Explique-moi... Les systèmes intégrables

Louise Gassot

Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, CNRS, PSL University, 75005 Paris, France
Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France

9 novembre 2020

Présentation

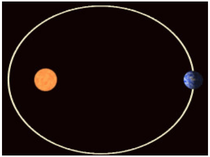
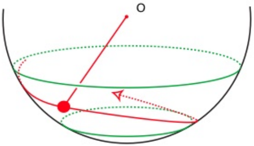
- Thèse intitulée «Comportement en temps long de solutions d'EDP non linéaires : stabilité orbitale des ondes progressives, dispersion, **intégrabilité**, amortissement »

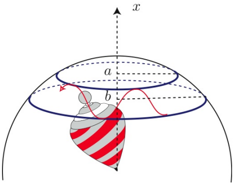
Source: *Heriot-Watt University, 1995*

- Équipe Analyse Numérique et EDP du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay
- Directeur de thèse : Patrick Gérard
- Questions :
  - Existence et unicité de solutions étant donnée une condition initiale
  - Temps d'existence de la solution, apparition de singularités ou développement asymptotique lorsque $t \to +\infty$
  - Solutions particulières : ondes progressives $u(t,x) = u_0(x - ct)$ de vitesse c, propriétés de stabilité

Systèmes intégrables : idée

- Équations différentielles linéaires $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$: connu
- Équations différentielles non linéaires $x' = x^2 \sin(x)$: difficile
- Compromis : les systèmes intégrables sont des EDO non linéaires qui se ramènent à des EDO linéaires par changement de coordonnées



Sources : *https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=73336759, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3416065, http://images.math.cnrs.fr/Toupie.html*

- Référence : Michèle Audin, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*

Cadre : systèmes hamiltoniens

William Rowan Hamilton, 1833
Reformulation de la mécanique newtonienne

Définition (Système hamiltonien)

Système à N degrés de liberté
Espace des phases $(q, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

- *Positions* $q = (q_1, \ldots, q_N)$
- *Quantités de mouvement* $p = (p_1, \ldots, p_N)$

Énergie/Hamiltonien $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *(conservé au cours du temps)*
Évolution de $(p(t), q(t))$ *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \tag{$*_H$}$$

Exemple (Système de N particules)

N particules de masse m sur un axe, de positions $q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{R}$
La particule j est soumise à une force $F_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}(q)$ qui dérive d'un potentiel V

$$H = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{V(q_1, \ldots, q_N)}_{\text{énergie potentielle}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad \textit{devient} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p_j}{m} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_j} = F_j \end{cases}$$

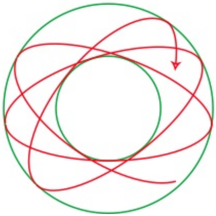
$$m\frac{\mathrm{d}^2 q_j}{\mathrm{d}t} = F_j \quad 2^{\text{ème}} \textit{ loi de Newton}$$

Exemple (Système complètement intégrable)

$$H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N) = h(p_1, \ldots, p_N)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad \textit{devient} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial h}{\partial p_j} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_j(t) = p_j(0) \\ q_j(t) = q_j(0) + t\dfrac{\partial h}{\partial p_j}(p(0)) \end{cases}$$



Source : *http://images.math.cnrs.fr/Toupie.html*

Lois de conservation

On considère deux hamiltoniens H, $I : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$, et (p, q) solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \tag{$*_H$}$$

$$\{I, H\} = \sum_{j=1}^{N} -\frac{\partial I}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial I}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{(crochet de Poisson)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(q(t), p(t)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial I}{\partial p_j}\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial I}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \{I, H\}(q(t), p(t))$$

Définition (Loi de conservation)

I est une **loi de conservation** *(pour toutes les trajectoires de $(*_H)$) si* $\{I, H\} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \{H, H\} = 0 \quad \text{(conservation de l'énergie)}$$

Intégrabilité au sens de Arnold (1989)-Liouville (1855)

Définition

Le système $(*_H)$ *est* **Arnold-Liouville intégrable** *s'il existe* $H_1 = H, H_2, \ldots, H_N : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ *dont les différentielles* $\mathrm{d}H_1, \ldots, \mathrm{d}H_N$ *sont linéairement indépendantes en tout point et tels que pour tous* i *et* j, $\{H_i, H_j\} = 0$.

