

Explique-moi... la topologie algébrique (ou certains de ses aspects)

0 Une motivation...

On se propose dans cet exposé de démontrer le

Théorème 21 (Invariance de la dimension). Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soient $U \subset \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts non vides. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$. Alors $m = n$.

Contrairement aux apparences, ce théorème est loin d'être trivial et il serait vain d'essayer de le démontrer sans théorie homologique...

Dans certains cas particuliers, on peut obtenir le même résultat rapidement. Par exemple, si tous les espaces en jeu sont lisses, on considère l'application tangente de l'homéomorphisme φ et on se ramène alors à un problème d'algèbre linéaire (l'unicité du cardinal d'une base). En certaines dimensions, notamment lorsque $m = 1$ et $n > 1$, ou $m = 2$ et $n > 2$ on traite ce théorème par connexité (on retire dans le premier cas un point à \mathbb{R}^m et dans le second cas, une droite). Travailler avec une théorie de l'homologie permet de rendre systématiques ces raisonnements par connexité.

1 Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

Faire de la topologie algébrique, c'est essayer de résoudre des problèmes de topologie en utilisant des outils algébriques. Mais comment transposer le langage de la topologie vers le langage de l'algèbre ? On trouve la réponse à cette question au sein de la théorie des catégories.

On observe des points communs entre la théorie des groupes, la théorie des anneaux, celle des corps. Dans tous les cas, on parle de morphismes. Quel est le lien entre les différents types de morphismes ? Tous préservent la structure étudiée - autrement dit, ils sont compatibles avec les opérations qui fournissent cette structure. On retrouve aussi cette caractéristique avec les applications linéaires entre espaces vectoriels ou encore avec les applications continues entre espaces topologiques. La définition de catégorie capture tous ces types de structure.

Définition 1. Une catégorie \mathcal{C} est la donnée

1. d'une collection d'*objets*, désignée par $\text{ob}(\mathcal{C})$;
2. pour tout couple (X, Y) d'objets, d'un ensemble de *morphismes* (ou *flèches*), désigné par $\mathcal{C}(X, Y)$, de sorte que si $X ; X' ; Y$ et Y' sont des objets de \mathcal{C} , alors

$$\mathcal{C}(X, Y) \cap \mathcal{C}(X', Y') \neq \emptyset \Rightarrow (X, Y) = (X', Y') ;^1$$

3. pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets, d'une fonction de composition

$$\begin{cases} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ (f, g) \mapsto g \circ f \end{cases}$$

1. Cela signifie que deux morphismes ne peuvent être égaux que s'ils ont la même source et le même but.

telle que si f , g et h sont des morphismes, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dès lors que cette égalité a du sens et qu'il existe, pour tout objet X , un morphisme $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ tel que pour tout morphisme f de source X et tout morphisme g de but X , on ait $f \circ \text{id}_X = f$ et $\text{id}_X \circ g = g$.

Exemple 2. Les morphismes de la catégorie des ensembles sont les applications. Les morphismes de la catégorie des groupes sont les morphismes de groupes. Les morphismes de la catégorie des espaces topologiques sont les applications continues.

Au sein d'une catégorie, les morphismes permettent de comparer les objets. Mais comment comparer les catégories entre elles ?

Définition 3. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un *foncteur (covariant)* F de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est la donnée

1. pour tout objet X de \mathcal{C} , d'un objet $F(X)$ de \mathcal{D} ;
2. pour tous objets X et Y de \mathcal{C} , d'une application $\begin{cases} \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \\ f \mapsto F(f) \end{cases}$ telle que :
 - (a) si f et g sont deux morphismes composables de \mathcal{C} , alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
 - (b) pour tout objet X de \mathcal{C} , $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.

Remarque 4. Les morphismes de la catégorie des catégories sont les foncteurs covariants.

Faire de la topologie algébrique, c'est donc construire des foncteurs de la catégorie des espaces topologiques vers des catégories algébriques.

Remarque 5. La notion de transformation naturelle permet de comparer des foncteurs de source et but communs. Une transformation naturelle α entre deux foncteurs F et G fait commuter tous les diagrammes de ce type :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array}$$

Deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} étant fixées, les morphismes de la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} sont les transformations naturelles.

2 Un peu d'homotop(resp. log)ie

À partir de maintenant, nous allons faire de la topologie. Un espace topologique est un espace dans lequel la notion de fonction continue a un sens. De ce point de vue, c'est une généralisation de la notion d'espace métrique. Dans toute cette partie, les lettres X et Y désigneront des espaces topologiques, non vides lorsque cela est nécessaire². La lettre n désignera quant à elle un entier naturel, strictement positif si besoin est³.

2.1 Applications homotopes

Définition 6. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont *homotopes* lorsqu'il existe une application continue (qualifiée d'*homotopie entre f et g*) $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(\cdot, 0) = f$ et $h(\cdot, 1) = g$.

