d)) \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} - \delta_{V_R} N_\infty \frac{\rho}{\rho_\infty}. \quad (17) \end{aligned}$$

Ce calcul, injecté dans celui qui le précède, donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\infty G \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right] &= \left(\left(v \rho_\infty + 2a \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + a \rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{V_R} N_\infty \left(\frac{N}{N_\infty} - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) + b(N_\infty - N(t-d)) \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} \right. \\ &\quad \left. - bN(t-d) \rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right) G' \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right). \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de $G \circ \frac{\rho}{\rho_\infty}$ par rapport au potentiel sont

$$\frac{\partial}{\partial v} G \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) G' \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right),$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)\right]^2 G''\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right).$$

On peut alors poursuivre le calcul d'intérêt :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right] &= \left(v\rho_\infty + 2a\frac{\partial\rho_\infty}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) + a\rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \\ &\quad - a\rho_\infty \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right]^2 G''\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) + \delta_{V_R} N_\infty \left(\frac{N}{N_\infty} - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \\ &\quad + b(N_\infty - N(t-d)) \frac{\partial\rho_\infty}{\partial v} \frac{\rho}{\rho_\infty} G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) - bN(t-d)\rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right). \end{aligned}$$

On fait apparaître une nouvelle fois l'équation que vérifie p_∞ avec certains des termes du second membre,

$$\begin{aligned} \left(v\rho_\infty + 2a\frac{\partial\rho_\infty}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) + a\rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) &= \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(v\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right) + a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right) - bN_\infty \frac{\partial\rho_\infty}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) & \\ + \left[\frac{\partial}{\partial v} \left((-v + bN_\infty)\rho_\infty \right) - a \frac{\partial^2\rho_\infty}{\partial v^2} \right] G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Avec (18) et l'équation vérifiée par p_∞ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right] &= \frac{\partial}{\partial v} \left(v\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right) + a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right) \\ &\quad + \delta_{V_R} N_\infty \left[\left(\frac{N}{N_\infty} - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) + G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right] \\ &\quad - a\rho_\infty \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right]^2 G''\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) - bN(t-d)\rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \\ &\quad - bN_\infty \frac{\partial\rho_\infty}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) + b(N_\infty - N(t-d)) \frac{\partial\rho_\infty}{\partial v} \frac{\rho}{\rho_\infty} G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right). \end{aligned}$$

Comme $p(V_F, t) = \rho_\infty(V_F) = 0$ et $\frac{\partial\rho_\infty}{\partial v}(V_F) = -aN_\infty \neq 0$, on peut appliquer la règle de l'Hôpital :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{v \rightarrow V_F} \frac{p(v, t)}{\rho_\infty(v)} = \lim_{v \rightarrow V_F} \frac{\frac{\partial p}{\partial v}(v, t)}{\frac{\partial\rho_\infty}{\partial v}(v)} = \frac{N(t)}{N_\infty}$$

On obtient alors, en intégrant entre deux bornes que l'on fait tendre vers $-\infty$ et V_F respectivement,

$$\int_{-\infty}^{V_F} \frac{\partial}{\partial v} \left(v\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right) dv = \left[v\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right]_{-\infty}^{V_F} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{V_F} a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right) dv &= \left[a \frac{\partial}{\partial v} \left(\rho_\infty G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right) \right]_{-\infty}^{V_F} \\ &= \left[a \left(\partial_v \rho - \frac{\rho}{\rho_\infty} \partial_v \rho_\infty \right) G'\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) + a \frac{\partial\rho_\infty}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \right]_{-\infty}^{V_F} \\ &= \left(-N + \frac{N}{N_\infty} N_\infty \right) G'\left(\frac{N}{N_\infty}\right) - N_\infty G\left(\frac{N}{N_\infty}\right) \\ &= -N_\infty G\left(\frac{N}{N_\infty}\right), \end{aligned}$$

où chaque intégrale est finie en raison de l'inégalité $\rho(v, t) \leq C(t)\rho_\infty(v)$.