Théorème (Théorème de Arnold-Liouville)

Soit $h = (h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{R}^N$. *Si* $T(h) := H_1^{-1}(\{h_1\}) \cap \cdots \cap H_N^{-1}(\{h_N\})$ *est compact, connexe, non vide, alors il existe un voisinage* V *de* $T(h)$, *un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^N$ *et un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme*

$$\Phi : (q, p) \in V \subset \mathbb{R}^{2N} \mapsto (r, \theta) \in U \times \mathbb{T}^N$$

tel que pour tout $(q, p) \in V$,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad \textit{devient} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_j}{\mathrm{d}t} = \{r_j, H\} = 0 \quad \textit{(actions)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t} = \{\theta_j, H\} = \Omega_j(r) \quad \textit{(angles)} \end{cases}$$

Exemple (Mouvement à force centrale)

$N = 2$, *particule de masse* m *dans* $\mathbb{R}^2$

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + V(\|q\|)$$

Kepler : $V(\|q\|) = \frac{1}{\|q\|}$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad \textit{devient} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p_i}{m} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = V'(\|q\|)\dfrac{q_i}{\|q\|} \end{cases}$$

$$M = q \wedge p = q_1 p_2 - q_2 p_1 \quad \textit{(moment)}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \wedge p + q \wedge \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m} \wedge p - q \wedge V'(\|q\|)\frac{q}{\|q\|} = 0$$

Vers la dimension infinie

Généralisation : remplacer l'espace des phases $\mathbb{R}^{2N}$ par une variété symplectique de dimension finie, voire par $L^2(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{T}^d)$, $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ où M est une variété compacte sans bord, un espace de Sobolev, etc.

Exemple (Quelques EDP intégrables célèbres)

- *Équation de Schrödinger cubique défocalisante (1964), propagation d'ondes variant lentement dans des milieux dispersifs (vagues, plasma, fibres optiques, guides d'ondes, etc.)*

$$i\partial_t u + \partial_{xx} u = |u|^2 u \tag{NLS}$$

- *Équation de Korteveg-de Vries (1895), propagation de grandes ondes de surface dans un canal étroit de faible profondeur*

$$\partial_t u = -\partial_{xxx} u + 6u\partial_x u \tag{KdV}$$

- *Équation de Benjamin-Ono (1967), propagation d'un certain régime d'ondes internes longues en grande profondeur*

$$\partial_t u = \partial_x(|\partial_x| u - u^2) \tag{BO}$$

Équation de Korteveg-de Vries (1895)

$$\partial_t u = -\partial_{xxx} u + 6u\partial_x u \tag{KdV}$$

Théorème (Bättig, Bloch, Guillot, Kappeler 1995 -> Kappeler, Makarov, 2001)

Il existe un difféomorphisme bijectif, bi-analytique réel, symplectique

$$\Phi : u \in L^2_0(\mathbb{T}) \mapsto (\zeta_n(u))_{n\geq 1} \in h^{\frac{1}{2}} = \{(\zeta_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n n|\zeta_n|^2 < +\infty\}$$

pour lequel les variables action-angle sont $r_n = \frac{|\zeta_n|^2}{2}$ *et* $\theta_n = \arctan(\frac{\mathrm{Im}(\zeta_n)}{\mathrm{Re}(\zeta_n)})$.

Dans ces coordonnées, le Hamiltonien $H = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2}(\partial_x u(x))^2 + u(x)^3 \,\mathrm{d}x$ ne dépend que des actions $r = (r_n)_{n\geq 1}$, et l'équation devient

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_n}{\mathrm{d}t} = -i\omega_n(r)\zeta_n \quad \text{avec} \quad \omega_n(r) = \frac{\partial H}{\partial r_n}(r)$$

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0)e^{-i\omega_n(r(0))t}$$

Corollaire

Les trajectoires sont presque-périodiques : l'ensemble

$$\{u_\tau : (t,x) \mapsto u(t+\tau,x)\}$$

est relativement compact dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, L^2_0(\mathbb{T}))$.

Corollaire

Les trajectoires sont récurrentes : pour tout $u(0)$, *il existe une suite* $t_k \to +\infty$ *telle que* $u(t_k)$ *converge vers* $u(0)$ *dans* $L^2_0(\mathbb{T})$.

On cherche :

- Des coordonnées action-angle généralisées (meilleur des cas)
- Un nombre infini de lois de conservations (à défaut)
- Une paire de Lax (intermédiaire) : un objet qui permet de générer des lois de conservation