2. *sic!*

3. *re-sic!!*

Dire que deux applications sont homotopes, c'est donc dire que l'on peut déformer continûment l'une sur l'autre, ou encore qu'il existe dans l'espace des applications continues un chemin continu (pour la topologie compacte-ouverte⁴) de l'une vers l'autre.

Proposition 7. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

Démonstration. Soient $f; f'$ et f'' trois applications continues définies sur X et à valeurs dans Y .

1. *Réflexivité* : L'homotopie cherchée entre f et f est définie par

$$h : \begin{cases} X \times [0, 1] \rightarrow Y \\ (x, t) \mapsto f(x). \end{cases}$$

2. *Symétrie* : On suppose que f et f' sont homotopes et on considère une homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f et f' . L'homotopie cherchée entre f' et f est définie par

$$h' : \begin{cases} X \times [0, 1] \rightarrow Y \\ (x, t) \mapsto h(x, 1 - t). \end{cases}$$

3. *Transitivité* : On suppose que f et f' sont homotopes et on considère une homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f et f' . On suppose que f' et f'' sont homotopes et on considère une homotopie $h' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f' et f'' . L'homotopie cherchée entre f et f'' est définie par

$$h'' : \begin{cases} X \times [0, 1] \rightarrow Y \\ (x, t) \mapsto \begin{cases} h(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ h'(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$

□

La théorie de l'homotopie classique consiste en l'étude des classes d'équivalence de cette relation. Le développement de la théorie des catégories a permis de mettre au jour dans les années 70 la notion de *catégorie de modèle*, qui définit les catégories dans lesquelles on peut établir des théories homotopiques. Cela fournit un cadre généralisateur de cette théorie.

2.2 Homologie singulière

Définition 8. Le⁵ *n-simplexe standard* Δ_n est l'enveloppe convexe de $n+1$ points en configuration générale dans un espace de dimension infinie : c'est une généralisation du triangle en dimension 2 et du tétraèdre en dimension 3.

Définition 9. On note $C_n(X)$ le groupe abélien libre de base l'ensemble des applications continues $\Delta_n \rightarrow X$. Cela signifie que les éléments de $C_n(X)$ sont ceux du type $\sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \sigma$, où $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ est une application continue et ν_{σ} un entier relatif.

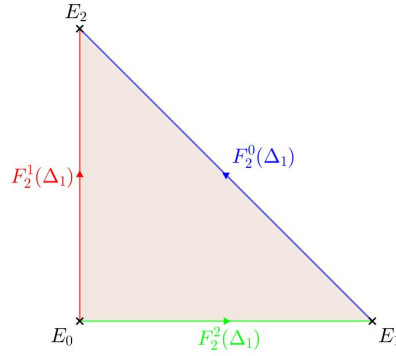
Définition 10. On note $(E_i)_{i=0}^n$ l'ensemble des sommets de Δ_n . on note, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $F_n^i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ l'application affine telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$F_n^i(E_k) = \begin{cases} E_k & \text{si } k < i ; \\ E_{k+1} & \text{si } k \geq i. \end{cases}$$

Cette application est appelée *i-ème application face de Δ_n* .

4. Si X et Y sont deux espaces topologiques, on munit l'espace $\mathcal{C}^0(X, Y)$ des applications continues de X dans Y d'une topologie (dite *compacte-ouverte*), engendrée par l'ensemble des $\mathcal{V}(K, U)$, où lorsque $K \subset X$ est compact et $U \subset Y$ est ouvert, $\mathcal{V}(K, U)$ désigne l'ensemble des applications $f \in \mathcal{C}^0(X, Y)$ telles que $f(K) \subset U$.

5. Certes, cela définit le *n-simplexe standard* à homéomorphisme près. Il existe une définition formelle qui permet d'éviter cet écueil, mais elle serait inutile ici. Et puis, nous faisons de la topologie et la différence entre un mug et un donut est donc ténue...



Définition 11. Soit $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ une application continue. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La i -ème face de σ est l'application continue $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_n^i$.

Il faut imaginer la i -ème face de σ comme une restriction de σ sur une des faces (au sens géométrique!) de Δ_n . On construit alors le *bord* de σ en suivant les faces de σ de sorte que celles-ci "s'enchaînent" correctement.

Définition 12. Soit $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ une application continue. Le *bord* de σ est

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

On l'étend par linéarité à un morphisme de groupes abéliens :

$$\partial_n : \begin{cases} C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X) \\ \sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \sigma \mapsto \sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \partial(\sigma) \end{cases}$$

Théorème 13. L'application $\partial_n \circ \partial_{n+1} = C_{n+1}(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ est l'application nulle.