Enfin, on a par intégration par partie, eu égard aux conditions de Dirichlet :

$$\int_{-\infty}^{V_F} bN(t-d)\rho_\infty \frac{\partial}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) dv = -bN(t-d) \int_{-\infty}^{V_F} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial v} G\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) dv$$

On obtient le résultat en combinant ces intégrales avec les calculs déjà effectués. ■

2. Inégalités de type Poincaré

Dans toute cette section, on suppose $h(v, N) = -v + bN$, $b \in \mathbb{R}$ et $a(N) = a \in \mathbb{R}_+^*$ et on note

$$p_\infty(v) = \frac{N_\infty}{a} e^{-\frac{(v-bN_\infty)^2}{2\sqrt{a}}} \int_{-\infty}^{V_F}$$

un état stationnaire quelconque associé aux paramètres a et b . On trouve dans l'article [23] l'inégalité de type Poincaré abstraite suivante.

Théorème 28

Soit $m, n \in \mathbb{L}^1$ telles que $\|m\|_{\mathbb{L}^1} = 1$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute fonction f dérivable au sens des distributions telle que $m|f|^2 \in \mathbb{L}^1$ et $n|f'|^2 \in \mathbb{L}^1$.

$$\int_0^{+\infty} m(x)|f(x)|^2 dx \leq A \int_0^{+\infty} n(x)|f'(x)|^2 dx.$$

En prenant le cas particulier $fd\text{f}\text{s}\text{f}\text{s}\text{d}\text{f}$, on obtient le résultat suivant pour les solutions de (5) dans le cas non-linéaire :

Théorème 29

Il existe $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute fonction $q \in \mathbb{L}^1([-\infty, V_F])$ telle que $\int_{-\infty}^{V_F} q(v) dv = 0$ et $q \in H^1(p_\infty dv)$, on a

$$\nu \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{q(v)}{p_\infty(v)}\right)^2 dv \leq \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{q(v)}{p_\infty(v)}\right)\right]^2 dv.$$

Remarque 30. On a en particulier, pour toute solution forte (p, N) de (5) linéaire, on obtient, en posant $q = p - p_\infty$,

$$\nu \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left(\frac{p(v, t) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)}\right)^2 dv \leq \int_{-\infty}^{V_F} p_\infty(v) \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{p(v, t) - p_\infty(v)}{p_\infty(v)}\right)\right]^2 dv.$$

Il est possible d'étendre cette inégalité au cas des faibles connectivités. Comme le délai ne change pas les états stationnaires, le résultat est également valable pour (??).

Théorème 31

Soit p_∞ un état stationnaire

3. Propriétés d'une fonction auxiliaire

Dans l'étude du taux de décharge N , nous utilisons les propriétés non-triviales d'une fonction auxiliaire. Tous ce qui suit est issu de [28].

Soit $V_F \in \mathbb{R}$. On définit la fonction γ sur $] - \infty, V_F]$ par

$$\forall v \in] - \infty, V_F], \quad \gamma(v) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\beta - (V_F - v)}} & \alpha < v \\ 0 & \text{si } v \leq \alpha \end{cases}, \quad (19)$$

où $\beta = (V_F - \alpha)^2$ et $\alpha \in] - \infty, V_F[$.

On a le lemme suivant.

Lemme 32. *Soit $V_F \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in] - \infty, V_F[$. Soit γ la fonction définie sur $] - \infty, V_F]$ par la formule (19) Alors, γ est une fonction de classe \mathcal{C}^3 sur $] - \infty, V_F]$, strictement positive et strictement croissante sur $] \alpha, V_F[$, et :*

- on a

$$\lim_{v \rightarrow V_F} \frac{\gamma'(v)}{\gamma(v)} = 0;$$

- il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, sur $] \alpha, V_F[$, on a

$$\gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma'''^2 \leq C\gamma;$$

- il existe une constante $\delta \in] \alpha, V_F[$ telle que $\gamma''(\delta) = 0$ et

$$\forall v \in] \delta, V_F[, \quad \gamma''(v) \leq 0.$$

Démonstration : D'abord, on calcule les dérivées successives

$$\gamma'(v) = \frac{2(V_F - v)}{\beta - (V_F - v)^2} \gamma(v),$$

$$\gamma''(v) = \left(\frac{4(V_F - v)^2}{(\beta - (V_F - v)^2)^4} - \frac{2}{(\beta - (V_F - v)^2)^2} - \frac{8(V_F - v)^2}{(\beta - (V_F - v)^2)^3} \right) \gamma(v),$$

et

$$\gamma'''(v) =,$$

pour tout $v \in] \alpha, V_F[$. Ensuite, de l'expression de γ' on déduit

$$\lim_{v \rightarrow V_F} \frac{\gamma'(v)}{\gamma(v)} = 0. \quad \blacksquare$$

RÉFÉRENCES

- [1]
- [2] L. F. Abbott and C. van Vreeswijk. Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 48(2) :1483–1490, 1993.
- [3] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions i. *Communications on pure and applied mathematics*, XII :623–727, 1959.
- [4] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions i. *Communications on pure and applied mathematics*, XVII :35–92, 1964.
- [5] L Albantakis and G Deco. The encoding of alternatives in multiple-choice decision making. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 106(25) :10308–10313, Jun 2009.
- [6] Akihiro Aotani, Masayasu Mimura, and Thomas Mollee. A model aided understanding of spot pattern formation in chemotactic e. coli colonies. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 27 :5–22, 2010.
- [7] A Arnold, JA Carrillo, L Desvillettes, J Dolbeault, A Jüngel, C Lederman, PA Markowich, G Toscani, and C Villani. *Entropies and equilibria of many-particle systems : an essay on recent research*. Springer, 2004.
- [8] Anton Arnold, Peter Markowich, Giuseppe Toscani, and Andreas Unterreiter. On convex sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for fokker-planck type equations. *Comm. PDE*, 26(1-2) :43–100, 2001.
- [9] Jean-Pierre Aubin. Un théorème de compacité. *Comptes rendus de l’Académie des sciences*, 256 :5042–5044, 1963.
- [10] Mark-F Bear, Barry W. Connors, and Michael A. Paradiso. *Neurosciences : À la découverte du cerveau*. Pradel.
- [11] Piotr Biler. Radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the critical case.
- [12] A. Blanchet, J. Dolbeault, and B. Perthame. Keller-Segel model : optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. *Electron. J. Differential Equations*, 44 :32 (electronic), 2006.
- [13] Adrien Blanchet. A gradient flow approach to the keller segel systems. 2013.
- [14] Adrien Blanchet, José A. Carrillo, and Nader Masmoudi. Infinite time agregation for the critical patlak-keller-segel model in r2.
- [15] R. Brette and W. Gerstner. Adaptive exponential integrate-and-fire model as an effective description of neural activity. *Journal of neurophysiology*, 94 :3637–3642, 2005.
- [16] N Brunel. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking networks. *J. Comp. Neurosci.*, 8 :183–208, 2000.
- [17] N. Brunel and V. Hakim. Fast global oscillations in networks of integrate-and-fire neurons with long firing rates. *Neural Computation*, 11 :1621–1671, 1999.
- [18] E. O. Budrene and H. Berg. Complex patterns formed by motile cells of escherichia coli. *Nature*, 349 :630–633, 1991.
- [19] C. Buet, S. Cordier, and V. Dos Santos. A conservative and entropy scheme for a simplified model of granular media. *Transp. Theory Statist. Phys.*, 33 :125–155, 2004.