Pour visualiser ce qu'il se passe, écrivons la preuve en dimension 2. Soit $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ une application continue.

On a

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2(\sigma)) &= \partial_1(\sigma(E_1E_2) - \sigma(E_0E_2) + \sigma(E_0E_1)) \\ &= \partial_1(\sigma(E_1E_2)) - \partial_1(\sigma(E_0E_2)) + \partial_1(\sigma(E_0E_1)) \\ &= (E_2 - E_1) - (E_2 - E_0) + (E_1 - E_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Définition 14. On pose $Z_0(X) = C_0(X)$ et pour tout entier $m \geq 1$, $Z_m(X) = \ker(\partial_m)$ et $B_m(X) = \partial_{m+1}(C_{m+1}(X))$.

Le théorème précédent nous fournit alors la

Proposition 15. On a $B_n(X) \subset Z_n(X)$.

Définition 16. On pose $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$. C'est le n -ième groupe d'homologie singulière de X . On pose enfin

$$H_{\bullet}(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(X).$$

On a transporté la structure d'espace topologique vers une structure de groupe abélien (enfin, une collection de groupes abéliens). On voit vaguement apparaître un foncteur. Pour cela, il reste à comprendre en quoi les applications continues entre espaces topologiques donnent lieu à des morphismes de groupes abéliens.

Proposition - Définition 17. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors f induit un morphisme de groupes abéliens

$$f_* : \begin{cases} C_n(X) \rightarrow C_n(Y) \\ \sum_{\sigma} \nu_{\sigma} \sigma \mapsto \sum_{\sigma} \nu_{\sigma} (f \circ \sigma). \end{cases}$$

Remarque 18. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, alors $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ et $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_{\bullet}(X)}$, donc $H_* : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{A}b$ est bien un foncteur.

Un exemple, crucial par la suite :

Exemple 19. On a $H_0(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ et $H_i(\mathbb{S}^n) \cong 0$ si $\delta_{i,0} + \delta_{i,n} = 0$.

Démonstration. (dans le cas où $n = 2$)⁶ On note N et S les pôles respectivement Sud et Nord de \mathbb{S}^2 . On considère les ouverts $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, dont la réunion recouvre \mathbb{S}^2 .

Il se trouve que dans cette situation, un théorème affirme l'existence d'une suite exacte longue, dite de *Mayer-Vietoris* :

$$H_2(U) \oplus H_2(V) \rightarrow H_2(U \cup V) \rightarrow H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(U \cup V) \rightarrow H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(U \cup V) \rightarrow 0$$

Pour tout $i \geq 3$, on trouve $0 \rightarrow H_i(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$, donc $H_i(\mathbb{S}^2) \cong 0$. En effet, U et V sont contractiles⁷ et ont donc l'homologie du point⁸, tandis que $U \cap V$ se rétracte sur l'équateur de \mathbb{S}^2 , homéomorphe à \mathbb{S}^1 .

En degrés inférieurs, on obtient de même

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow H_1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_0(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$$

Comme la sphère est connexe, on a $H_0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$, donc la flèche $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ est non nulle, donc injective. Par exactitude, la flèche $H_1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$ est nulle, donc on a une suite exacte $0 \rightarrow H_1(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$, d'où $H_1(\mathbb{S}^2) \cong 0$. Enfin, comme on a une suite exacte $0 \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$, on obtient $H_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$.

□

2.3 Un des axiomes d'Eilenberg-Steenrod

Les axiomes d'Eilenberg-Steenrod définissent axiomatiquement ce qu'est une théorie de l'homologie. Il en existe de multiples, qui sont plus ou moins appropriées en fonction du type d'espace que l'on étudie (pour les variétés, c'est la cohomologie de de Rham ; pour les complexes simpliciaux, c'est l'homologie simpliciale, etc.).

En gros, une théorie de l'homologie mesure toujours l'obstruction d'un cycle⁹ à être un bord¹⁰ ; tout dépend alors de comment sont définis ceux-ci...

6. On donne d'ailleurs plutôt une ébauche de démonstration, car le temps ne nous permet pas de parler de suite exactes, ni de rétraction d'un espace sur un autre et encore moins de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris... La démonstration complète se fait par récurrence et suppose donc d'avoir démontré le résultat pour \mathbb{S}^1 .

7. Un espace topologique X est dit contractile lorsque son application identité est homotope à une application constante.

8. Dont on admet qu'elle n'est pas compliquée...

9. Un n -cycle est un élément de Z_n .

10. Un n -bord est un élément de B_n .

Théorème 20. Soient deux applications continues et homotopes $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$. On a alors $f_* = g_*$.

3 De la géométrie ?

Nous avons à présent tous les outils qu'il faut pour démontrer le

Théorème 21 (Invariance de la dimension). Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soient $U \subset \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts non vides. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$. Alors $m = n$.