-
- [20] M. J. Cáceres, J. A. Carrillo, and B. Perthame. Analysis of nonlinear noisy integrate & fire neuron models : blow-up and steady states. *Journal of Mathematical Neuroscience*, 1-7, 2011.
- [21] M. J. Cáceres, J. A. Carrillo, and L. Tao. A numerical solver for a nonlinear fokker-planck equation representation of neuronal network dynamics. *J. Comp. Phys.*, 230 :1084–1099, 2011.
- [22] M. J. Cáceres and B. Perthame. Beyond blow-up in excitatory integrate and fire neuronal networks : refractory period and spontaneous activity. *Journal of theoretical Biology*, 350 :81–89, 2014.
- [23] Maria J Caceres, José A Carillo, and Benoît Perthame. Analysis of nonlinear noisy integrate and fire neuron models : blow-up and steady states. *Journal of Mathematical Neuroscience*, 1 :7, 2011.
- [24] Maria J Caceres and Benoît Perthame. Beyond blow-up in excitatory integrate and fire neuronal networks : refractory period and spontaneous activity. *Journal of Mathematical Neuroscience*, 350 :81–89, 2014.
- [25] Maria J Caceres and Ricarda Schneider. Analysis and a numerical solver for excitatory-inhibitory nnlf models with delay and refractory periods. *ArXiv :1705.02205v1*, 2017.
- [26] Maria J Caceres and Ricarda Schneider. Blow-up, steady states and long time behaviour of excitatory-inhibitory nonlinear neuron models. *Kinetic and related models*, 10 :587–612, 2017.
- [27] José A Carillo, Maria d. M. Gonzalez, Maria P. Gualdani, and Maria E. Schonbek. Classical solutions for a nonlinear fokker-planck equation arising in computational neuroscience. *Comm. in Partial Differential Equations*, 38 :97–127, 2013.
- [28] José A Carillo, Benoît Perthame, Delphine Salort, and Didier Smets. Qualitative properties of solutions for the noisy integrate and fire model in computational neuroscience. *Nonlinearity*, 28 :3365–3388, 2015.
- [29] J. A. Carrillo, M. d. M. González, M. P. Gualdani, and M. E. Schonbek. Classical solutions for a nonlinear fokker-planck equation arising in computational neuroscience. *Comm. in Partial Differential Equations*, 38(3) :385–409, 2013.
- [30] José Carrillo, Benoît Perthame, Delphine Salort, and Didier Smets. Qualitative properties of solutions for the noisy integrate & fire model in computational neuroscience. *Nonlinearity*, 25 :3365–3388, 2015.
- [31] José A Carrillo and Giuseppe Toscani. Asymptotic L^1 -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 113–142, 2000.
- [32] Rafal Celinski, Danielle Hilhorst, Grzegorz Karch, and Masayasu Mimura. Mathematical analysis of a pde model describing chemotactic e. coli colonies. *preprint*.
- [33] Xiuging Chen, Ansgar Jüngel, and Jian-Guo Liu. A note on aubin-lions-dubinskii lemmas. *arXiv :1305.6235v1*, 2013.
- [34] Julien Chevallier. Mean-field limit of generalized hawkes processes. *arXiv preprint arXiv :1510.05620*, 2015.
- [35] Julien Chevallier, María José Cáceres, Marie Doumic, and Patricia Reynaud-Bouret. Microscopic approach of a time elapsed neural model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25(14) :2669–2719, 2015.

- [36] A. Compte, N. Brunel, P. S. Goldman-Rakic, and X.-J. Wang. Synaptic mechanisms and network dynamics underlying spatial working memory in a cortical network model. *Cerebral Cortex* 10, 10 :910–923, 2000.
- [37] John Condeelis, Joan Jones, and Jeffrey E. Segall. Chemotaxis of metastatic tumor cells : Clues to mechanisms from the dictyostelium paradigm. *Cancer and Metastasis Reviews*, 11 :55–68, 1992.
- [38] L. Corrias, B. Perthame, and H. Zaag. Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions. *Milan J. Math.*, 72 :1–28, 2004.
- [39] Stanislas Dehaene and Lionel Naccache. Towards a cognitive neuroscience of consciousness : basic evidence and a workspace framework. *Cognition*, 79 :1–37, 2001.
- [40] François Delarue, James Inglis, Sylvain Rubenthaler, and Etienne Tanré. Particle systems with a singular mean-field self-excitation. Application to neuronal networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 125(6) :2451–2492, 2015.
- [41] François Delarue, James Inglis, Sylvain Rubenthaler, Etienne Tanré, et al. Global solvability of a networked integrate-and-fire model of mckean–vlasov type. *The Annals of Applied Probability*, 25(4) :2096–2133, 2015.
- [42] François Delarue, James Inglis, Sylvain Rubenthaler, and Etienne Tanré. Particle systems with a singular mean-field self-excitation. application to neuronal network. *Stochastic Processes and their Applications*, Elsevier, 125 :2451–2492, 2015.
- [43] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP science.
- [44] G. Dumont and J. Henry. Population density models of integrate-and-fire neurons with jumps : well-posedness. *J. Math. Biol.*, 2012.
- [45] G. Dumont and J. Henry. Synchronization of an excitatory integrate-and-fire neural network. *Bull. Math. Biol.*, 75(4) :629–648, 2013.
- [46] Grégory Dumont, Jacques Henry, and Carmen Oana Tarniceriu. Noisy threshold in neuronal models : connections with the noisy leaky integrate-and-fire model. *arXiv preprint arXiv :1512.03785*, 2015.
- [47] Ibrahim Fatkullin. A study of blow-ups in the keller-segel model of chemotaxis. *Nonlinearity*, 26 :81–94, 2013.
- [48] Francis Filbet. *Analyse numérique*. Dunod.
- [49] John H. Freeman. Cerebella learning mechanisms. *Elsevier*, 2014.
- [50] W. Gerstner and W. Kistler. *Spiking neuron models*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [51] M. d. M. González and M. P. Gualdani. Asymptotics for a symmetric equation in price formation. *App. Math. Optim.*, 59 :233–246, 2009.
- [52] Xavier Gourdon. *Analyse*. Ellipses.
- [53] C. M. Gray and W. Singer. Stimulus-specific neuronal oscillations in orientation columns of cat visual cortex. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 86(5) :1698–1702, 1989.
- [54] T. Guillamon. An introduction to the mathematics of neural activity. *Butl. Soc. Catalana Mat.*, 19 :25–45, 2004.
- [55] Miguel A. Herrero, E. Medina, and Juan J.L. Velasquez. Finite-time aggregation into a single point in a reaction-diffusion system. *Nonlinearity*, 10 :1739–1754, 1997.
- [56] Miguel A. Herrero and Juan J.L. Velasquez. Chemotactic collapse for the keller-segel model. *J. of Mathematical biology*, 35 :177–194, 1996.