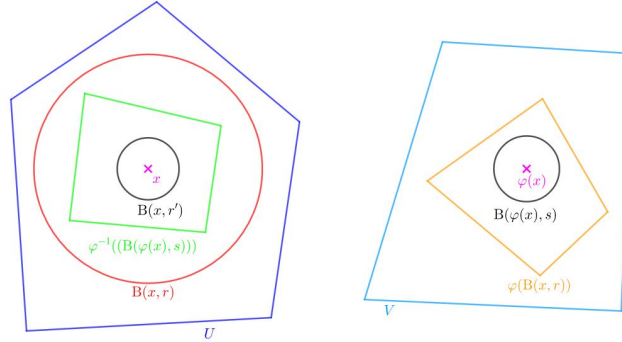
Démonstration. Si $\{m ; n\} \cap \{0\} \neq \emptyset$, alors la démonstration est triviale : en effet, il n'y a qu'un seul ouvert non vide dans \mathbb{R}^0 et il s'agit de \mathbb{R}^0 tout entier, qui est un singleton. Or, un point n'est jamais un ouvert de \mathbb{R}^q dès lors que $q > 0$.

On suppose alors que $m > 0$ et que $n > 0$. Considérons un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$. Montrons que $n = m$.

Soit $x \in U$. Comme U est un ouvert de \mathbb{R}^m , il existe un réel $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Considérons un tel r .

Comme $\varphi(B(x, r))$ est un ouvert de \mathbb{R}^n en tant qu'ouvert de V , il existe un réel $s > 0$ tel que $B(\varphi(x), s) \subset \varphi(B(x, r))$.¹¹ Considérons un tel s .

Comme $\varphi^{-1}(B(\varphi(x), s))$ est un ouvert de \mathbb{R}^m en tant qu'ouvert de U , il existe un réel $r' > 0$ tel que $B(x, r') \subset \varphi^{-1}(B(\varphi(x), s))$.¹² Considérons un tel r' .



On a finalement le diagramme commutatif suivant, où $i ; i'$ et j désignent les inclusions et où $\varphi|_{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), s)) \setminus \{x\}} : \varphi^{-1}(B(\varphi(x), s)) \setminus \{x\} \rightarrow B(\varphi(x), s) \setminus \{\varphi(x)\}$ est un homéomorphisme :

$$\begin{array}{ccc}
 B(x, r') \setminus \{x\} & \xrightarrow{j} & B(x, r) \setminus \{x\} \\
 \searrow^{i'} & & \swarrow_i \\
 & \varphi^{-1}(B(\varphi(x), s)) \setminus \{x\} & \\
 & \downarrow \varphi|_{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), s)) \setminus \{x\}} & \\
 & B(\varphi(x), s) \setminus \{\varphi(x)\} &
 \end{array}$$

11. On remarque avant d'affirmer cela que $\varphi(x) \in \varphi(B(x, r))$.

12. Encore une fois, on a noté que $x \in \varphi^{-1}(B(\varphi(x), s))$.

Ce diagramme commutatif induit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le diagramme commutatif suivant, où j_* désigne un isomorphisme, car j est une équivalence d'homotopie¹³ (souvenons-nous que $U \subset \mathbb{R}^m$!):

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}_k(B(x, r') \setminus \{x\}) & \xrightarrow{j_*} & \tilde{H}_k(B(x, r) \setminus \{x\}) \\
& \searrow^{i'_*} & \nearrow^{i_*} \\
& \tilde{H}_k(\varphi^{-1}(B(\varphi(x), s)) \setminus \{x\}) & \\
& \downarrow^{(\varphi|_{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), s)) \setminus \{x\}})_*} & \\
& \tilde{H}_k(B(\varphi(x), s) \setminus \{\varphi(x)\}) &
\end{array}$$

Or, $B(x, r') \setminus \{x\}$ et $B(x, r) \setminus \{x\}$ ont le type d'homotopie de \mathbb{S}^{m-1} et $B(\varphi(x), s) \setminus \{\varphi(x)\}$ a le type d'homotopie de \mathbb{S}^{n-1} .

Ainsi, si $m \neq n$, on a

$$\tilde{H}_{m-1}(B(x, r) \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{m-1}(B(x, r') \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$$

et

$$\tilde{H}_{m-1}(B(\varphi(x), s) \setminus \{\varphi(x)\}) \cong 0.$$

Le diagramme précédent, en degré $m - 1$, donnerait donc une factorisation de $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ à travers 0, ce qui est impossible.

□

13. Cela signifie que l'on peut trouver une application $g : B(x, r) \setminus \{x\} \rightarrow B(x, r') \setminus \{x\}$ telle que $g \circ j$ et $j \circ g$ soient homotopes aux applications identités des espaces concernés. Il se trouve que cela implique que j_* est un isomorphisme...