-
- [57] Miguel A. Herrero and Juan J.L. Velasquez. Singularity patterns in a chemotaxis model. *Mathematische Annalen*, 306 :583–623, 1996.
- [58] Miguel A. Herrero and Juan J.L. Velasquez. A blow-up mechanism for a chemotaxis model. *Annali della scuola normale superiore di Pisa*, 24 :633–683, 1997.
- [59] Dirk Horstmann. From 1970 until present : the keller-segel model in chemotaxis and its consequences. *Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften Leipzig*, 2003.
- [60] W. Jäger and S. Luckhaus. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modeling chemotaxis. *Transactions of the american mathematical society*, 329, 1992.
- [61] Kyungkeun Kang and Angela Stevens. Blowup and global solutions in a chemotaxis-growth system. *Elsevier, Nonlinear Analysis*, 135 :57–72, 2016.
- [62] Evelyn F. Keller and Lee A. Segel. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of Theoretical Biology*, 26 :399 – 415, 1970.
- [63] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP science.
- [64] L. Lapique. Recherches quantitatives sur l’excitation électrique des nerfs traitée comme une polarisation. *J. Physiol. Pathol. Gen*, 9 :620–635, 1907.
- [65] M. Ledoux. The concentration of measure phenomenon. In *AMS math. surveys and monographs*, volume 89. AMS, 2001.
- [66] Herbert Levine and Wouter-Jan Rappel. The physics of eukaryotic chemotaxis. *Physics Today*, 2013.
- [67] Daniel Li. *Cours d’analyse fonctionnelle*. Ellipses.
- [68] Peter A Markowich and Cédric Villani. On the trend to equilibrium for the fokker-planck equation : an interplay between physics and functional analysis. *Mat. Contemp*, 19 :1–29, 2000.
- [69] Hiroshi Matano. Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations. *Publ. RIMS, Kyoto university*, 15 :401–454, 1979.
- [70] M. Mattia and P. Del Giudice. Population dynamics of interacting spiking neurons. *Phys. Rev. E*, 66 :051917, 2002.
- [71] P. Michel, S. Mischler, and B. Perthame. General relative entropy inequality : an illustration on growth models. *J.Math.Pures Appl.*, 84 :1235–1260, 2005.
- [72] Philippe Michel, Stéphane Mischler, and Benoît Perthame. Analysis of nonlinear noisy integrate and fire neuron models : blow-up and steady states. *Journal de mathématiques pures et appliquées, Elsevier*, 84-9 :1235–1260, 2005.
- [73] Stéphane Mischler and Qilong Weng. Relaxation in time elapsed neuron network models in the weak connectivity regime. *ACAP*, pages 1–30, 2018.
- [74] Nikhil Mittal, Elena O. Budrene, Michael P. Brenner, and Alexander van Oudenaarden. Motility of escherichia coli cells in clusters formed by chemotactic aggregation. *Biophysics*, 2003.
- [75] Noriko Mizoguchi. Type ii blowup in a doubly parabolic keller-segel system in two dimension. *Elsevier, Journal of functional analysis*, 271 :3323–3347, 2016.
- [76] Noriko Mizoguchi and Philippe Souplet. Nondegeneracy of blow-up points for the parabolic keller-segel system. *Elsevier, Annales de l’institut Henry Poincaré*, 31 :851–875, 2014.
- [77] R. Moreno-Bote, J. Rinzel, and N. Rubin. Noise-induced alternations in an attractor network model of perceptual bistability. *J. Neurophysiol.*, 98 :1125–1139, 2007.

- [78] Toshitaka Nagai. Blowup of radially symmetric solutions to a chemotaxis system. *Adv Math Sci Appl*, 5 :581–601, 1995.
- [79] Toshitaka Nagai. Blowup of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two dimensional domains. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 6 :37–55, 2001.
- [80] K. Newhall, G. Kovačič, P. Kramer, A. V. Rangan, and D. Cai. Cascade-induced synchrony in stochastically driven neuronal networks. *Phys. Rev. E*, 82 :041903, 2010.
- [81] K. Newhall, G. Kovačič, P. Kramer, D. Zhou, A. V. Rangan, and D. Cai. Dynamics of current-based, poisson driven, integrate-and-fire neuronal networks. *Comm. in Math. Sci.*, 8 :541–600, 2010.
- [82] A Omurtag, Knight B. W., and L. Sirovich. On the simulation of large populations of neurons. *J. Comp. Neurosci.*, 8 :51–63, 2000.
- [83] K. Pakdaman, B. Perthame, and D. Salort. Dynamics of a structured neuron population. *Nonlinearity*, 23 :55–75, 2010.
- [84] K. Pakdaman, M. Thieullen, and G. Wainrib. Fluid limit theorems for stochastic hybrid systems with application to neuron models. *Adv. in Appl. Probab.*, 42(3) :761–794, 2010.
- [85] Khashayar Pakdaman, Benoît Perthame, and Delphine Salort. Relaxation and self-sustained oscillations in the time elapsed neuron network model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(3) :1260–1279, 2013.
- [86] Khashayar Pakdaman, Benoît Perthame, and Delphine Salort. Adaptation and fatigue model for neuron networks and large time asymptotics in a nonlinear fragmentation equation. *The Journal of Mathematical Neuroscience (JMN)*, 4(1) :1–26, 2014.
- [87] B. Perthame. *Transport equations in biology*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [88] Benoît Perthame and Delphine Salort. On a voltage-conductance kinetic system for integrate & fire neural networks. *Kinet. Relat. Models*, 6(4) :841–864, 2013.
- [89] Benoît Perthame and Delphine Salort. On a voltage-conductance kinetic system for integrate and fire neural networks. *Kinetic and related models, AIMS*, 6(4) :841–864, 2013.
- [90] J. Pham, K. Pakdaman, Champagnat J., and J.-F. Vivert. Activity in sparsely connected excitatory neural networks : effect of connectivity. *Neural Networks*, 11 :415–434, 1998.
- [91] A. V. Rangan, G. Kovačič, and D. Cai. Kinetic theory for neuronal networks with fast and slow excitatory conductances driven by the same spike train. *Physical Review E*, 77(041915) :1–13, 2008.
- [92] Pierre Raphaël and Rémi Schweyer. On the stability of critical chemotactic aggregation. *arXiv :1209.2517v1*, 2012.
- [93] A. Renart, N. Brunel, and X.-J. Wang. Mean-field theory of irregularly spiking neuronal populations and working memory in recurrent cortical networks. In Jianfeng Feng, editor, *Computational Neuroscience : A comprehensive approach*. Chapman & Hall/CRC Mathematical Biology and Medicine Series, 2004.
- [94] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation : Methods of solution and approximations*. 2nd. edn. Springer Series in Synergetics, vol 18. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [95] C. Rossant, D. F. M. Goodman, B. Fontaine, J. Platkiewicz, A. K. Magnusson, and R. Brette. Fitting neuron models to spike trains. *Frontiers in Neuroscience*, 5(9) :1–8, 2011.
- [96] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l’usage de la licence et de l’agrégation*. Cassini.

-
- [97] Rémi Schweyer. Stable blow-up dynamic for the parabolic-parabolic patlak-keller-segel model. *arXiv :1403.4975v1*, 2014.
- [98] Oliver G. Selfridge. Pandemonium : a paradigm for learning. *National physical laboratory - Symposium No 10*, 1, 1958.
- [99] Rafael Serrano. An alternative proof of the aubin-lions lemma. *Arch. Math.*, 101 :253–257, 2013.
- [100] C.-W. Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In A. Quarteroni, editor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, B. Cockburn, C. Johnson, C.-W. Shu and E. Tadmor, volume 1697, pages 325–432. Springer, 1998.
- [101] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0, t; b)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146 :65–96, 1987.
- [102] L. Sirovich, A Omurtag, and Lubliner K. Dynamics of neural populations : Stability and synchrony. *Network : Computation in Neural Systems*, 17 :3–29, 2006.
- [103] Hendrik Szurmant and George W. Ordal. Diversity in chemotaxis mechanisms among the bacteria and archaea. *Microbiology and molecular biology reviews*, 68, 2004.
- [104] J. Ignacio Tello and Michael Winkler. A chemotaxis system with logistic source. *Communication in partial differential equations*, 32 :849–877, 2007.
- [105] J. Touboul. Importance of the cutoff value in the quadratic adaptive integrate-and-fire model. *Neural Computation*, 21 :2114–2122, 2009.
- [106] Jonathan Touboul. Bifurcation analysis of a general class of nonlinear integrate-and-fire neurons. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(4) :1045–1079, 2008.
- [107] H.C. Tuckwell. *Introduction to Theoretical Neurobiology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [108] C Villani. Entropy production and convergence to equilibrium. In *Entropy methods for the Boltzmann equation*, pages 1–70. Springer, 2008.
- [109] Cédric Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, 1 :71–305, 2002.
- [110] Atsuchi Yagi. *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer.
- [111] Claude Zuily. *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Dunod.